Springer Reference Technik

Herbert Oertel jr. *Hrsg.*

Prandtl – Führer durch die Strömungslehre

Grundlagen und Phänomene

14. Auflage

Springer Vieweg

Springer Reference Technik

Springer Reference Technik bietet Ingenieuren – Studierenden, Praktikern und Wissenschaftlern – zielführendes Fachwissen in aktueller, kompakter und verständlicher Form. Während traditionelle Handbücher ihre Inhalte bislang lediglich gebündelt und statisch in einer Printausgabe präsentiert haben, bietet „Springer Reference Technik" eine um dynamische Komponenten erweiterte Online-Präsenz: Ständige digitale Verfügbarkeit, frühes Erscheinen neuer Beiträge online first und fortlaufende Erweiterung und Aktualisierung der Inhalte.

Die Werke und Beiträge der Reihe repräsentieren den jeweils aktuellen Stand des Wissens des Faches, was z. B. für die Integration von Normen und aktuellen Forschungsprozessen wichtig ist, soweit diese für die Praxis von Relevanz sind. Reviewprozesse sichern die Qualität durch die aktive Mitwirkung von namhaften HerausgeberInnen und ausgesuchten AutorInnen.

Springer Reference Technik wächst kontinuierlich um neue Kapitel und Fachgebiete. Eine Liste aller Reference-Werke bei Springer – auch anderer Fächer – findet sich unter http://link.springer.com/search?facet-content-type=%22ReferenceWork%22.

Weitere Informationen zu dieser Reihe finden Sie unter http://www.springer.com/series/15071

Herbert Oertel Jr.
Herausgeber

Prandtl - Führer durch die Strömungslehre

Grundlagen und Phänomene

14. Auflage

mit 510 Abbildungen und 3 Tabellen

Springer Vieweg

Herausgeber
Herbert Oertel Jr.
Baden-Baden
Deutschland

Springer Reference Technik
ISBN: 978-3-658-08626-8 ISBN: 978-3-658-08627-5 (eBook)
ISBN: 978-3-658-08628-2 (Bundle)
DOI 10.1007/978-3-658-08627-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Vieweg
© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 1942, 1944, 1949, 1956, 1957, 1965, 1969, 1984, 1990, 2000, 2002, 2007, 2012, 2017
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.
Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.
Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Strasse 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort zur 14. Auflage

Ludwig Prandtl hat mit seinen grundlegenden Beiträgen zur Hydro-, Aero- und Gasdynamik die Entwicklung auf dem Gebiet der Strömungsmechanik entscheidend geprägt und mit seinen bahnbrechenden Arbeiten in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts die moderne Strömungsmechanik begründet. Sein 1942 erschienenes Buch *Führer durch die Strömungslehre* hatte seinen Ursprung in den vorangegangenen Buchveröffentlichungen 1913 Lehre von der *Flüssigkeit und Gasbewegung* und 1931 *Abriß der Strömungslehre*. Der Titel Führer durch die Strömungslehre bringt Prandtls Absicht zum Ausdruck, den Leser auf einem sorgfältig angelegten Weg durch die einzelnen Gebiete der Strömungslehre zu führen. Dabei dringt der Verfasser, ohne umfangreiche mathematische Ableitungen, intuitiv zum Kern des physikalischen Problems vor. Die Beschreibung der grundlegenden physikalischen Phänomene und Begriffe der Strömungsmechanik, die zur Ableitung der vereinfachten Modelle erforderlich sind, haben Vorrang vor der Behandlung der Methoden.

Prandtls *Führer durch die Strömungslehre* war bei seiner Erstauflage das einzige Buch über die Strömungsmechanik und zählt bis heute zu den wichtigsten Büchern auf diesem Gebiet. Nach seinem Tode haben es seine Schüler Klaus Oswatitsch und Karl Wieghardt übernommen, sein Werk fortzusetzen. Nachdem die neunte Auflage vergriffen war und der Verlag eine Neuauflage anstrebte, haben wir diese Aufgabe gerne übernommen. Unter dem neuen Titel *Prandtl – Führer durch die Strömungslehre* wird in den ersten fünf Kapiteln der von Prandtl vorgezeichnete Weg der ersten Auflage von 1942 beibehalten. Der ursprüngliche Text wurde überarbeitet und den heutigen Erkenntnissen der Strömungsmechanik angepasst. Er führt von den Grundlagen der Strömungsmechanik wie den Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase über die Kinematik zur Dynamik der reibungsfreien, reibungsbehafteten und kompressiblen Strömungen bis zu den Anwendungen der Aerodynamik. Das sind die Kapitel, die den Studenten der Natur- und Ingenieurwissenschaften bis heute in der Strömungslehre Grundvorlesung vermittelt werden.

In Kap. 6 werden die *Grundgleichungen der Strömungsmechanik* als Grundlage für die Behandlung der Teilgebiete in den darauffolgenden Kapiteln bereitgestellt. Das ständig wachsende Gebiet der Strömungsmechanik hat inzwischen einen solchen Umfang angenommen, dass eine Auswahl erforderlich wurde. Meinen Kollegen bin ich zu großem Dank verpflichtet, dass sie in abgeschlossenen Einzelkapiteln

ihre Teilgebiete der Strömungsmechanik im Sinne Prandtls neu bearbeitet haben. So sind in den Kap. 7 bis 13 die neuesten Entwicklungen der vergangenen Jahrzehnte dargestellt. Die ursprünglichen Kapitel über die *Aerodynamik des Tragflügels*, über den *Wärmeübergang* und *geschichtete Strömungen* wurden vom Herausgeber neu bearbeitet und ergänzt. Neu hinzugekommen sind die Kapitel *Instabilitäten und turbulente Strömungen* von K. R. Sreenivasan und die *Bioströmungsmechanik* vom Herausgeber. Die Kapitel *Strömungen mit mehreren Phasen* wurden von U. Müller und die *Strömungen mit chemischen Reaktionen* von U. Riedel neu bearbeitet. Die neu gestalteten Kapitel *Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean* stammen von D. Etling und die *Mikroströmungen* von P. Erhard. Die Literaturzitate der einzelnen Kapitel wurden bewusst auf einige wenige Zitate beschränkt, die zum Verständnis und zur Ergänzung erforderlich sind. Für die umfangreichen historischen Literaturzitate verweisen wir auf die vorangegangenen Auflagen.

Der *Prandtl – Führer durch die Strömungslehre* wendet sich an Studenten der Natur- und Ingenieurwissenschaften, die sich nach der Strömungslehre Grundvorlesung einen Überblick über die einzelnen Teilgebiete der Strömungsmechanik verschaffen wollen. Er bietet aber auch dem Fachmann in Forschung und Industrie als Nachschlagewerk wertvolle Anregungen bei der Bearbeitung und Lösung strömungsmechanischer Probleme.

Besonderer Dank gilt dem Springer Vieweg Verlag für die äußerst fruchtbare und erfolgreiche Zusammenarbeit der letzten zwei Jahrzehnte.

Baden-Baden Herbert Oertel Jr.
Juni 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Strömungsmechanik 1
Herbert Oertel Jr.

2 Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit 61
Herbert Oertel Jr. und Martin Böhle

3 Dynamik zäher Flüssigkeiten 119
Herbert Oertel Jr.

4 Dynamik der Gase 187
Herbert Oertel Jr.

5 Aerodynamik 219
Herbert Oertel Jr.

6 Grundgleichungen der Strömungsmechanik 275
Herbert Oertel Jr.

7 Instabilitäten und turbulente Strömungen 351
Katepalli R. Sreenivasan und Herbert Oertel Jr.

8 Konvektive Wärme- und Stoffübertragung 423
Herbert Oertel Jr.

9 Strömungen mit mehreren Phasen 477
Ulrich Müller

10 Strömungen mit chemischen Reaktionen 543
Uwe Riedel

11 Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean 611
Dieter Etling

12 Mikroströmungen 663
Peter Ehrhard

13 Bioströmungsmechanik 715
Herbert Oertel Jr.

Sachverzeichnis 779

Mitarbeiterverzeichnis

Martin Böhle Lehrstuhl Strömungsmechanik, Technische Universität Kaiserslautern, Kaiserslautern, Deutschland

Peter Ehrhard Bio- u. Chemieingenieurwesen, Technische Universität Dortmund, Dortmund, Deutschland

Dieter Etling Institut für Meteorologie und Klimatologie, Leibniz Universität, Hannover, Hannover, Deutschland

Ulrich Müller Karlsruhe, Deutschland

Herbert Oertel Jr. Baden-Baden, Deutschland

Uwe Riedel Institut für Verbrennungstechnik der Luft- u. Raumfahrt, Universität Stuttgart und Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Stuttgart, Deutschland

Katepalli R. Sreenivasan Bobst Library, New York University, New York, NY, USA

Grundlagen der Strömungsmechanik

1

Herbert Oertel Jr.

Zusammenfassung

Das Kapitel Grundlagen der Strömungsmechanik führt in das Lehrbuch und Nachschlagewerk H. Oertel jr. (Hrsg.) Prandtl-Führer durch die Strömungslehre ein. Zunächst werden anhand ausgewählter Einzelbeispiele die einzelnen Teilgebiete der Strömungsmechanik anschaulich vorgestellt, die in den folgenden Kapiteln dieses Standardwerkes der Strömungsmechanik behandelt werden. Es werden die Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase als Grundlage der Hydro- und Aerostatik sowie die Kinematik der Strömung ohne Betrachtung der Kräfte im Strömungsfeld eingeführt. Die Topologie einer Strömung gibt einen ersten Hinweis auf die Beschreibung und Auswertung dreidimensionaler Strömungsfelder.

1 Einführung

Die Entwicklung der modernen Strömungsmechanik ist eng mit dem Namen ihres Begründers *Ludwig Prandtl* verbunden. Er begründete 1904 mit seinem berühmten Artikel über die Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung die *Grenzschichttheorie* und im folgenden Jahrzehnt die *Theorie des Tragflügels*, die Grundlage für die Berechnung des Reibungswiderstandes, des Wärmeübergangs und der Strömungsablösung ist. Mit dem *Prandtlschen Mischungsweg* für den turbulenten Impulsaustausch hatte er grundlegende Ideen zur Modellbildung turbulenter Strömungen. Seine gasdynamischen Arbeiten, wie die Prandtl-Glauert Korrektur für kompressible Strömungen, die Theorie der Stoß- und Expansionswellen sowie die ersten Aufnahmen von Überschallströmungen in Düsen, haben dieses Gebiet neu begründet. Er wandte die Methoden der Strömungsmechanik in der Meteorologie an, aber auch seine Beiträge zu Problemen der Elastizität, Plastizität und Rheologie waren wegweisend.

H. Oertel Jr.
Baden-Baden, Deutschland
E-Mail: herbert.oertel@t-online.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5_1

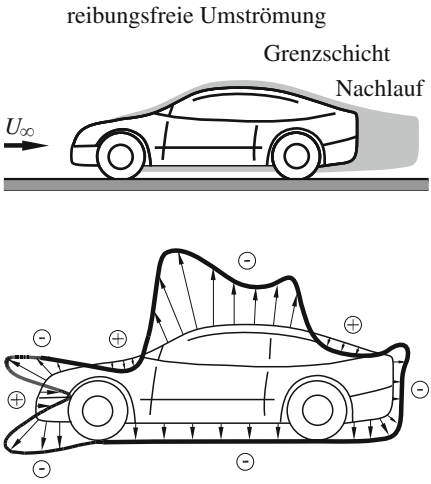
Besonders erfolgreich war Prandtl bei der Verknüpfung von Theorie und Experiment. Die Experimente dienten grundsätzlich der Überprüfung seiner theoretischen Vorstellung. Das gab Prandtls Experimenten ihre Aussagekraft und Präzision. Sein berühmtes Experiment mit dem Stolperdraht, durch den er die turbulente Grenzschicht und den Einfluss der Turbulenz auf die Ablösung entdeckte, ist ein Beispiel. Der Stolperdraht war nicht eine Eingebung, sondern das Resultat einer Überlegung über die unstimmigen *Eiffelschen* Widerstandsmessungen an Kugeln. Es genügten zwei Experimente mit verschiedenen Drahtlagen, um die Erzeugung der Turbulenz und ihren Einfluss auf die Ablösung nachzuweisen. Für seine Experimente entwickelte Prandtl Windkanäle und Messgeräte, wie den Göttinger Windkanal und das Prandtlsche Staurohr. Seine wissenschaftlichen Ergebnisse erscheinen oft intuitiv, die mathematische Ableitung ist Dienstleistung zum physikalischen Verständnis, obwohl sie dann doch das entscheidende Ergebnis und das vereinfachte physikalische Modell bringt. Nach einer Bemerkung von Werner Heisenberg besaß Prandtl die Fähigkeit, den Differentialgleichungen ohne Rechnung die Lösung anzusehen.

Ausgewählte *Einzelbeispiele* sollen den Leser, auf den von Prandtl vorbereiteten Weg zum Verständnis der Strömungsmechanik und auf die Inhalte sowie die Modellbildung der einzelnen Kapitel, einstimmen. Als Beispiele der *Dynamik von Strömungen* werden die Strömungsbereiche der *Kraftfahrzeugumströmung* als Beispiel einer inkompressiblen Strömung und die *Tragflügelumströmung* als Beispiel einer kompressiblen Strömung beschrieben.

Bei der *Kraftfahrzeugumströmung* unterscheidet man die freie Umströmung der Oberfläche und die Strömung zwischen dem mit der Geschwindigkeit U_∞ fahrenden Kraftfahrzeug und der ruhenden Straße. Die Strömung teilt sich im Staupunkt beim Maximalwert des Druckes auf und wird auf der Kühlerhaube und über die Bugschürze auf der Unterseite des Kraftfahrzeuges beschleunigt. Dies führt entsprechend der Abb. 1.1 zu einem Druckabfall und zu einer negativen Anpresskraft auf die Straße. Auf der Windschutzscheibe wird die Strömung erneut aufgestaut um stromab auf dem Dach sowie auf dem Kofferraum verzögert zu werden. Dies führt zu einem Druckanstieg mit einer positiven Auftriebskraft, während die negative Anpresskraft auf die Straße längs der Unterseite des Kraftfahrzeuges erhalten bleibt.

Die *reibungsbehaftete Strömung* (Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten) auf der Ober- und Unterseite des Kraftfahrzeugs beschränkt sich auf die *Grenzschichtströmung*, die an der Hinterkante in die reibungsbehaftete Nachlaufströmung übergeht. Wie die Strömungssichtbarmachung mit Rauch im Windkanalexperiment zeigt, bildet sich stromab des Fahrzeughecks ein Rückströmgebiet aus, das durch den schwarzen Bereich gekennzeichnet ist. Außerhalb des Grenzschicht- und Nachlaufbereichs ist die Strömung nahezu *reibungsfrei* (Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit).

Um die unterschiedlichen Strömungsbereiche verstehen zu lernen und damit die Grundlage für den aerodynamischen Entwurf eines Kraftfahrzeugs zu schaffen, hat Prandtl den sorgfältig vorbereiteten Weg von den Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase über die Kinematik bis hin zur Dynamik reibungsfreier und



Sichtbarmachung im Nachlauf

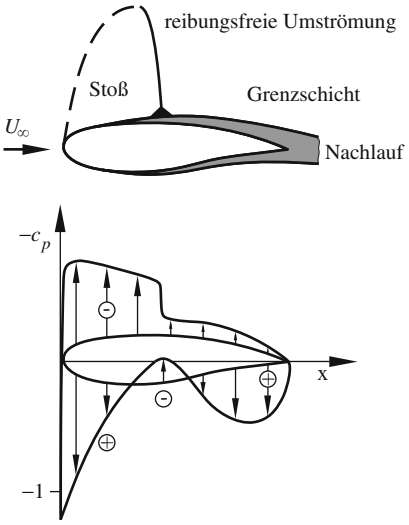
Abb. 1.1 Umströmung eines Kraftfahrzeugs

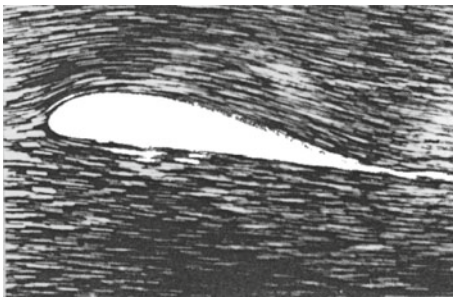
zäher Strömungen geschaffen. Folgt der Leser diesem Weg, wird er sukzessiv das physikalische Verstehen dieses ersten Strömungsbeispiels erleben.

Das zweite Strömungsbeispiel behandelt die kompressible *Umströmung eines Tragflügels* mit *Verdichtungsstoß* (Kap. 4 ▸ Dynamik der Gase und Kap. 5 ▸ Aerodynamik). Die Anströmung mit der Geschwindigkeit U_∞ des Tragflügels eines Verkehrsflugzeuges ist eine hohe Unterschallanströmung. In Abb. 1.2 sind die Strömungsbereiche in einem Profilschnitt des Tragflügels, die negative Druckverteilung sowie die Strömungssichtbarmachung mit Teilchen dargestellt. Vom Staupunkt aus verzweigt sich die Staulinie zur Saug-, (Ober-) und Druckseite (Unterseite) des Tragflügels. Auf der Oberseite wird die Strömung bis in den Überschallbereich beschleunigt, was mit einem starken Druckabfall verbunden ist. Weiter stromab wird die Strömung über den Verdichtungsstoß wieder auf eine Unterschallgeschwindigkeit verzögert. Dieser Verdichtungsstoß tritt mit der Grenzschicht in Wechselwirkung und verursacht eine Aufdickung, die einen erhöhten Widerstand zur Folge hat.

Auf der Unterseite wird die Strömung ebenfalls vom Staupunkt aus beschleunigt. Die Beschleunigung ist jedoch im Nasenbereich nicht so groß wie auf der Saugseite, so dass auf der gesamten Druckseite keine Überschallgeschwindigkeiten auftreten. Etwa ab der Mitte der Tragfläche wird die Strömung wieder verzögert. Der Druck gleicht sich stromab dem Druck der Saugseite an und führt stromab der Hinterkante in die Nachlaufströmung über.

Auf der Saug- und Druckseite des Flügels bildet sich eine dünne *Grenzschicht* aus. Die saug- und die druckseitige Grenzschicht treffen sich an der Hinterkante und bilden stromab die Nachlaufströmung. Sowohl die Strömung in den Grenzschichten als auch die Strömung im Nachlauf ist entsprechend der Kraftfahrzeugumströmung *reibungsbehaftet*. Außerhalb der genannten Bereiche ist die Strömung nahezu *reibungsfrei*.





Strömungssichtbarmachung

Abb. 1.2 Umströmung eines Tragflügels

Aus der Druckverteilung der Abb. 1.2 resultiert eine Auftriebskraft, die beim Tragflügel des Verkehrsflugzeuges den zu befördernden Passagieren anzupassen ist. Bei der Auslegung des Tragflügels hat der Entwicklungsingenieur das Ziel, den Widerstand des Tragflügels möglichst gering zu halten, um Treibstoff einzusparen. Dies geschieht durch geeignete Formgebung der Profilschnitte.

Aus den Eigenschaften der Strömungsbereiche resultieren für die Berechnung der jeweiligen Strömungen unterschiedliche Gleichungen. Für die Grenzschichtströmungen gelten mit guter Näherung die Grenzschichtgleichungen. Mit mehr Aufwand hingegen ist die Berechnung der Nachlaufströmung und die Strömung im Hinterkantenbereich verbunden. Für diese Bereiche müssen die Navier-Stokes-Gleichungen gelöst werden. Die reibungsfreie Strömung im Bereich vor dem Stoß ist mit der Potentialgleichung einer Berechnung zugänglich, was mit vergleichsweise wenig Aufwand verbunden ist. Die reibungsfreie Strömung hinter dem Stoß außerhalb der Grenzschicht muss mit den Euler-Gleichungen berechnet werden, da dort die Strömung drehungsbehaftet ist. Im Bereich der Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkung müssen wiederum die Navier-Stokes-Gleichungen gelöst werden.

Im Gegensatz zu Prandtls Zeiten stehen heute numerische Lösungssoftware für die unterschiedlichen partiellen Differentialgleichungen zur Verfügung. Deshalb werden in dem Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik die *Grundgleichungen* laminarer und turbulenter Strömungen als Grundlage für die folgenden Kapitel der Teilgebiete der Strömungsmechanik bereitgestellt. Entsprechend Prandtls Vorgehensweise verweisen wir bezüglich der mathematischen Lösungsalgorithmen und Lösungsmethoden auf die zitierten Lehrbücher und Fachliteratur.

Wie die Kapitel der strömungsmechanischen Teilgebiete zeigen werden, bleibt trotz numerisch berechneter Strömungsfelder die Notwendigkeit, sich mit der

physikalischen Modellbildung in den einzelnen Teilgebieten auseinander zu setzen. Bis heute ist keine geschlossene Theorie der Turbulenz, der Mehrphasenströmungen und der Kopplung von Strömungen mit chemischen Reaktionen im thermischen bzw. chemischen Nicht-Gleichgewicht bekannt. Damit hat Prandtls Weg der intuitiven Verknüpfung von Theorie und Experiment zur physikalischen Modellbildung nichts an Aktualität verloren.

Die faszinierende Komplexität turbulenter Strömungen hat die Aufmerksamkeit der Wissenschaft über Jahrhunderte auf sich gezogen (Kap. 7 ▸ Instabilitäten und turbulente Strömungen). So nennt man z. B. die in Raum und Zeit irreguläre drehungsbehaftete Strömung *Turbulenz*. Dennoch ist diese von einer kausalen Beobachtung abgeleitete statistische irreguläre turbulente Strömung nicht ohne Ordnung. Turbulente Strömungen sind ein Paradigma für räumlich ausgedehnte dissipative Systeme, in denen mehrere miteinander gekoppelte Längenskalen gleichzeitig angeregt sind. Dieses Phänomen wurde intensiv in den Ingenieurwissenschaften und Teilgebieten der Physik wie der Astrophysik, der Ozeanographie und der Meteorologie untersucht.

Die Abb. 1.3 zeigt einen turbulenten Wasserjet, der aus einer ruhenden Öffnung in ruhendes Wasser strömt. Die Jet-Strömung wird in einem dünnen Lichtschnitt mit

Abb. 1.3 Turbulenter Wasser-Jet

fluoreszierendem Farbstoff sichtbar gemacht. Das Bild illustriert die Wirbelstruktur unterschiedlicher Größenordnungen und zunehmender Komplexität. Die Grenze zwischen der turbulenten Strömung und der ruhenden Umgebung ist relativ scharf und besteht aus mehreren Skalen. Das Objekt der Untersuchungen ist oft eine Ensemble-Mittelung mehrerer solcher Ereignisse. Solche Mittelungen unterdrücken ein Großteil der gezeigten Feinstrukturen der turbulenten Strömung. Sie vermitteln das Bild eines gemittelten Strömungsfeldes, das linear mit zunehmendem Abstand stromab anwächst. Selbst in solchen gemittelten Strömungsfeldern variieren die Strömungsgrößen mit der Länge und Ausdehnung der Strömung. Diese Änderungen der gemittelten Strömungsgrößen sind ein Maß für die räumliche Inhomogenität der Turbulenz. Diese Inhomogenität ist entlang der kleineren Skalen der Strömung stärker ausgeprägt. Dabei ist die gemessene Strömungsgeschwindigkeit an jedem Ort des Strömungsfeldes eine irreguläre Funktion der Zeit. In den zeitlichen Verläufen ist der Grad der Ordnung nicht so deutlich zu erkennen wie in den zuvor diskutierten räumlichen Schnitten. Bereiche zeitlich begrenzter Skalen verhalten sich dabei teilweise wie eine Brownsche Bewegung.

Im Gegensatz dazu zeigt die Abb. 1.4 eine homogene und isotrope turbulente Strömung, die durch die konstante Bewegung eines Gitters durch eine ruhende

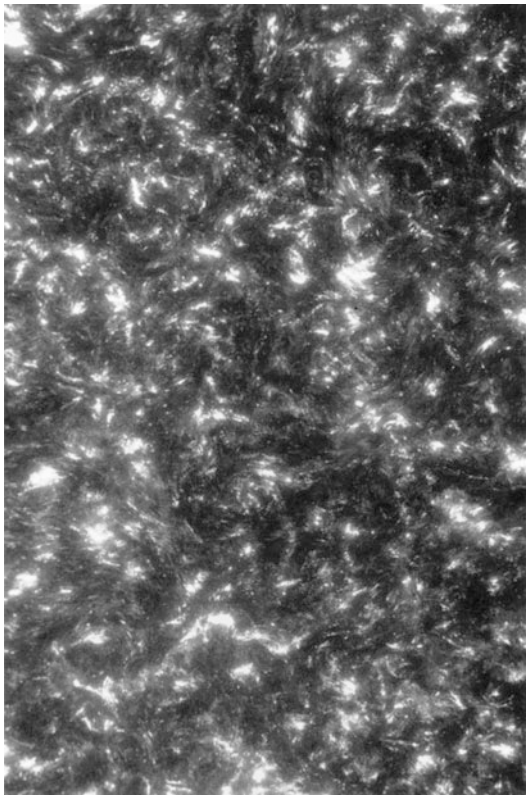


Abb. 1.4 Homogene und isotrope turbulente Strömung

Flüssigkeit erzeugt wurde. Entgegen der Jet-Turbulenz zeigt die homogene turbulente Strömung keine Vorzugsrichtung oder Orientierung. Im Mittel besitzt die Strömung keine nennenswerten Inhomogenitäten oder Anisotropien. Sofern räumliche Strukturen in der Strömung bestehen, sind diese verglichen mit Abb. 1.3 nur schwach ausgebildet. Homogene und isotrope turbulente Strömungen ermöglichen beträchtliche theoretische Vereinfachungen und sind die Grundlage einer Vielzahl von Turbulenzmodellen.

Das Einsetzen turbulenter Strömungen wird bei vielen strömungsmechanischen Problemen von *Instabilitäten* verursacht. Ein Beispiel dafür ist die *thermische Zellularkonvektion* in einer von unten beheizten horizontalen Fluidschicht unter Einfluss der Schwerkraft. Der Boden unterhalb des Fluids besitzt eine höhere Temperatur als die freie Oberfläche. Beim Überschreiten einer kritischen Temperaturdifferenz zwischen der freien Oberfläche und dem Boden gerät das Fluid plötzlich in Bewegung und bildet entsprechend der Abb. 1.5 hexagonale Zellstrukturen, in deren Zentren Fluid aufsteigt und an deren seitlichen Grenzen Fluid abwärts strömt. Das Phänomen wird als thermische Zellularkonvektion bezeichnet. Ist das Fluid von oben durch eine Deckplatte begrenzt, so bilden sich ohne Oberflächenspannung anstatt der hexagonalen Zellen periodisch nebeneinander angeordnete, walzenförmige Strukturen aus. Der Grund für die Instabilitäten ist in beiden Fällen der Gleiche.

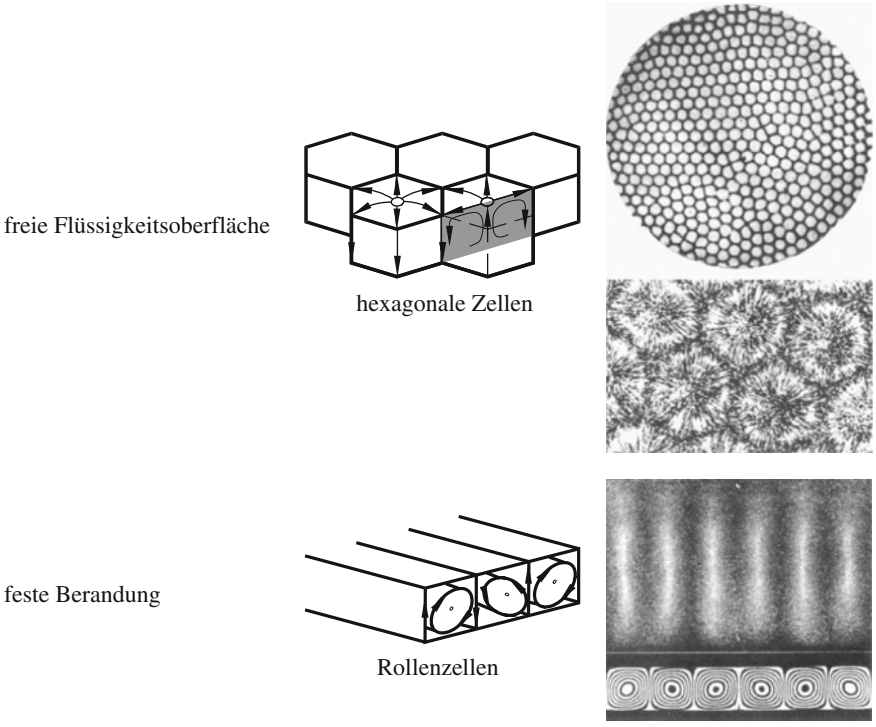


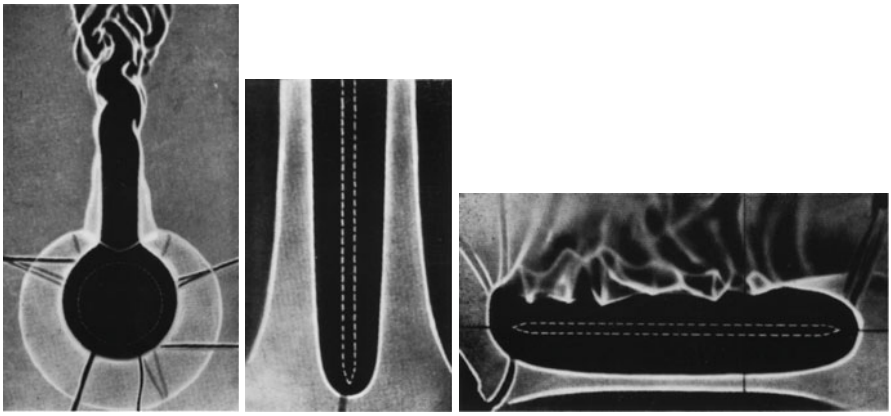
Abb. 1.5 Thermische Zellularkonvektion

Kaltes, also dichteres Fluid ist über wärmerem Fluid geschichtet und tendiert dazu, in tiefere Schichten zu fließen. Die kleinste Störung der Schichtung führt zum Einsetzen dieser Ausgleichsbewegung, sofern eine kritische Temperaturdifferenz überschritten wird.

Der Übergang zur turbulenten Konvektionsströmung vollzieht sich mit wachsender Temperaturdifferenz über mehrere zeitabhängige Zwischenzustände. Dabei ändert sich die Größe der hexagonalen Zellen bzw. der länglichen Konvektionsrollen. Die ursprüngliche zellulare Struktur der Instabilität ist jedoch in der turbulenten Konvektionsströmung wiederzuerkennen.

Konvektionsströmungen mit *Wärme- und Stoffübertragung* werden in dem Kap. 8 ▸ Konvektive Wärme- und Stoffübertragung behandelt. Sie treten in vielfältiger Weise in Natur und Technik auf. So bestimmt der Wärmeaustausch in der Atmosphäre das Wetter. Das Beispiel eines tropischen Wirbelsturms ist in Abb. 1.10 gezeigt. Der großräumige Wärmeausgleich zwischen Äquator und Nordpol führt in den Ozeanen zu Konvektionsströmungen wie z. B. dem Golfstrom (Abb. 1.11). Konvektionsströmungen im Erdinneren verursachen die Drift der Kontinente und sind verantwortlich für das Erdmagnetfeld. Strömungsvorgänge in der Energie- und Umwelttechnik sind mit Wärme- und Stofftransport meist auch mit Phasenübergängen wie in Dampferzeugern und Kondensatoren verknüpft. Konvektionsströmungen werden in Kühltürmen eingesetzt, um die Abwärme in Kraftwerken abzuführen. Die Ausbreitung von Abluft und Abgasen in der Atmosphäre bzw. die Ausbreitung von Kühl- und Abwasser in Gewässern, Heizungs- und Klimatechnik in Gebäuden, Kreisläufe von Solarkollektoren und Wärmespeichern sind weitere Beispiele von Konvektionsströmungen.

Die Abb. 1.6 zeigt Experimente zur thermischen Konvektionsströmung. Dabei spricht man im Gegensatz zur *erzwungenen Konvektionsströmung* von der *freien Konvektion*, wenn die Strömung allein durch Auftriebskräfte verursacht wird. Diese können durch Temperatur- bzw. Konzentrationsgradienten im Schwerefeld bedingt



beheizter Zylinder senkrechte Platte waagerechte Platte

Abb. 1.6 Thermische Konvektionsströmungen

sein. Ein beheizter horizontaler Kreiszylinder erzeugt zunächst eine aufsteigende laminare Konvektionsströmung im umgebenden ruhenden Medium bis schließlich der Übergang zur turbulenten Konvektionsströmung durch thermische Instabilitäten eingeleitet wird. Entsprechende thermische Konvektionsströmungen entstehen an senkrecht und waagerecht beheizten Platten.

Die *Mehrphasenströmung* (Kap. 9 ▸ Strömungen mit mehreren Phasen) ist die am häufigsten auftretende Strömungsform in Natur und Technik. Dabei ist der Begriff Phase im thermodynamischen Sinne als einer der Aggregatzustände fest, flüssig und gasförmig zu verstehen, die in ein- oder mehrkomponentigen Stoffsystemen simultan auftreten können. Die mit Regentropfen und Hagelkörnern driftenden Gewitterwolken, der schäumende Gebirgsbach, die abgehende Schneestaub-Lawine oder die Vulkanasche-Wolke sind eindrucksvolle Beispiele für Mehrphasenströmungen in der Natur.

In der Kraftwerks- und chemischen Verfahrenstechnik sind Mehrphasenströmungen ein entscheidendes Mittel für Wärme und Stofftransport. Zweiphasenströmungen bestimmen das Geschehen in den Dampferzeugern, Kondensatoren und Kühltürmen von Dampfkraftwerken. Der niederfallende Regen des Kühlwassers in einem Nasskühlturm ist in der Abb. 1.7 zu sehen. Die Wassertropfen geben ihre Wärme durch Verdampfen an die sich erwärmende aufsteigende Luft ab. Mehrphasen-Mehrkomponenten-Strömungen werden bei der Gewinnung, dem Transport und der Verarbeitung von Erdöl und Erdgas eingesetzt. Bei Destillations- und Rektifikationsprozessen der chemischen Industrie sind diese Strömungsarten ebenso maßgeblich beteiligt. Sie treten auch als Kavitationserscheinungen an schnell umströmten Unterwassergleitflächen auf. Die Abb. 1.8 zeigt als Beispiel ein kavitierendes Unterwasserprofil. Phänomene dieser Art sind in Strömungsma-

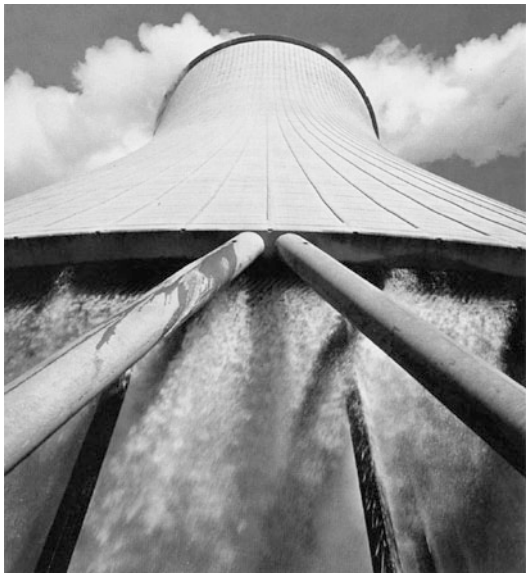


Abb. 1.7 Nasskühlturm

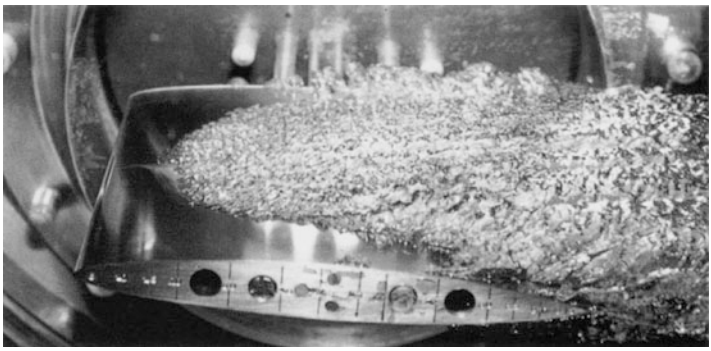


Abb. 1.8 Kavitation an einem Unterwasserprofil

schinen höchst unerwünscht, da sie zu gravierenden Materialschädigungen führen können.

Turbulente reaktive Strömungen (Kap. 10 ▸ Strömungen mit chemischen Reaktionen) sind von großer Bedeutung für eine Vielzahl von Anwendungen in der Energie-, Chemie- und Verbrennungstechnik. Die Optimierung dieser Prozesse stellt hohe Anforderungen an die Genauigkeit der numerischen Simulation turbulenter Strömungen. Aufgrund der Komplexität der Wechselwirkung zwischen turbulenter Strömung, molekularer Diffusion und chemischer Reaktionskinetik besteht ein großer Bedarf an verbesserten Modellen zur Beschreibung dieser Prozesse.

Turbulente Flammen sind durch ein breites Spektrum von Zeit- und Längenskalen charakterisiert. Die typischen Längenskalen der Turbulenz reichen von der Ausdehnung der Verbrennungskammer bis hinunter zu den kleinsten Wirbeln, in denen turbulente kinetische Energie dissipiert wird. Die der Verbrennung zugrunde liegenden chemischen Reaktionen geben ein breites Spektrum von Zeitskalen vor. Abhängig vom Überlappen der turbulenten Zeitskalen mit den chemischen Zeitskalen gibt es Bereiche mit einer starken oder schwachen Wechselwirkung zwischen Chemie und Turbulenz. Deshalb erfordert eine gemeinsame Beschreibung turbulenter Diffusionsflammen im Allgemeinen immer ein Verständnis von turbulenter Mischung und Verbrennung.

Eine vollständige Beschreibung turbulenter Flammen muss deshalb von der kleinsten bis zur größten Skala alle Skalen auflösen, weshalb eine numerische Simulation technischer Verbrennungssysteme auf den heute zur Verfügung stehenden Rechnern nicht möglich ist und Mittelungstechniken in Form von Turbulenzmodellen eingesetzt werden müssen. Sollen solche Turbulenzmodelle die technische Anwendung im Hinblick auf Mischung, Verbrennung und Schadstoffbildung realistisch beschreiben, ist es jedoch notwendig, aus detaillierten Untersuchungen die Parameter solcher Modelle besser bestimmen zu können.

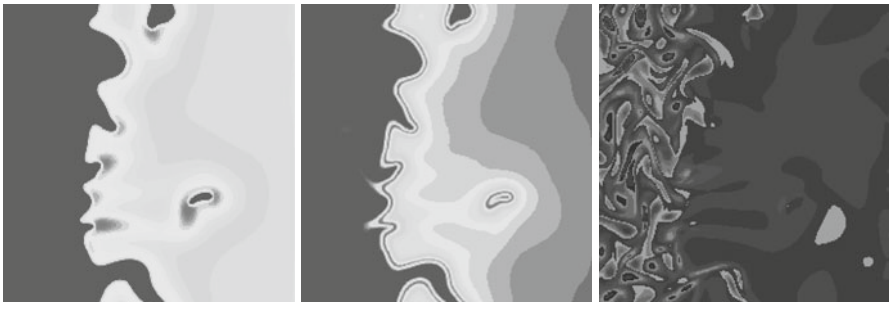
Ein vielversprechender Ansatz hierzu ist die *Direkte Numerische Simulation*, die Generierung künstlicher laminarer und turbulenter Flammen mit dem Rechner. Für einen kleinen Raumbereich werden die Erhaltungsgleichungen für reaktive Strömungen unter Berücksichtigung aller turbulenten Fluktuationen gelöst, was

einen kleinen, aber realistischen Ausschnitt einer größeren Flamme darstellt und so dazu eingesetzt werden kann reale Flammen zu beschreiben.

Die Bildung von in das Abgas eindringenden abgeschlossenen Bereichen mit Frischgas stellt ein interessantes Phänomen bei turbulenten Vormischflammen dar. Dieser transiente Prozess kann mittels der direkten numerischen Simulation zeitlich aufgelöst untersucht werden und ist für die Bestimmung des Gültigkeitsbereiches bestehender sowie die Entwicklung neuer Modelle zur Beschreibung turbulenter Verbrennung von Bedeutung. Die Abb. 1.9 zeigt die Konzentrationsverteilung von OH- und CO-Radikalen sowie die Wirbelstärke in einer turbulenten Methanvormischflamme.

Strömungen in der Natur (Kap. 11 ▸ Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean) können in vielfältiger Weise auf der Erde und im Weltall beobachtet werden. Die *Strömungsvorgänge in der Atmosphäre* reichen vom kleinräumigen Hangwind bis hin zum Globus umspannenden Starkwindband des troposphärischen Strahlstroms. Ein besonders eindrucksvolles atmosphärisches Phänomen sind die tropischen Wirbelstürme, welche im Gebiet der Karibik und den Vereinigten Staaten unter dem Namen Hurrikan bekannt sind. Die Hurrikans bilden sich in den Sommermonaten über den warmen Gewässern vor der afrikanischen Küste in der Nähe des Äquators und wandern mit einer südöstlichen Strömung zunächst in Richtung Karibik um dann im Bereich der Ostküste der Vereinigten Staaten nach Nordosten umzuschwenken. In diesen tropischen Wirbelstürmen können Windgeschwindigkeiten bis zu 300 km/h auftreten, die auf dem Land zu hohen Schäden führen können. Beispiele von Wirbelstürmen sind in Abb. 1.10 dargestellt. Es sind die Bahnen und ein Satellitenbild der Hurrikane Ivan und Charley gezeigt, die im Sommer 2004 über die karibischen Inseln und die amerikanische Südostküste hinwegzogen und ihre Bahn als Tiefdruckgebiet über den Atlantik bis nach Europa fortgesetzt haben.

Die *Strömungsvorgänge im Ozean* reichen von kleinräumigen Phänomenen wie den Wasserwellen, bis zu großräumigen Meeresströmungen. Von letzteren sei als Beispiel der Golfstrom erwähnt, der sich als warme oberflächennahe Meeresströmung praktisch von der afrikanischen Küste über die Karibik bis hin nach West-



OH Massenbruch CO Massenbruch Wirbelstärke

Abb. 1.9 Turbulente vorgemischte Methanflamme

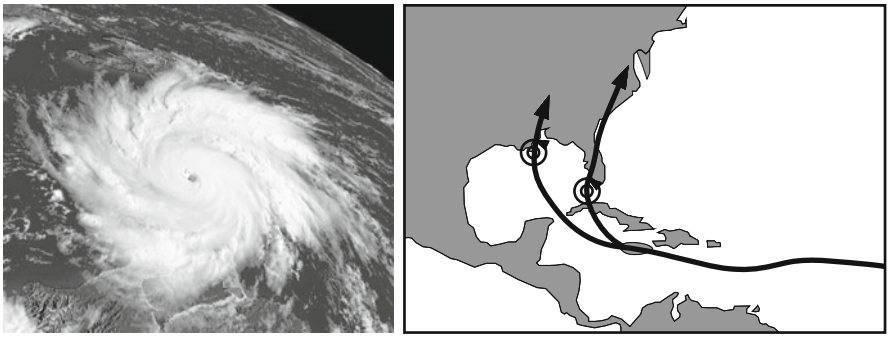


Abb. 1.10 Hurrikan Ivan und Bahnen der Hurrikane Ivan und Charley 2004

und Nordeuropa verfolgen lässt. Hier sorgt er dank seiner relativ hohen Wassertemperaturen für ein mildes Klima im Bereich der britischen und norwegischen Küste. Zum Ausgleich der polwärts gerichteten warmen Oberflächenströmung bildet sich eine kalte Tiefenströmung aus, die vom Nordatlantik entlang der Ostküste von Nord- und Südamerika nach Süden strömt. Beide großräumigen Strömungssysteme sind in Abb. 1.11 dargestellt.

Die *Mikroströmungen* (Kap. 12 ▸ Mikroströmungen) stellen ein recht junges Gebiet der Strömungsmechanik dar. Strömungs- und Transportprozesse in Mikrokanälen und um Mikroobjekte werden durch den Fortschritt der Fertigungstechnologien für technische Anwendungen relevant. Moderne Fertigungsverfahren erlauben kleinste Strukturen von deutlich unter einem Millimeter in verschiedenem Material wie Silizium, Glas, Metall oder Kunststoff herzustellen. So können komplexe fluidische Funktionen auf kleinstem Raum realisiert werden.

Ein Beispiel eines mikrofluidischen Systems stellt der Druckkopf von Tintenstrahldruckern dar. Hierbei wird die Tinte durch eine Matrix von Öffnungen aus Kavitäten ausgeworfen, um Farbpunkte auf dem Papier zu erzeugen. Abb. 1.12 zeigt den Auswurf eines einzelnen Tropfens von etwa 45 µm Durchmesser aus dem Druckkopf. In Zeitschritten von 10 µs erkennt man die anfängliche Entwicklung der ausgeworfenen Flüssigkeit hin zu einem Tropfen und mehreren Satellitentropfen. Die Satellitentropfen vereinigen sich im übrigen wieder mit dem großen Tropfen bevor die Papierebene erreicht wird. Der Druckaufbau in der Kavität geschieht durch Piezo-Kristalle oder durch Wärmezufuhr und Verdampfung. Ähnliche Systeme ermöglichen die hochgenaue Dosierung von Flüssigkeiten, z. B. in der Verfahrenstechnik.

Beim zweiten Beispiel wird das günstige Verhältnis von Oberfläche und Volumen in Mikrokanälen genutzt, um einen kompakten Mikrowärmetauscher aufzubauen. Abb. 1.12 zeigt einen Kreuzstromwärmetauscher, welcher aus einem Stapel von Metallfolien mit eingefrästen Mikrokanälen von 100×200 µm Querschnitt besteht. In einem Würfel von 14 mm Seitenlänge können so bei Temperaturdifferenzen bis 80 K Wärmeströme bis zu 14 kW übertragen werden. Die große Übertragungsfläche ist nicht nur für die Wärmeübertragung von Vorteil, sondern kann bei katalytischer

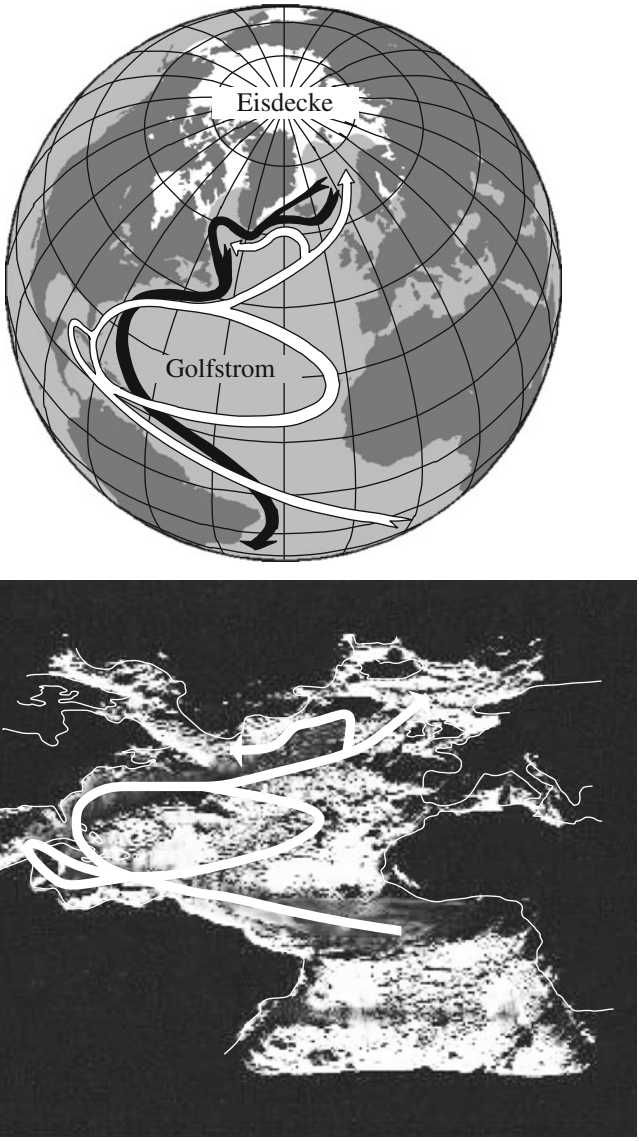
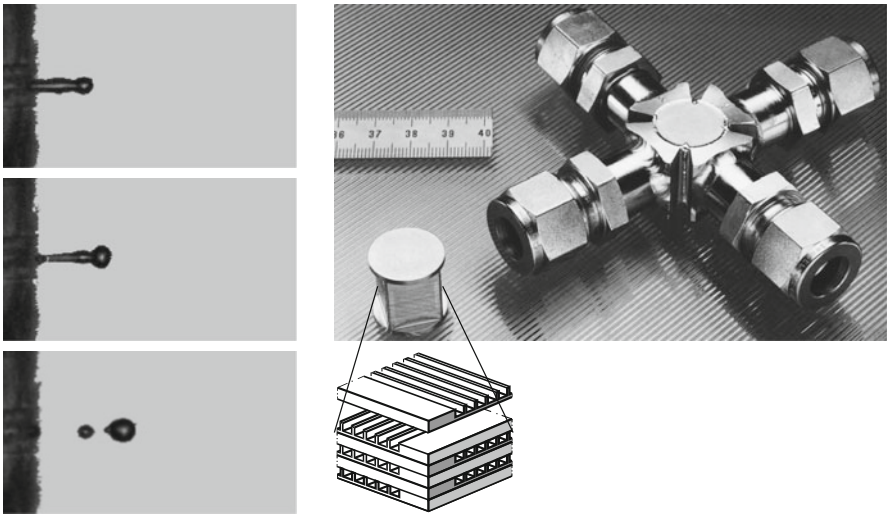


Abb. 1.11 Großräumige Meeresströmungen im Atlantik

Beschichtung auch den Stoffumsatz chemischer Reaktionen verbessern. Ähnliche Wärmetauscher können als Mikroreaktoren eingesetzt werden, wobei die Temperatur der chemischen Reaktion in einer Passage durch einen Wärmeträger in der zweiten Passage sehr präzise kontrolliert werden kann. So werden chemische Reaktionen möglich oder optimiert, die ansonsten gänzlich unmöglich erscheinen.



C.Maier 2004 *K. Schubert et al.* 2001

Abb. 1.12 Beispiele mikrofluidischer Komponenten

Es zeigt sich, abhängig vom Fluid, dass die kontinuumsmechanische Behandlung von Strömungen in und um sehr kleine Geometrien in vielen Fällen nicht ohne weiteres möglich ist. Gegebenenfalls werden Korrekturen der kontinuumsmechanischen Gleichungen oder gar molekulare Methoden notwendig, um die Physik der Strömung auf solch kleinen Längenskalen korrekt wiederzugeben.

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Strömungsbeispielen befasst sich die *Bioströmungsmechanik* in dem Kap. 13 ▸ Bioströmungsmechanik mit Strömungen, die von flexiblen biologischen Oberflächen aufgeprägt werden. Man unterscheidet die Umströmung von Lebewesen in Luft oder im Wasser, wie den Vogelflug oder das Schwimmen der Fische und Innenströmungen, wie den geschlossenen Blutkreislauf von Lebewesen. Als Beispiel sei die periodisch pulsierende Strömung im menschlichen Herzen aufgeführt.

Das Herz besteht aus zwei getrennten Pumpkammern, dem linken und rechten Ventrikel. Der rechte Ventrikel füllt sich mit sauerstoffarmem Blut aus dem Körperkreislauf, um sich bei seiner Kontraktion in den Lungenkreislauf zu entleeren. Das in der Lunge reoxigenierte Blut wird vom linken Ventrikel in den Körperkreislauf befördert. Die vereinfachte Darstellung der Strömung während eines Herzzyklus ist in Abb. 1.13 gezeigt. Die Vorhöfe und Ventrikel des Herzens sind durch die Atrioventrikularklappen getrennt, die das Einströmen in die Herzventrikel regulieren. Sie verhindern die Blutrückströmung während der Ventrikelkontraktion. Bei der Ventrikelrelaxation verhindert die Pulmonalklappe den Blutrückstrom aus den Lungenarterien und die Aortenklappe den Rückstrom aus der Aorta in den linken Ventrikel.

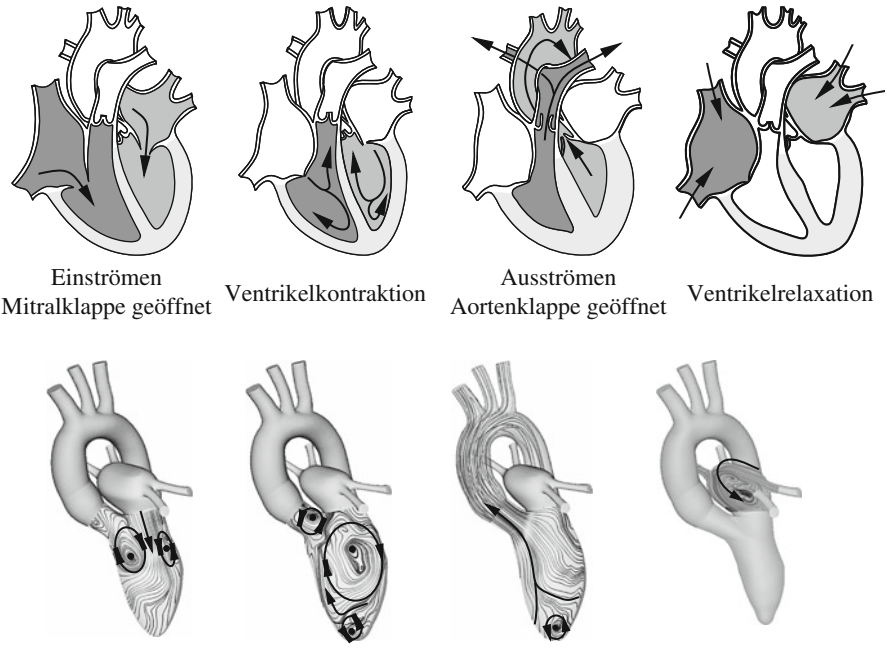


Abb. 1.13 Strömung im menschlichen Herzen

Die Ventrikel durchlaufen während der Herzzyklen eine periodische Kontraktion und Relaxation, die den pulsierenden Blutstrom im Körperkreislauf sicherstellt. Dieser Pumpzyklus geht mit Änderungen des Ventrikel- und Arteriendruckes einher. Die jeweilige Druckdifferenz sorgt für das druckgesteuerte Öffnen und Schließen der Herzklappen. Beim gesunden Herzen ist die pulsierende Strömung laminar und ablösefrei. Defekte des Pumpverhaltens des Herzens und Herzinsuffizienzen führen zu turbulenten Strömungsbereichen und Rückströmungen in den Ventrikeln, die die Strömungsverluste im Herzen erhöhen.

Die Strömungsberechnung der Abb. 1.13 zeigt die Stromlinien des Einströmvorgangs in den linken Herzventrikel. Die Mitralklappe ist geöffnet und die Aortenklappe geschlossen. Man erkennt den Eintrittswirbel mit einer Maximalgeschwindigkeit von etwa $0{,}5\,\mathrm{m/s}$, der mit fortschreitender Zeit im gezeigten Längsschnitt die Ventrikelspitze durchströmt. Bei der Ventrikelkontraktion sind Aorten- und Mitralklappe geschlossen. Der linke Ventrikel ist vollständig mit Blut gefüllt und die berechneten Strömungsgeschwindigkeiten sind sehr klein. Beim Ausströmen ist die Mitralklappe geschlossen und die Aortenklappe geöffnet. Die Stromlinien zeigen den Ausströmjet in die Aorta. Bei der Ventrikelrelaxation sind beide Herzklappen geschlossen. Es ist das Einströmen in den linken Vorhof zu erkennen.

2 Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase

2.1 Eigenschaften der Flüssigkeiten

Flüssigkeiten unterscheiden sich von festen Körpern durch die leichte Verschiebbarkeit ihrer Teilchen. Während bei festen Körpern endliche, zum Teil sehr erhebliche Kräfte nötig sind um ihre Form zu ändern, verschwinden die zur Formänderung von Flüssigkeiten erforderlichen Kräfte vollständig, wenn für die Formänderung hinreichend viel Zeit zur Verfügung steht. Bei schnellen Formänderungen tritt auch bei Flüssigkeiten ein Widerstand auf, der aber nach Beendigung der Bewegung sehr schnell verschwindet. Man nennt die Eigenschaft der Flüssigkeiten, gegen Formänderung Widerstand zu leisten, *Zähigkeit*. Von der Zähigkeit wird in dem Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten ausführlich die Rede sein. Neben den gewöhnlichen, leicht beweglichen Flüssigkeiten gibt es auch sehr zähe Flüssigkeiten, deren Widerstand gegen Formänderung beträchtlich ist, im Ruhezustand aber auch wieder verschwindet. Von dem zähen Zustand ausgehend sind alle Phasenübergänge zum (amorphen) festen Körper möglich. Erhitztes Glas z. B. durchläuft alle möglichen Übergänge, bei Asphalt und ähnlichen Stoffen treten sie bei gewöhnlichen Temperaturen auf. Zum Beispiel läuft eine umgestürzte Tonne mit Asphalt je nach der Temperatur in einigen Tagen oder Wochen aus. Die ausgelaufene Masse bildet einen flachen Kuchen. Obwohl dieser dauernd weiterfließt, kann man darauf herumtreten, ohne merkliche Eindrücke hervorzurufen. Eindrücke bilden sich aber bei längerem Stehenbleiben. Bei der Bearbeitung mit einem Hammer splittert die Masse wie Glas.

In der Lehre vom *Gleichgewicht* der Flüssigkeiten interessiert man sich für Ruhezustände bzw. hinreichend langsame Bewegungen. Hier darf daher der Widerstand gegen Formänderung gleich Null gesetzt werden. Man erhält *eine Definition des flüssigen Zustandes*: *In einer sich im Gleichgewicht befindenden Flüssigkeit ist jeder Widerstand gegen Formänderung gleich Null*.

Nach der kinetischen Theorie der Materie sind die Atome beziehungsweise Moleküle in ständiger Bewegung. Die kinetische Energie dieser Bewegung äußert sich als Wärme. Flüssigkeiten unterscheiden sich von festen Körpern dadurch, dass die Teilchen nicht um feste Orte schwingen, sondern mehr oder weniger häufig ihren Platz mit einem Nachbarteilchen vertauschen. Tritt in der Flüssigkeit ein Spannungszustand auf, werden solche Ortswechsel begünstigt. Sie bewirken ein Nachgeben in Richtung der Spannungsdifferenzen. Dieses Nachgeben verursacht im Ruhezustand ein mehr oder weniger schnelles Verschwinden der Spannungsdifferenzen. Während der Formänderung entstehen Spannungen, die um so größer sind, je schneller die Formänderung vor sich geht.

Das allmähliche Erweichen von amorphen Körpern bei steigender Temperatur kann man sich folgendermaßen vorstellen: Erhitzt man den Körper, d. h. erhöht man die Energie der Molekülbewegung, so wechseln zunächst einige Teilchen dort ihren Ort, wo gerade zufällig besonders große Schwingungsamplituden auftreten. Bei weiterer Erhitzung werden die Ortswechsel immer häufiger, bis sie schließlich überall stattfinden. Bei kristallinen festen Körpern erfolgt der Übergang vom festen

zum flüssigen Zustand unstetig durch Schmelzen, d. h. durch Auseinanderfallen des regelmäßigen Kristallgefüges.

Eine weitere Eigenschaft von Flüssigkeiten ist ihr großer Widerstand gegen Volumenänderung. Es ist nicht möglich, 1 Liter Wasser in ein Gefäß von $1/2$ Liter Inhalt hineinzupressen. Bringt man dieselbe Menge in ein Gefäß von 2 Liter Inhalt, füllt es dieses nur zur Hälfte aus. Dabei ist das Wasser nicht ganz inkompressibel. Bei hohen Drücken kann es um merkbare Beträge zusammengepresst werden (4 % Volumenverminderung bei einem Druck von rund 1000 bar). Andere Flüssigkeiten verhalten sich ähnlich.

2.2 Lehre vom Spannungszustand

Wir wollen uns mit dem Spannungszustand in einer sich im Gleichgewicht befindenden Flüssigkeit beschäftigen.

Man stellt zunächst fest, dass Kräfte immer Wechselwirkungen zwischen Massen sind. Zieht z. B. eine Masse m_1 eine andere Masse m_2 mit einer Kraft $\boldsymbol{F}$ an, so tritt die Kraft $\boldsymbol{F}$ gleichzeitig auch an m_1 als Wirkung von m_2 auf, und zwar als eine Anziehung in Richtung der Masse m_2. Beide Kräfte sind entgegengesetzt gerichtet (*Newtonsches* Prinzip von Aktion und Reaktion). An einem gegen andere Massen abgegrenzten *System von Massen*, unterscheidet man zwei Arten von Kräften: Die *inneren Kräfte*, die zwischen jeweils zwei zum System gehörenden Massen wirken und daher immer *paarweise entgegengesetzt* auftreten. Die *äußeren Kräfte*, die zwischen jeder Systemmasse und einer sich außerhalb des Systems befindenden Masse wirken und die daher am System nur einmal auftreten. Summiert man alle an den Massen des Systems angreifenden Kräfte, so heben sich die inneren Kräfte immer paarweise aus der Summe heraus, so dass nur die äußeren Kräfte stehen bleiben.

Für das Gleichgewicht des Systems ist es erforderlich, dass an jeder einzelnen Masse die Summe der an ihr angreifenden Kräfte *verschwindet* (Vektorsumme). Summiert man diese über alle Massen des Systems, so verbleibt nur die Summe aller *äußeren Kräfte*. Da jede Einzelsumme wegen des Gleichgewichts verschwindet, *verschwindet* somit auch die *Summe* der *äußeren Kräfte an dem System*. Dieser Satz, der über das Massensystem weiter nichts voraussetzt, als dass es im Gleichgewicht ist, erweist sich für die verschiedensten Anwendungen als höchst wertvoll. Man erhält drei Aussagen:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum F_z = 0,$$

mit den Komponenten F_x, F_y, F_z der äußeren Kräfte in der x-, y- und z-Richtung.

Zu dem vorstehenden Satz gibt es einen völlig analogen Satz für die Drehmomente der äußeren Kräfte. Auch deren Summe muss im Gleichgewicht verschwinden.

Sowohl bei elastisch festen als auch bei flüssigen Körpern interessiert man sich für den *Spannungszustand im Innern des Körpers*. Dieser entsteht durch die inneren Kräfte, die zwischen den kleinsten Teilchen des Körpers wirken. Im Allgemeinen

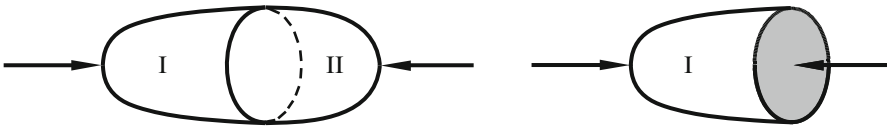


Abb. 1.14 Kräfte auf ein Massensystem

begnügt man sich mit der Angabe über den mittleren Zustand in einem Gebiet, das schon eine sehr große Anzahl von Teilchen enthält. Wird der Körper geschnitten und sei eines der beiden Stücke (I in Abb. 1.14) Teil des Massensystems, dann sind alle Kräfte, die von einem Teilchen des Gebietes II auf eines des Gebietes I ausgeübt werden und die bisher innere Kräfte waren, zu äußeren geworden. Stand der ganze Körper unter einem äußeren Spannungszustand (in Abb. 1.14 ist dieser durch zwei Pfeile angedeutet), so treten auch innere Spannungen auf. Wird der Schnitt in Gedanken ausgeführt, werden durch die Schnittfläche hindurch von den Teilchen rechts vom Schnitt Kräfte auf diejenigen links vom Schnitt ausgeübt. Setzt man alle diese Kräfte zu einer resultierenden Kraft zusammen, so hält diese den an dem Teil I angreifenden Kräften gerade das Gleichgewicht. Dies liefert eine eindeutige Aussage über die Resultierende der Kräfte im Schnitt. Ebenso gut hätte die ganze Überlegung am Teil II durchgeführt werden können. Man hätte dabei eine gleich große, aber entgegengesetzte resultierende Kraft erhalten (genau die Kraft, die von dem Teil I auf den Teil II ausgeübt wird).

Unter *Spannungen* versteht man die *auf die Flächeneinheit bezogenen Kräfte in einem Schnitt*. In obigem Beispiel erhält man die mittlere Spannung in dem Schnitt, wenn man die aus dem Gleichgewicht folgende resultierende Kraft im Schnitt durch den Flächeninhalt des Schnittes dividiert. Man erkennt dabei auch, dass die *Spannung in einer Fläche* ebenso wie die Kraft ein Vektor ist.

Das *Schnittprinzip*, d. h. durch einen gedachten Schnitt aus inneren Kräften äußere zu machen, lässt erweiterte Anwendungen zu. Durch eine Anzahl von Schnittflächen wird aus dem Innern des Körpers, dessen Spannungszustand untersucht wird, ein kleiner Körper (Parallelepiped, Prisma, Tetraeder usw.) herausgegriffen und dessen Gleichgewicht untersucht. Im einfachsten Fall sind alle Kräfte, die an dem Körper ins Gleichgewicht zu setzen sind, Spannungskräfte. Aus dem Gleichgewicht solcher Körper lassen sich verschiedene wichtige Sätze über Spannungszustände herleiten, von denen einer hier als Beispiel mit einem Beweis angeführt wird.

Sind die Spannungsvektoren für drei Schnittflächen gegeben, die miteinander eine Körperecke bilden, so ist damit auch für alle übrigen Schnittflächen der Spannungsvektor bekannt.

Zum Beweis wird die Körperecke mit einer vierten Fläche geschnitten, deren Spannung ermittelt werden soll. Dabei entsteht der in Abb. 1.15 gezeigte Tetraeder. Die Kräfte 1, 2 und 3 erhält man durch Multiplikation der gegebenen Spannungsvektoren mit den Flächeninhalten der zugehörigen Dreiecke. Es gibt nur eine Richtung und Größe der Kraft 4, die der Summe der Kräfte 1, 2 und 3 das Gleichgewicht hält. Diese Kraft, dividiert durch die zugehörige Dreiecksfläche, ist die gesuchte

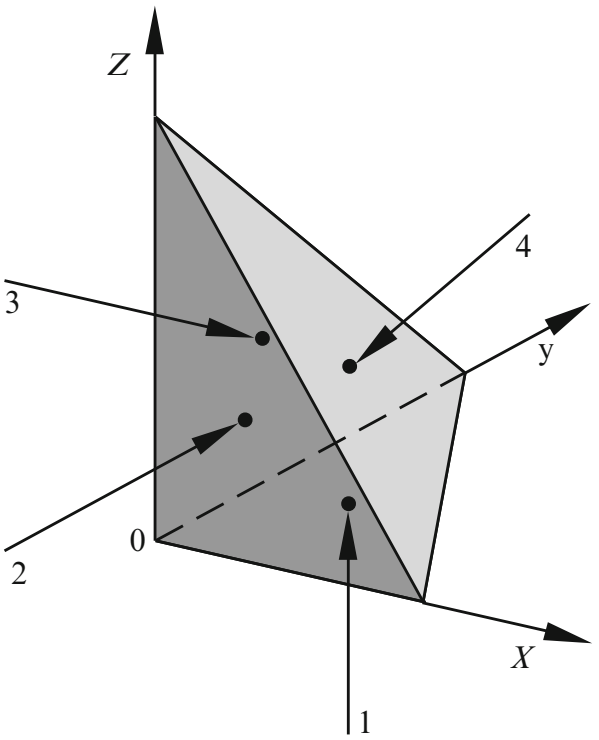


Abb. 1.15 Spannungskräfte an einem Tetraeder

Spannung. Für die Berechnung wählt man als Flächen 1, 2 und 3 zweckmäßig die Koordinatenebenen.

Von der Lehre der Spannungszustände sei nur noch erwähnt, dass der *Spannungszustand*, der die Gesamtheit der Spannungsvektoren in allen möglichen Schnittrichtungen durch einen Punkt darstellt, mit einem Ellipsoid in Verbindung gebracht werden kann. Er ist demnach ein Tensor. Nach dem abgeleiteten Satz ist der Spannungszustand in einem Punkt (und auch sein Ellipsoid) gegeben, wenn die Spannungsvektoren in drei Schnittflächen bekannt sind. Entsprechend den drei Hauptachsen, die jedes Ellipsoid besitzt, sind für jeden Spannungszustand drei aufeinander senkrechte Schnittflächen angebbar, auf denen die zugehörigen Spannungsvektoren senkrecht stehen. Die drei auf diese Weise ausgezeichneten Spannungen heißen *Hauptspannungen*, die zugehörigen Richtungen Hauptrichtungen.

2.3 Der Flüssigkeitsdruck

Der Spannungszustand in einer sich im Gleichgewicht befindenden Flüssigkeit ist besonders einfach. Ein Widerstand gegen Formänderung, also gegen Verschieben der Teilchen gegeneinander, lässt sich mit der Reibung fester Körper vergleichen. Wenn bei zwei sich berührenden festen Körpern Reibungsfreiheit vorliegen soll,

so muss die Kraft jederzeit senkrecht auf der Berührungsfläche der beiden Körper stehen, so dass bei einer Gleitbewegung längs der Berührungsfläche keine Arbeit geleistet wird. Ganz entsprechend zeichnet sich die Abwesenheit eines Widerstandes gegen Formänderung dadurch aus, dass im Innern der Flüssigkeit die *Spannung*, die hier *Druck* genannt wird, *überall senkrecht auf einer Schnittfläche steht*. Man kann diese Eigenschaft, dass der Druck senkrecht auf der zugehörigen Fläche steht als eine *Definition des flüssigen Zustandes* ansehen. Sie ist der in Abschn. 2.1 angegebenen Definition völlig gleichwertig.

Durch eine einfache Gleichgewichtsbetrachtung lässt sich aus dieser Eigenschaft des Flüssigkeitsdruckes sofort eine weitere herleiten. Dazu wird aus der Flüssigkeit ein kleines dreiseitiges Prisma herausgeschnitten. Die Stirnflächen des Prismas stehen dabei senkrecht zu den Prismakanten. Man betrachtet das Gleichgewicht der Kräfte, die von der übrigen Flüssigkeit auf das Prisma ausgeübt werden. Die Druckkräfte auf den Stirnseiten sind gleich groß und entgegengesetzt gerichtet und halten sich deshalb das Gleichgewicht, so dass sie nicht weiter zu beachten sind. Die Kräfte auf den Seitenflächen sind, da sie senkrecht auf den zugehörigen Flächen stehen, in einer zu den Prismakanten senkrechten Ebene enthalten. Abb. 1.16 zeigt eine Stirnansicht des Prismas mit den Kräften sowie das Dreieck, das die Kräfte bilden müssen, damit Gleichgewicht vorliegt. Da die Seiten des Kräftedreiecks auf denen des Prismas senkrecht stehen, haben beide Dreiecke dieselben Winkel und sind daher einander ähnlich. Hieraus folgt, dass die drei Druckkräfte sich wie die zugehörigen Prismenseiten verhalten. Zur Ermittlung der auf die Flächeneinheit bezogenen Drücke, müssen die Druckkräfte durch die jeweilige Prismenfläche dividiert werden. Die Prismenflächen haben alle dieselbe Höhe und stehen deshalb im gleichen Verhältnis zueinander wie ihre Grundlinien und wie die zugehörigen Kräfte. Hieraus folgt, dass der *Druck pro Flächeneinheit*, auf allen drei Prismenflächen gleich groß ist. Da das Prisma beliebig gewählt war, kann man daraus schließen, dass *der Druck an ein und derselben Stelle der Flüssigkeit in allen Richtungen gleich groß ist*. Das Spannungsellipsoid ist in diesem Fall eine Kugel. Zur Beschreibung eines Spannungszustands dieser Art, der auch *hydrostatischer*

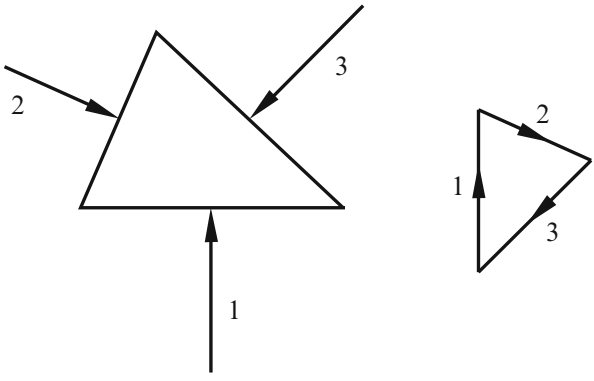


Abb. 1.16 Kräfte auf die Stirnseite eines Prismas und Kräftegleichgewicht

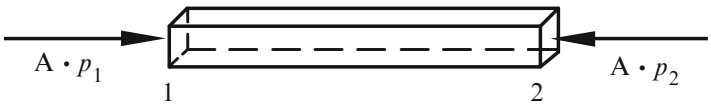


Abb. 1.17 Druckkräfte auf ein längliches Prisma

Spannungszustand genannt wird, genügt die Zahlenangabe des Druckes p. Der Druck p bedeutet die Kraft, die auf eine Flächeneinheit übertragen wird.

Druckverteilung in einer Flüssigkeit ohne Schwerkraft

Jede Flüssigkeit ist schwer. In vielen Fällen, besonders bei hohen Drücken, kann man den Einfluss der Schwerkraft vernachlässigen. Die Überlegungen werden dadurch sehr vereinfacht. Es wird wieder das Kräftegleichgewicht an einem Prisma aufgestellt, das dieses Mal eine längliche Form besitzen soll. Man betrachtet das Gleichgewicht gegen Verschieben längs der Prismenachse. Der Druck variiert von Ort zu Ort. Der Querschnitt des Prismas ist gleich dem Inhalt der auch hier senkrecht zur Prismenachse angenommenen Stirnfläche und wird mit A bezeichnet (siehe Abb. 1.17). Dieser Querschnitt wird so klein vorausgesetzt, dass die Veränderung des Druckes innerhalb A vernachlässigt werden darf. Wenn an dem einen Prismenende der Druck p_1 und an dem anderen p_2 herrscht, so greifen hier die Kräfte $A \cdot p_1$ und $A \cdot p_2$ in entgegengesetzter Richtung parallel zur Prismenachse an. Alle Druckkräfte auf den Seitenflächen des Prismas stehen nach unserer Grundannahme senkrecht auf diesen Flächen und damit auch senkrecht auf der Prismenachse. Sie leisten keinen Beitrag zu den Kraftkomponenten parallel zur Prismenachse, ungeachtet dessen wie der Druck auf ihnen verteilt ist. Das Gleichgewicht verlangt, dass die Kräfte $A \cdot p_1$ und $A \cdot p_2$ in der betrachteten Richtung sich untereinander das Gleichgewicht halten. Es muss gelten:

$$A \cdot p_1 = A \cdot p_2 \qquad \text{oder} \qquad p_1 = p_2.$$

Da die Lage des Prismas willkürlich angenommen war, ist *bei Abwesenheit der Schwerkraft* (und anderer äußerer Kräfte) *der Druck an allen Stellen der Flüssigkeit gleich groß*.

Füllt die Flüssigkeit enge und gewundene Räume aus, so dass es nicht möglich ist zwischen zwei beliebigen Punkten ein Prisma in die Flüssigkeit zu legen, so kann man den Schluss beliebig oft wiederholen. Von einem Punkt 1 ausgehend zu einem Punkt 2, von diesem in einer anderen Richtung zu einem Punkt 3 usw., bis der verlangte Endpunkt n erreicht wird. Aus $p_1 = p_2$, $p_2 = p_3$ usw. folgt dann auch $p_1 = p_n$.

Bei äußerst engen Räumen kann nach einer Änderung des Flüssigkeitsdruckes, z. B. durch äußere Belastung, sehr beträchtliche Zeit vergehen, bis das Gleichgewicht eingetreten ist. Bei plastischem Töpferton (bestehend aus sehr feinen festen Teilchen, deren Zwischenräume mit Wasser angefüllt sind) kann dieser Zeitraum Tage oder, wenn es sich um ganze Tonschichten im Erdboden handelt, Jahre

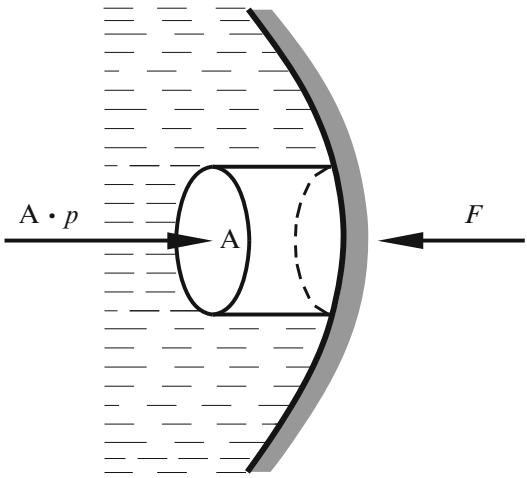


Abb. 1.18 Druckkraft auf die Wand eines Gefäßes

betragen. Während dieser Zeit strömt das Wasser von den Stellen höheren zu denen niedrigeren Druckes (siehe Abschn. 8 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeit), bei gleichzeitigem elastischem Nachgeben des festen Gerüsts.

Zusammenfassend lässt sich festhalten: *Die Druckkraft in einer sich im Gleichgewicht befindenden Flüssigkeit steht überall senkrecht auf der Fläche auf die er wirkt und ist* bei Abwesenheit von Schwerkräften und anderen Massenkräften *überall und in jeder Richtung gleich groß.*

Was für den Druck im Innern der Flüssigkeit gilt, gilt auch für den Druck auf die Wände des Gefäßes, das die Flüssigkeit einschließt. Man kann, um sich das klarzumachen, dicht vor der Wand oder auch in einigem Abstand davor einen ebenen Schnitt durch die Flüssigkeit führen und diesen durch eine Zylinderfläche ergänzen, die senkrecht zu dem Schnitt steht (siehe Abb. 1.18). Das Gleichgewicht des auf diese Weise eingeschlossenen Wasserkörpers liefert die Kraftkomponente $\boldsymbol{F}$, die das Wandstück senkrecht zur Schnittfläche erfährt, also die Kraft $A \cdot p$. Diese Betrachtungsweise hat den Vorteil, dass man sofort erkennt, dass selbst grobe Unebenheiten des Wandstücks an dem Ergebnis nichts ändern. In Abb. 1.18 ist die Kraft $\boldsymbol{F}$ in der Weise angegeben, wie sie von der Wand auf den betrachteten Flüssigkeitskörper ausgeübt wird. Die Druckkraft der Flüssigkeit auf die Wand hat die entgegengesetzte Richtung.

Gleichgewicht einer schweren Flüssigkeit

Die Wirkung des Schwerefeldes auf eine beliebige Masse m besteht darin, dass die Anziehungskraft zum Erdmittelpunkt von der Größe $m \cdot g$ erfährt. g ist dabei die Erdbeschleunigung in unseren Breiten gleich $9.81\,\mathrm{m/s^2}$. Dieser Wert ist nicht ganz genau, da die Erdrotation vernachlässigt wurde. In Wirklichkeit ergibt sich die Schwerkraft aus dem Zusammenwirken der Erdanziehungskraft und der Zentrifugalkraft. Die Lotrichtung schneidet für die Bewohner der nördlichen Halbkugel die Erdachse etwas südlich vom Erdmittelpunkt.

Die Kraft $m \cdot g$ wird als Gewicht der Masse m bezeichnet. Da Flüssigkeitsmengen vielfach nach dem Volumen gemessen werden, wird für die *Masse der Volumeneinheit* die *Dichte* ρ eingeführt. Eine Flüssigkeitsmenge vom Volumen V und der Dichte ρ hat also eine Masse $\rho \cdot V$ und ein *Gewicht* $g \cdot \rho \cdot V$. Das Produkt $g \cdot \rho$ ist somit das Gewicht der Volumeneinheit und wird als spezifisches Gewicht γ bezeichnet. Da die Erdbeschleunigung g nicht an allen Orten dieselbe ist, ist die Größe des spezifischen Gewichts auch von Ort zu Ort veränderlich. Die Dichte hingegen ist von der Stärke der Erdanziehungskraft unabhängig.

Die *Grundaufgabe der Hydrostatik*, d. h. der Lehre vom Gleichgewicht schwerer Flüssigkeiten, ist die *Bestimmung der Druckverteilung in einer homogenen schweren Flüssigkeit*.

Wir betrachten wieder das Gleichgewicht eines in der Flüssigkeit abgegrenzten Prismas gegen Verschieben in der Achsenrichtung und verwenden zunächst das Prisma der Abb. 1.17. Dessen Achse liegt waagerecht, also im rechten Winkel zur Richtung der Erdbeschleunigung. Das Gewicht des Prismas hat demnach keine Komponente in der Achsenrichtung, deshalb lassen sich alle Überlegungen von Abschn. 2.3 wiederholen. Sie liefern auch hier $p_1 = p_2$. Durch Wiederholung der Schlüsse für beliebige aneinandergereihte Prismen mit waagerechter Achse ergibt sich, dass in allen Punkten einer waagerechten Ebene der Druck denselben Wert haben muss.

Eine Beziehung zwischen verschiedenen waagerechten Ebenen erhält man durch Betrachtung des Gleichgewichts eines Prismas oder Zylinders mit senkrechter Achse gegen Verschieben in senkrechter Richtung. Dabei ist das Gewicht des Prismas beim Gleichgewicht der Kräfte zu berücksichtigen. Entsprechend Abb. 1.19

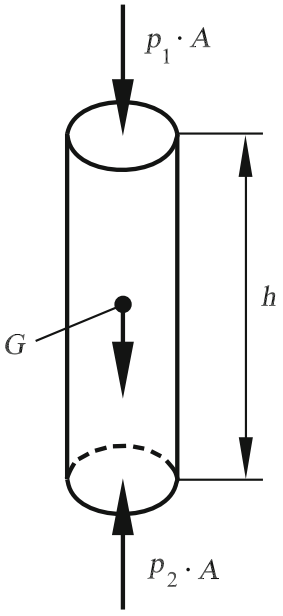


Abb. 1.19
Kräftegleichgewicht am vertikalen Zylinderelement

sind die Druckkraft $p_1 \cdot A$ auf die obere Endfläche und das Gewicht $G = \gamma \cdot V = \gamma \cdot A \cdot h$ abwärts gerichtet. Aufwärts wirkt die Druckkraft $p_2 \cdot A$ auf die untere Endfläche. Das Gleichgewicht erfordert, dass

$$\gamma \cdot A \cdot h + p_1 \cdot A = p_2 \cdot A$$

gelten muss. Daraus folgt:

$$p_2 - p_1 = \gamma \cdot h. \tag{1.1}$$

Der Druckunterschied zwischen den Stellen 1 und 2 ist gleich dem Gewicht der dazwischen liegenden senkrechten Flüssigkeitssäule vom Querschnitt 1. Eine wiederholte Anwendung dieser Überlegung liefert folgendes Ergebnis: *Der Druck nimmt in Richtung der Erdbeschleunigung derart zu, dass er für jede Längeneinheit um den Betrag γ steigt. In jeder waagerechten Ebene ist er konstant.*

Führt man ein x, y, z-Koordinaten-System ein, dessen z-Achse senkrecht nach oben in entgegengesetzter Richtung zur Erdbeschleunigung weist und ist p_0 der Druck in der Horizontalebene $z = 0$, so ist der Druck p an einer beliebigen Stelle gegeben durch

$$p = p_0 - \gamma \cdot z. \tag{1.2}$$

Diese Beziehung gilt auch in großen, von der Flüssigkeit erfüllten Räumen, in kommunizierenden Gefäßen oder beliebigen Röhrensystemen, in den Zwischenräumen einer Kies- oder Sandmasse usw.. Voraussetzung ist nur eine *homogene* in sich zusammenhängende ruhende Flüssigkeit.

Die Kraft, die ein in einer Flüssigkeit untergetauchter Körper durch die Flüssigkeitsdrücke erfährt, erhält man mit folgender Überlegung: Man denkt sich zunächst den Körper durch Flüssigkeit ersetzt. Das neue Flüssigkeitsteil besitzt die gleiche Gestalt wie der Körper und hat dasselbe spezifische Gewicht wie die übrige Flüssigkeit. Er wird von den Druckkräften auf seiner Oberfläche im Gleichgewicht gehalten. Die Resultierende der Druckkräfte muss senkrecht nach oben gerichtet sein und durch den Schwerpunkt des neuen Flüssigkeitsteils gehen. Die Größe dieser resultierenden Kraft, die auch Auftriebskraft genannt wird, ist gleich dem Produkt des verdrängten Volumens V und dem spezifischen Gewicht γ der Flüssigkeit. Dieser schon von *Archimedes* gefundene Satz lautet: *Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper verliert so viel von seinem Gewicht, wie die von ihm verdrängte Flüssigkeit wiegt*. Die Wägung eines Körpers im eingetauchten Zustand und in Luft, in der er ebenfalls einen kleinen Auftrieb erfährt, ergibt eine Gewichtsminderung um $G_{\text{Fl.}} - G_{\text{Luft}} = V \cdot (\gamma_{\text{Fl.}} - \gamma_{\text{Luft}})$. spezifischen Gewichten $\gamma_{\text{Fl.}}$ oder bei bekanntem Volumen V ermittelt werden. γ_{Luft} kann gemäß den Ausführungen in Abschn. 2.5 berechnet werden.

Handelt es sich um eine *inhomogene* Flüssigkeit (an unterschiedlichen Orten verschieden temperierte Flüssigkeit, Salzlösung mit unterschiedlichem Salzgehalt an verschiedenen Stellen usw.), so lassen sich zunächst die Überlegungen mit dem

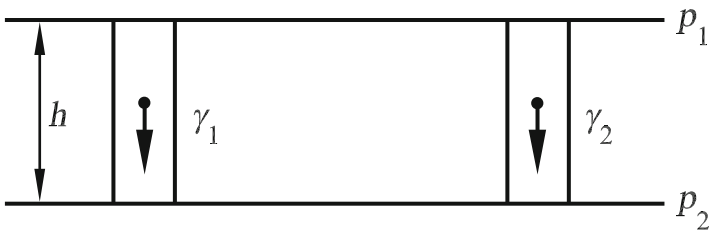


Abb. 1.20 Kräftegleichgewicht an zwei waagerecht verschobenen Zylinderelementen

Prisma mit waagerechter Achse ohne jede Änderung übertragen. Es ergibt sich auch hier in jeder waagerechten Ebene derselbe Druck. Es werden zwei solche waagerechten Ebenen mit dem (nicht zu großen) Abstand h herausgegriffen (siehe Abb. 1.20), von denen die obere unter dem Druck p_1, die untere unter dem Druck p_2 steht. Man betrachtet zwei senkrechte Prismen von der Höhe h und dem mittleren spezifischen Gewicht γ_1 beim linken und γ_2 beim rechten Prisma.

Das Gleichgewicht der Kräfte verlangt, dass links $p_2 - p_1 = \gamma_1 \cdot h$ und rechts $p_2 - p_1 = \gamma_2 \cdot h$ gilt. Das ist aber nur möglich, wenn $\gamma_1 = \gamma_2$ ist. Anders käme kein Gleichgewicht zustande und die Flüssigkeit würde sich in Bewegung setzen. Man kann die Betrachtung verfeinern, indem man die Höhe h sehr klein wählt und die Überlegung für beliebig viele Paare von benachbarten Horizontalebenen wiederholt. Man erhält das Ergebnis: *In einer homogenen schweren Flüssigkeit ist Gleichgewicht nur möglich, wenn in jeder waagerechten Schicht die Dichte konstant ist*. In diesem Resultat ist gleich die Antwort auf die Frage nach dem Gleichgewicht zweier übereinander geschichteten, sich nicht mischenden Flüssigkeiten verschiedener Dichte enthalten. Deren Gleichgewicht erfordert, dass die Trennfläche eine horizontale Fläche sein muss. Man kann die Betrachtung von Abb. 1.20 auch unmittelbar auf zwei übereinander geschichtete homogene Flüssigkeiten anwenden, deren Trennfläche in zunächst unbekannter Weise zwischen den beiden Horizontalebenen verläuft, und kommt so zum selben Ergebnis.

Bezüglich der *Stabilität* einer solchen Flüssigkeitsschichtung ist noch zu bemerken, dass sich immer die Flüssigkeit mit der geringeren Dichte über der dichteren befinden muss. Die umgekehrte Schichtung ist instabil. Die geringste Störung bringt sie in Bewegung.

Den Beweis hierfür kann man wieder an die Betrachtung von Abb. 1.20 knüpfen. Man nimmt eine gestörte, also z. B. etwas geneigte Trennschicht zwischen den beiden Horizontalebenen an und berechnet die dabei auftretenden Druckunterschiede an der Trennschicht. Im stabilen Fall versuchen diese die Neigung der Trennschicht zu verkleinern, im instabilen Fall zu vergrößern.

Für stetig veränderliche Dichte gilt Entsprechendes. Stabilität liegt vor, wenn die Dichte überall nach oben abnimmt. Im Gegensatz zu der stabil geschichteten inhomogenen Flüssigkeit, stellt die homogene Flüssigkeit den Fall des indifferenten Gleichgewichts dar. Bei ihr können beliebige Teile willkürlich verschoben werden, ohne dass dadurch irgendwelche Kräfte entstehen, die das Gleichgewicht stören.

Bezüglich der Druckverteilung in der inhomogenen Flüssigkeit gilt für jede Schicht, in der die Dichte noch genügend homogen ist, die Gl. (1.1) in der differentiellen Form:

$$\mathrm{d}p = -\gamma \cdot \mathrm{d}z. \tag{1.3}$$

Ist γ als Funktion der Höhe z gegeben, so führt die Integration zu der Beziehung:

$$p = p_0 - \int_0^z \gamma \cdot \mathrm{d}z. \tag{1.4}$$

2.4 Eigenschaften der Gase

Gase unterscheiden sich von Flüssigkeiten dadurch, dass sie sich bei entsprechend großen Drücken auf einen sehr kleinen Raum zusammendrücken lassen. Sie füllen wenn ihnen mehr Raum als im Ausgangszustand angeboten wird, diesen immer gleichförmig aus, wobei ihr Druck entsprechend abnimmt. Im Übrigen ist ihr Verhalten dem der Flüssigkeiten sehr ähnlich, da auch bei ihnen im Ruhezustand jeder Widerstand gegen Formänderung verschwindet und sich bei inneren Verschiebungen ebenfalls eine Zähigkeit bemerkbar macht. Solange keine Volumenänderungen auftreten, unterscheidet sich das Verhalten eines Gases qualitativ in nichts von dem einer Flüssigkeit das, ohne eine freie Oberfläche zu haben, denselben Raum ausfüllt.

Das wichtigste Gas ist die Luft der Atmosphäre. Die anderen Gase zeigen im Wesentlichen dasselbe Verhalten. Wie später noch ausführlicher besprochen wird, steht die Luft am Erdboden unter einem näherungsweise konstanten Druck der rund 1 bar bzw. $10^5\,\mathrm{N/m^2}$ beträgt. In höheren Lagen ist der Luftdruck geringer (vgl. Abschn. 2.5).

Zur Messung des Luftdrucks (Gasdrucks) dienen verschiedene Geräte. Soweit sie Druckunterschiede anzeigen bezeichnet man sie als *Manometer*. Zeigen sie absolute Drücke des sie umgebenden Gases an, heißen sie *Barometer*. Für beide Messungen lassen sich Flüssigkeitssäulen verwenden (vgl. Abschn. 2.6). Aber auch Geräte, bei denen der zu messende Druck auf eine Feder wirkt, werden häufig genutzt. Um den absoluten Druck der Luft zu messen, kann man z. B. eine Metalldose, die luftleer gepumpt ist, mit einem nachgiebigen Deckel so mit einer starken Feder verbinden, dass diese durch ihre Spannung den Deckel gegen das Eindrücken durch den äußeren Luftdruck stützt. Wird dieses Gerät an einen Ort anderen Luftdrucks gebracht, so kann über den Ausschlag des Zeigers die Druckänderung abgelesen werden (Aneroidbarometer).

Das Gesetz, nach dem sich bei gegebenen Änderungen des Volumens der Druck des Gases ändert, ist zuerst von *R. Boyle* 1662 und dann noch einmal unabhängig von *E. Mariotte* 1676 entdeckt worden. Man nennt es daher *Boyle-Mariottesches* Gesetz. Nach ihm verhalten sich (bei gleicher Temperatur) die Drücke umgekehrt wie die Volumina. Wird also eine Gasmenge auf die Hälfte ihres Volumens

zusammengepresst, so verdoppelt sich ihr Druck. Wird ihr das doppelte Volumen angeboten, so sinkt der Druck auf die Hälfte. Man kann dieses Gesetz durch die Gleichung

$$p \cdot V = p_1 \cdot V_1 \tag{1.5}$$

ausdrücken. p_1 bedeutet den Ausgangsdruck, V_1 das Ausgangsvolumen und p und V zwei beliebige, aber zum gleichen Zustand gehörende Werte dieser Größen.

Das Volumen eines Gases ändert sich auch sehr stark mit der Temperatur. *L. J. Gay-Lussac* fand 1802, dass die Ausdehnung eines Gases bei einer Temperaturänderung von 1 °C bei konstant gehaltenem Druck, immer 1/273.2 des Volumens bei 0 °C ist. Dieses gilt in guter Näherung für alle Gase und Temperaturen. Man kann dieses Verhalten durch die Gleichung

$$V = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta) \tag{1.6}$$

ausdrücken, wobei V_0 das Volumen bei 0 °C, ϑ die Temperatur in $°C$ und $\alpha = 1/273.2\,°\text{C}$ der *Ausdehnungskoeffizient* ist. Dieser Wert für α gilt bei mäßigen Drücken nicht nur für Luft, sondern auch in guter Näherung für die übrigen Gase, wie Wasserdampf, Helium usw.

Da Gl. (1.6) unabhängig von dem jeweiligen Druck gilt, lässt sie sich mit Gl. (1.5) verbinden. Man erhält damit die für alle Drücke und Temperaturen verwendbare Gleichung:

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)\,. \tag{1.7}$$

Hierin bedeutet p_0 einen beliebigen, aber festgehaltenen Ausgangsdruck und V_0 das Volumen beim Ausgangsdruck p_0 und bei 0 °C. Für die Gl. (1.7) findet man vielfach den Namen *Mariotte-Gay-Lussacsches* Gesetz. Man bezeichnet sie auch als *Zustandsgleichung*, da sie die drei Zustandsgrößen Druck, Volumen und Temperatur miteinander verknüpft. Man nennt sie *Zustandsgleichung der idealen Gase*, weil die realen Gase gewisse Abweichungen von ihr zeigen. Diese Abweichungen sind bei Gasen gewöhnlicher Dichte vernachlässigbar klein. Sie spielen aber eine große Rolle, wenn die Gase stark verdichtet werden und besonders, wenn die Temperatur so stark erniedrigt wird, dass die Verflüssigung des Gases einsetzt.

Diese Abweichungen werden in der Thermodynamik ausführlich behandelt. Hier wird nur eine der Abweichungen kurz besprochen. Nach Gl. (1.5) wird bei sehr großen Drücken das Gasvolumen sehr klein. Man kann mit Gl. (1.7) ausrechnen, bei welchem Druck die Dichte des Wassers bzw. bei welchem Druck die des Goldes usw. erreicht wird. Dies ist aber unmöglich. Es gibt ein Grenzvolumen, über das hinaus das Gas durch keinen noch so hohen Druck zusammengedrückt werden kann, d. h. bei dem die Moleküle die dichtest mögliche Strukturierung erreicht haben. Man kann diesem Umstand durch eine Abänderung von Gl. (1.7) Rechnung tragen, indem man schreibt:

$$p \cdot \left(V - V'\right) = p_0 \cdot \left(V_0 - V'\right) \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)\,,$$

mit dem kleinen Grenzvolumen V'. Für jedes endliche p ist V etwas größer als V'. Für Volumina V, die groß gegen V' sind, unterscheiden sich die Ergebnisse dieser Gleichung praktisch nicht von denen der Gl. (1.5) bzw. (1.7).

Bei der Verdichtung eines Gases wird Wärme erzeugt. Das *Boyle-Mariottesche* Gesetz, das nur für gleich bleibende Temperatur gültig ist, kann nur dann beobachtet werden, wenn das Gas während oder nach der Verdichtung (Kompression) genügend Zeit hat, um die erzeugte Wärme abzugeben und wieder die Temperatur der Umgebung anzunehmen. Das Gleiche gilt für die bei der Ausdehnung (Expansion) auftretende Abkühlung. Lässt man dem Gas keine Zeit, seine Temperaturunterschiede auszugleichen, so muss bei der Verdichtung der Druck in stärkerem Verhältnis zum Ausgangsdruck anwachsen, als das Verhältnis der Volumina abnimmt. Die Thermodynamik lehrt, dass in dem Fall, wenn kein Austausch der erzeugten Wärme stattfindet, d. h. bei extrem rascher Verdichtung und Verdünnung, an Stelle von Gl. (1.5) die Gleichung

$$p \cdot V^{\kappa} = p_1 \cdot V_1^{\kappa} \tag{1.8}$$

tritt, wobei $\kappa = c_p/c_v$ gleich dem Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck zu der bei konstantem Volumen ist. Für trockene Luft ist $\kappa = 1.4$. Eine Kompression oder Expansion nach dem Gesetz der Gl. (1.8) nennt man im Gegensatz zu der *isothermen* Zustandsänderung nach Gl. (1.5), eine *adiabate* Kompression oder Expansion. Mit der adiabaten Verdichtung ist eine Erwärmung verbunden, die sich aus den Gl. (1.7) und (1.8) berechnen lässt. Mit der Ausdehnung ist eine entsprechende Abkühlung verbunden.

Das in diesem Kapitel geschilderte Verhalten eines Gases lässt sich durch die Annahme der Gaskinetik erklären, dass sich die Moleküle des Gases mit großer Geschwindigkeit unter gegenseitigen Stößen und Stößen gegen die Wand bewegen. Der Druck ist die Summenwirkung dieser Stöße. Die Temperatur ist gleichbedeutend mit der kinetischen Energie der Teilchen. Diese nimmt bei der Verdichtung zu, da die Geschwindigkeit der Teilchen bei der elastischen Reflexion an der ihnen entgegenrückenden Wand erhöht wird.

2.5 Gasdruck

Die Bedingungen für das Gleichgewicht einer schweren Gasmasse stimmen mit denen für das Gleichgewicht einer schweren Flüssigkeit überein. Die Gesetzmäßigkeiten des vorigen Kapitels können daher auch hier übernommen werden. In vielen Fällen, z. B. bei mäßiger Höhenausdehnung einer Gasmasse, kann das spezifische Gewicht der Gasmasse als räumlich konstant angesehen werden. Dann lassen sich Gl. (1.1) und (1.2) des vorigen Kapitels anwenden, d. h. das Gas darf wie eine homogene Flüssigkeit betrachtet werden. Bei großer Höhenausdehnung (z. B. im

Bereich von Kilometern) ist dies aber nicht mehr zulässig. Die Druckunterschiede sind hier so groß, dass sich infolge der Kompressibilität des Gases oben und unten verschiedene Dichten ergeben. Auch Temperaturunterschiede spielen vielfach eine Rolle. Hier muss mit der Gleichung für inhomogene Flüssigkeiten gerechnet werden. Es wird die Gl. (1.3) durch γ dividiert und integriert. Man erhält:

$$\int_{p}^{p_0} \frac{\mathrm{d}p}{\gamma} = z. \tag{1.9}$$

Dieses Integral ergibt je nach dem wie die Temperatur von der Höhe abhängt, ein unterschiedliches Ergebnis. Als wichtigstes Beispiel sei der Fall *konstanter Temperatur* behandelt. Das spezifische Gewicht γ ist gemäß dem *Boyle-Mariotteschen* Gesetz ($p \cdot V = \text{konst.}$) dem Druck direkt proportional

$$\gamma = \gamma_0 \cdot \frac{p}{p_0}. \tag{1.10}$$

Damit wird:

$$\int_{p}^{p_0} \frac{\mathrm{d}p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma_0} \cdot \int_{p}^{p_0} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{p_0}{\gamma_0} \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right), \tag{1.11}$$

p_0/γ_0 ist dabei, wie aus Gl. (1.1) zu entnehmen ist, die Höhe einer Gassäule mit dem konstanten spezifischen Gewicht γ_0, an deren unterem Ende der Druck p_0 und an deren oberem Ende der Druck Null herrscht. Man nennt diese Höhe die *Höhe der gleichförmigen Atmosphäre*. In Bezug auf die reale Atmosphäre stellt sie nichts weiter als eine Rechengröße dar.

Sie soll als Beispiel zahlenmäßig ermittelt werden. Dazu benötigt man den Wert für γ_0. Zur Bestimmung von γ_0 kann man wie folgt vorgehen: Man wiegt ein mit einem Hahn versehenes Gefäß, das vorher luftleer gepumpt ist. Danach öffnet man den Hahn und wartet den Temperaturausgleich ab, da die Luft im Gefäß zunächst durch die Arbeitsleistung der äußeren Atmosphäre beim Einströmen in das Gefäß erwärmt wird. Anschließend wiegt man das Gefäß ein zweites Mal. Da es vorher leer war und jetzt mit Luft gefüllt ist, ist es um das Gewicht G seines Luftinhalts schwerer geworden. Ermittelt man noch den Volumeninhalt V des Gefäßes indem man es z. B. noch einmal luftleer pumpt, den Hahn dann unter Wasser öffnet und das mit Wasser gefüllte Gefäß erneut wiegt. Es ergibt sich aus den gemessenen Größen das zu dem Druck p_0 am Boden gehörige $\gamma_0 = G/V$. Für jeden anderen Bodendruck p_0 kann γ_0 proportional umgerechnet werden. Unter der Annahme, dass p_0 gleich 1 bar ist, erhält man für mittelfeuchte Luft der Temperatur ϑ nach dem Gay-Lussacschen Gesetz

$$\gamma = \frac{12.45}{1 + \alpha \cdot \vartheta}\ \mathrm{N/m^3}. \tag{1.12}$$

In der Dynamik wird als Maß der Massenträgheit die Dichte $\rho = \gamma/g$ verwendet. Bei Zimmertemperatur kann man für γ einen Mittelwert von $11.8\,\mathrm{N/m^3}$ wählen. Es ergibt sich dann mit $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ für ρ der Mittelwert von $1.20\,\mathrm{Ns^2/\,m^4}$.

Um in Gl. (1.11) p_0/γ_0 zu berechnen, muss p_0 im gleichen Maßsystem wie γ_0 ausgedrückt werden. Mit $1\ bar = 10^5\,\mathrm{N/m^2}$, erhält man

$$\frac{p_0}{\gamma_0} = \frac{100000}{12.45} \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta) = 8030 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)\,.$$

Die Einheit von p_0/γ_0 ist m. Die Höhe der gleichförmigen Atmosphäre für mittelfeuchte Luft beträgt (unabhängig vom Druck, aber abhängig von der Temperatur) $8030 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)\ m$. Man setzt sie gleich H_0. Die Gl. (1.9) in zwei verschiedenen Höhen angewendet ergibt:

$$z_1 = H_0 \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right), \qquad z_2 = H_0 \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p_2}\right).$$

Hieraus folgt:

$$z_1 - z_2 = H_0 \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right). \tag{1.13}$$

Dieses ist die so genannte *barometrische Höhenformel*. Durch Umkehrung von Gl. (1.13) erhält man die Abhängigkeit des Druckes von der Höhe:

$$p = p_1 \cdot e^{-\frac{z-z_1}{H_0}}. \tag{1.14}$$

Eine Gleichgewichtsbetrachtung der Kräfte analog der in Abb. 1.19 zeigt, dass das Gewicht einer Luftsäule mit der Grundfläche A, die sich von der Stelle z nach oben bis an die Grenze der Atmosphäre erstreckt, gleich $A \cdot p$ ist. p ist demnach unmittelbar gleich dem Gewicht der über der Stelle z befindlichen Luftsäule vom Querschnitt 1. Abb. 1.21 stellt Gl. (1.14) graphisch dar. Der Druck nimmt mit wachsender Höhe kontinuierlich, aber immer schwächer ab. Er wird für unendlich große Höhe gleich Null. Die Druckabnahme mit der Höhe lässt sich in der freien Atmosphäre mit einem Druckmessgerät (Barometer) auf einem Turm oder Berg messen. Auch in einem mehrstöckigen Haus ist sie nachweisbar. Man kann die beobachteten Druckunterschiede, wenn die Lufttemperaturen ebenfalls gemessen werden, zu einer Bestimmung der Höhenunterschiede verwenden. Bei Luftfahrzeugen wird diese Methode zur Höhenbestimmung eingesetzt. Ist die Höhendifferenz bekannt, lässt sich mit dieser Methode auch das mittlere spezifische Gewicht der dazwischenliegenden Luftschicht ermitteln.

Ist die Temperatur in der Luftmasse nicht konstant, kann die Höhengleichung immer noch für Höhenabschnitte angewendet werden, in denen die Temperaturunterschiede nicht sehr groß sind. Die zu jedem Höhenabschnitt gehörige Höhe H_0 wird dann für den Mittelwert der Temperatur in diesem Abschnitt berechnet.

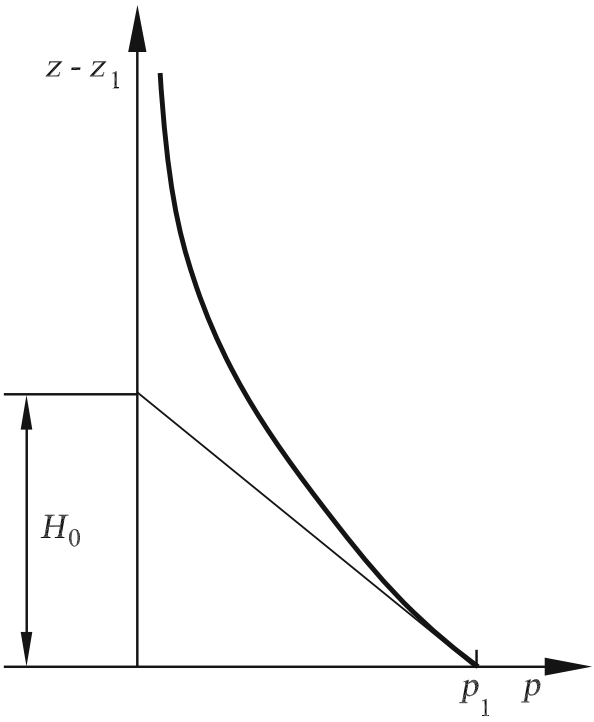


Abb. 1.21 Druckverteilung in einer Atmosphäre konstanter Temperatur

Schließlich muss noch die Frage beantwortet werden, wann das Gleichgewicht einer geschichteten Gasmasse *stabil* und wann es *instabil* ist. Die Bedingung, dass das spezifische Gewicht der oberen Schichten geringer ist als das der unteren, reicht nicht aus, weil sich bei einer Auf- oder Abwärtsbewegung einer Gasmasse der Druck und damit auch die Dichte der Gasmasse ändert. Die richtige Antwort auf die Frage ist die Folgende: Stabilität liegt vor, wenn ein Gasteil in größerer Höhe unter dem neuen Druck dichter ist als seine neue Umgebung bzw. wenn ein Gasteil in geringerer Höhe unter dem neuen Druck eine geringere Dichte besitzt als seine neue Umgebung. In diesen Fällen wird das Gasteil nach seiner alten Lage zurückstreben. Es gibt eine Schichtung (Temperaturverteilung) in einer Gasmasse, die in diesem Sinne einer homogenen Flüssigkeit entspricht, die also ein indifferentes Gleichgewicht der Gasmasse bedeutet. Hierfür muss jedes Gasteil, das an einer beliebigen Stelle entnommen wird, nach der Verschiebung die gleiche Dichte wie die neue Umgebung besitzen, so als ob es ihr schon immer angehört hätte. Ein Gasteil verhält sich bei einer Druckänderung adiabat, solange ihm die Möglichkeit zum Wärmeaustausch fehlt. Ist die Schichtung derart, dass Druck und Dichte in jeder Höhe die adiabate Zustandsgleichung (1.8) erfüllen (d. h. ist p proportional zu γ^{κ}), so gelangt jedes gehobene oder gesenkte Gasteil immer in eine Umgebung mit der Temperatur, die es durch seine eigene adiabate Zustandsänderung selbst besitzt. Damit hat es keine Möglichkeit, Wärme mit der Umgebung auszutauschen. Man kann zeigen, dass diese *adiabate Schichtung* mit einer homogenen Flüssigkeit auch

gemein hat, dass sie durch kräftige Durchmischung aus einer ursprünglich anders gearteten Schichtung entsteht, wie z. B. eine ursprünglich inhomogene geschichtete Salzlösung durch Umrühren homogen gemacht werden kann.

In der Luft der Atmosphäre ist die adiabate Schichtung dadurch gekennzeichnet, dass die Temperatur bei einer Höhenzunahme von ca. 100 m um 1 °C abnimmt. Eine geringere Temperaturabnahme bedeutet bereits Stabilität, eine Temperaturzunahme mit der Höhe eine noch stärkere Stabilität. Eine größere Temperaturabnahme als 1 °C je 100 m Höhenzunahme kommt in der freien Atmosphäre im Allgemeinen nicht vor, da sie instabilen Zuständen entsprechen würde. Man findet sie allerdings in der Nähe des Erdbodens, wenn dieser heißer ist als die Luft. Die Luft ist dann allerdings nicht im Gleichgewicht, sondern sie ist von vertikalen auf- und absteigenden Strömungen durchsetzt.

Der Druckverlauf in der adiabat geschichteten Atmosphäre lässt sich mit Gl. (1.9) ebenfalls berechnen, indem $\gamma = \gamma_0 \cdot (p/p_0)^{1/\kappa}$ gesetzt wird. Die Integration ergibt:

$$z = \frac{\kappa \cdot H_0}{\kappa - 1} \cdot \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right) \quad \text{bzw.} \quad p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{z}{H_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

Die Zustandsgleichung $p/\rho = R \cdot T$, mit der Dichte $\rho = \gamma/g$, der absoluten Temperatur $T = (273.2 + \vartheta/1\ °C)\,\mathrm{K}$ und der Gaskonstanten R ergibt mit $p_0/\gamma_0 = H_0$:

$$\frac{R \cdot T}{g} = \frac{p}{\gamma} = H_0 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot z \qquad \text{unddamit} \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}T} = -H_0 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{R}{g}.$$

Für mittelfeuchte Luft ist $R/g = 29.4\,\mathrm{m/K}$ und $\mathrm{d}z/\mathrm{d}T = -102\,\mathrm{m/K}$.

Ersetzt man in den obigen Gleichungen κ durch eine andere Zahl n, so gewinnt man eine Interpolationsformel, mit der sich wirklich vorkommende Schichtungszustände der Atmosphäre beschreiben lassen. Man nennt solche Schichtungen *polytrop*. Für stabile Schichtungen gilt immer $n < \kappa$.

2.6 Wechselwirkung von Gasdruck und Flüssigkeitsdruck

Den Druckunterschied zwischen der Luft in einem Gefäß und der äußeren atmosphärischen Luft kann man, solange er nicht zu groß ist, mit einem U-Rohrmanometer messen (vgl. Abb. 1.22). Sieht man von dem Eigengewicht der Luft ab, so ergeben sich dabei die folgenden Beziehungen. An der Stelle A ist der Flüssigkeitsdruck gleich dem Luftdruck p_1 im Gefäß. In dem anderen Schenkel des U-Rohres ist in gleicher Höhe B derselbe Druck vorhanden (kommunizierende Gefäße). Der freie Flüssigkeitsspiegel in diesem Schenkel sei bei C. Dort ist der Flüssigkeitsdruck gleich dem Druck p_0 der Atmosphäre. Nach den Beziehungen von Abschn. 2.3 ist

$$p_1 = p_0 + \gamma \cdot h,$$

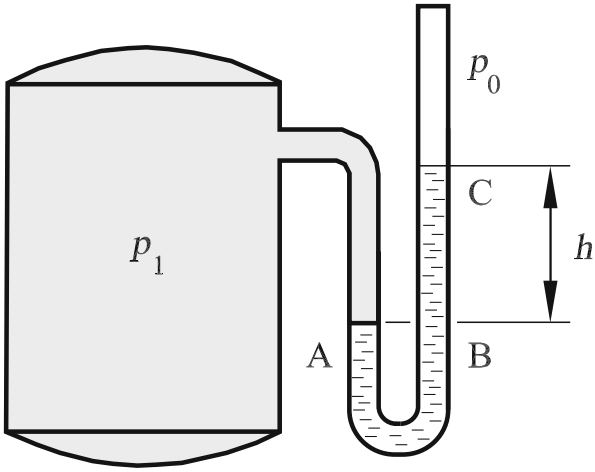


Abb. 1.22 Hydrostatische Druckmessung (U-Rohr Manometer)

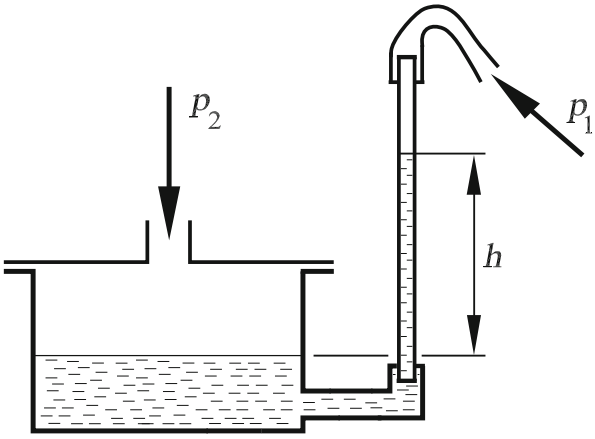


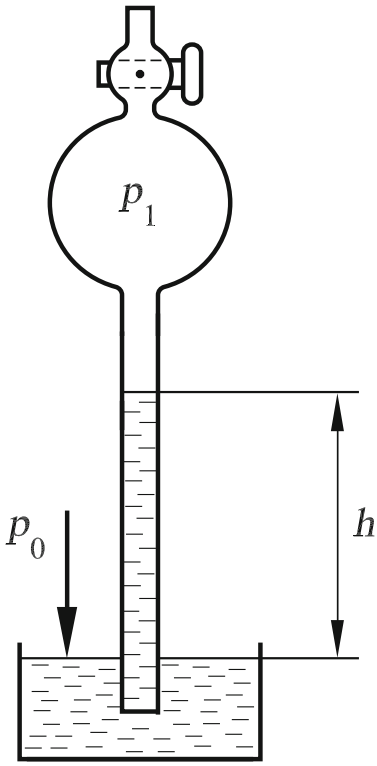
Abb. 1.23 Flüssigkeitsmanometer

wenn man die Höhe $\overline{\mathrm{BC}}$ gleich h setzt. Ein mit Flüssigkeit gefülltes U-Rohr ist somit zum Messen solcher Druckunterschiede geeignet. Es wird in verschiedenen Abänderungen angewendet. Um nicht an zwei Stellen (A und C in Abb. 1.22) Flüssigkeitshöhen ablesen zu müssen, gestaltet man häufig den einen Schenkel zu einem großen Topf um, in dem die Spiegelbewegung sehr klein wird (siehe Abb. 1.23). Zur Nullablesung muss man beide Öffnungen mit der Atmosphäre verbinden. Für sehr kleine Druckunterschiede wird eine verfeinerte Höhenablesung verwendet, z. B. mit einem verschiebbaren Mikroskop, oder mit einer vergrößernden Projektion einer auf dem Flüssigkeitsspiegel schwimmenden Skala nach *A. Betz*.

Die Verwendung der Flüssigkeitsmanometer hat zu einer besonderen Art von Druckeinheiten geführt, bei denen der Druck durch die Höhe einer Flüssigkeitssäule angegeben wird. So ist z. B. 1 mm WS (Wassersäule) gleich $1\,\mathrm{kp/m^2} = 9{,}81\,\mathrm{Pa}$.

Wasser ist als Messflüssigkeit nicht sehr gut geeignet, da es die Wände der Glasrohre unregelmäßig benetzt. Sehr viel besser geeignet sind alle fettlösen-

Abb. 1.24 Barometer



den Flüssigkeiten (Alkohol, Toluol, Xylol usw.). Für größere Druckunterschiede empfiehlt sich Quecksilber, das in reinem Zustand eine sehr genaue Einstellung in einem nicht zu engen Glasrohr ermöglicht. Wegen des spezifischen Gewichts von $133370\,\mathrm{N/m^3}$ bei $0\,^\circ\mathrm{C}$ ist $1\,\mathrm{mm\,QS}$ (Quecksilbersäule) gleich $13.6\,\mathrm{kp/m^2} = 133.4\,\mathrm{Pa}$. Die Druckeinheit $1\,\mathrm{mm\,QS}$ wird auch 1 *Torr* genannt (zu Ehren von *E. Torricelli*). In neuerer Zeit benutzt man Membran-Druckmesser mit digitaler Messdatenspeicherung bzw. Piezo- Druckaufnehmer, die den piezoelektrischen Effekt zur Druckmessung ausnutzen.

Pumpt man aus dem Gefäß von Abb. 1.22 etwas Luft heraus, so dass der Druck dort kleiner wird als der äußere Atmosphärendruck, so wird die Flüssigkeit in dem Schenkel A des U-Rohres höher stehen als in dem Schenkel B. Eine etwas abgeänderte Anordnung für das gleiche Experiment zeigt Abb. 1.23. Man spricht in dem Fall der Abb. 1.22 von einem *Überdruckmanometer* und im Fall der Abb. 1.23 von einem *Unterdruckmanometer*. Die Druckmessung erfolgt über die Höhe h.

Eine historische Betrachtung ist im Folgenden angefügt. Es stellt sich die Frage, wie hoch man eine Flüssigkeit in die Höhe saugen kann. Im Mittelalter erklärte man das Ansteigen einer Flüssigkeitssäule beim Saugen mit dem Begriff „horror vacui“, der „Scheu vor dem Leeren“. Ob der horror vacui beliebig stark war oder Grenzen hatte, darüber wurden keine Untersuchungen angestellt. Das

Missgeschick von Florentiner Pumpenmachern, die bei einer Wasserpumpe das Saugventil mehr als 10 m über dem Wasserspiegel anbrachten und dann trotz aller Mühe das Wasser nicht so hoch pumpen konnten, gab den Anstoß, dass sich *G. Galilei* mit der Frage beschäftigte. Indessen hat erst sein Schüler *E. Torricelli* aufgrund eines Experiments mit Quecksilber, das auf seine Anregung hin sein Freund *V. Viviani* 1643 gemacht hatte, den richtigen Sachverhalt erkannt. Von unserem Standpunkt aus ist die Antwort auf die oben gestellte Frage nicht schwer. Saugen ist nichts anderes, wie schwächer zu drücken, als die äußere Atmosphäre drückt. Der Druck in dem Gefäß von Abb. 1.24 ist am geringsten, wenn man die gesamte Luft aus dem Gefäß abpumpt. Er ist dann gleich Null. Die Flüssigkeitssäule kann also höchstens so hoch steigen, dass ihre Höhe h dem Luftdruck p_0 entspricht ($h = p_0/\gamma$). Das erwähnte Experiment *V. Vivianis* bestand darin, dass er eine zwei Ellen (120 cm) lange Glasröhre mit einer an dem einen Ende angeblasenen Kugel von dem anderen, offenen Ende her vollständig mit Quecksilber füllte und dieses Ende mit dem Finger verschloss. Anschließend drehte er die Röhre um und brachte sie mit dem verschlossenen Ende in ein flaches mit Quecksilber gefülltes Gefäß. Dann zog er den Finger weg. Die Quecksilbersäule sank bis auf eine Höhe von 1 1/4 $Elle$ (75 cm) über den Quecksilberspiegel und ließ einen leeren Raum zurück. *E. Torricelli* schloss daraus richtig, dass die so beobachtete Quecksilbersäule dem äußeren Luftdruck das Gleichgewicht hält. Er beobachtete, dass die Quecksilbersäule nicht immer dieselbe Höhe hatte und schloss daraus, dass der Luftdruck gewissen Schwankungen unterworfen ist. Diese Tatsache ist heute für die Meteorologie von großer Bedeutung. *E. Torricelli* schloss bereits, dass der Luftdruck auf einem Berg geringer sein muss als im Tal und dass deshalb die Höhe der Quecksilbersäule auf dem Gipfel geringer ist als unten. Den Nachweis dafür hat einige Jahre später *F. Perrier* auf Anregung von *B. Pascal* 1648 erbracht, indem er die Höhe der Quecksilbersäule auf dem Puy de Dome und am Fuß dieses 975 m hohen Berges maß und einen Unterschied von 3 $Zoll$ feststellte. Von *B. Pascal* stammt auch der Name *Barometer* für das Messgerät. Dieser Name (vom griechischen barys = schwer abgeleitet) deutet an, dass mit diesem Instrument das Gewicht der darüber liegenden Luftsäule gemessen wird.

An dieser Stelle sei noch eine auf dem Barometer begründete Druckeinheit erwähnt, die so genannte *physikalische Atmosphäre*. Der mittlere Barometerstand in der Höhe des Meeresspiegels beträgt ca. 760 mm QS. Man ist übereingekommen, diesen Barometerstand bei 0 °C Quecksilbertemperatur als Normalzustand der Atmosphäre zu definieren und nennt den zugehörigen Luftdruck auch eine „Atmosphäre“. Der Zusatz „physikalisch“ wird gemacht, weil die von den Ingenieuren verwendete technische Atmosphäre gleich 1 kp/cm^2 ist. Da das spezifische Gewicht von Quecksilber bei 0 °C gleich 13,595 p/cm^3 ist und 1 cm^3 demnach 13,595 p wiegt, entspricht einer Quecksilbersäule von 76 cm ein Druck von

$$76\,\text{cm} \cdot 13{,}595\,\text{p/cm}^3 = 1033.2\,\text{p/cm}^2 = 1{,}0132 \cdot 10^5\,\text{Pa}.$$

Diesem Druck entspricht eine Wassersäule von 10,332 m Höhe (Wasserbarometer). Die Saughöhe von Pumpen muss also geringer sein als dieser Wert.

Da in der Definition der physikalischen Atmosphäre die Erdanziehung eine Rolle spielt und diese nicht an allen Orten auf der Erde denselben Wert hat, muss für eine höhere Genauigkeit bei der Definition der Druckeinheiten ein bestimmter Wert der Erdbeschleunigung g zugrunde gelegt werden. Man hat den Wert $980.665\,\mathrm{cm/s^2}$ als Normalwert der Erdbeschleunigung des 45. Breitengrads auf dem Meeresniveau festgesetzt. Bei einer anderen Erdbeschleunigung g ergibt sich der Druck der Normalatmosphäre zu $(1{,}0332 \cdot 980.665)/g$ örtliche Kilopond pro Quadratzentimeter. Um von diesen etwas willkürlichen Festsetzungen frei zu kommen, hat man eine an das CGS-System angeschlossene Druckeinheit eingeführt und zwar wird das Millionenfache der Druckeinheit $1\,\mathrm{dyn/cm^2}$ als *bar* bezeichnet. Einem *bar* entspricht beim Normalwert der Erdbeschleunigung eine Quecksilbersäule von 750.06 mm Höhe.

2.7 Gleichgewicht bei anderen Kraftfeldern

Bei den Ausführungen in den Abschn. 2.3, 2.4, 2.5 und 2.6 wurde ein homogenes Schwerefeld zugrunde gelegt, d. h. es ist überall eine gleich starke und gleich gerichtete Erdbeschleunigung vorausgesetzt worden. Diese Voraussetzung reicht für die meisten Anwendungen aus. Handelt es sich aber z. B. um Gebiete auf der Erde, die nicht mehr klein gegen den Erdradius sind, muss die veränderliche Erdbeschleunigung in Größe und Richtung berücksichtigt werden. Bei einer relativ zu einem gleichförmig rotierenden Gefäß ruhenden Flüssigkeit hat man zusätzlich zur Erdbeschleunigung die Zentrifugalbeschleunigung zu berücksichtigen. Im Folgenden soll deshalb ganz allgemein die Frage behandelt werden, wie es sich mit dem Gleichgewicht einer homogenen oder nicht homogenen Flüssigkeit in einem Kraftfeld allgemeiner Art verhält, dessen Kraft auf die Masseneinheit (d. h. dessen Beschleunigung) sich von Ort zu Ort nach Stärke und Richtung ändert.

Man kann die Überlegungen für ein allgemeines Kraftfeld direkt an die Ausführungen von Abschn. 2.3 anknüpfen. Daraus folgt, dass sich in jeder Richtung senkrecht auf die jeweilige Kraftrichtung der Druck nicht ändern kann (Gleichgewicht eines kleinen Prismas nach Abb. 1.17 mit der Achse senkrecht zur Kraftrichtung). Fasst man alle zur Kraftrichtung senkrechten Richtungen in einem Punkt zusammen, muss der Druck auf dem zur Kraftrichtung senkrechten Flächenelement konstant sein. Für den Fall, dass sich die aneinander angrenzenden Flächenelemente zu einer endlichen Fläche zusammenfassen lassen, d. h. wenn das Kraftfeld so genannte Normalflächen besitzt, dann ist längs jeder solchen Normalfläche der Druck konstant. Besitzt ein Kraftfeld keine Normalfläche, dann ist auch kein Gleichgewicht einer Flüssigkeit in diesem Kraftfeld möglich.

Im Folgenden wird im Gegensatz zu den bisherigen Kapiteln, in denen mit g die Stärke des Schwerefeldes der Erde bezeichnet wurde, jetzt mit g die Stärke eines allgemeinen Kraftfeldes bezeichnet. Es ergibt sich aus dem Gleichgewicht an einem kleinen Prisma entsprechend Abb. 1.19 mit der Höhe dh parallel zur Kraftrichtung und dem Druckanstieg dp, dass in der Kraftrichtung der Druck nach der Gleichung

$$\mathrm{d}p = g \cdot \rho \cdot \mathrm{d}h \tag{1.15}$$

zunimmt.

Bei den weiteren Überlegungen wird vorausgesetzt, dass das Kraftfeld Normalflächen besitzt. Es werden zwei solche Normalflächen mit den Drücken p und $p + \mathrm{d}p$ betrachtet. An zwei Stellen 1 und 2 in Abb. 1.25 gilt dann gemäß Gl. (1.15) einerseits $\mathrm{d}p = g_1 \cdot \rho_1 \cdot \mathrm{d}h_1$, andererseits auch $\mathrm{d}p = g_2 \cdot \rho_2 \cdot \mathrm{d}h_2$. Ist ρ entweder konstant oder eine Funktion von p (homogene Flüssigkeit oder homogenes Gas, vgl. Abschn. 2.3 und 2.5), gilt $p_1 = p_2$ und $\rho_1 = \rho_2$. Damit ergibt sich $g_1 \cdot \mathrm{d}h_1 = g_2 \cdot \mathrm{d}h_2$. $g \cdot \mathrm{d}h$ ist die Arbeit, die von der Kraft beim Übergang von der einen Normalfläche zur anderen geleistet wird. Diese Arbeit hat zwischen den beiden Normalflächen an jeder Stelle denselben Wert. Das Kraftfeld hat ein Potential. Die Normalflächen sind damit Flächen konstanten Potentials. Führt man das Potential U an einem Punkt durch die Gleichung

$$\mathrm{d}U = -g \cdot \mathrm{d}h \tag{1.16}$$

ein (Minuszeichen, weil in Gl. (1.15) $\mathrm{d}h$ in Richtung von g positiv angenommen wurde), erhält man

$$\mathrm{d}p = -\rho \cdot \mathrm{d}U \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{d}U = -\frac{\mathrm{d}p}{\rho}. \tag{1.17}$$

Hieraus folgt für die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten A und B:

$$U_\mathrm{A} - U_\mathrm{B} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \frac{\mathrm{d}p}{\rho}. \tag{1.18}$$

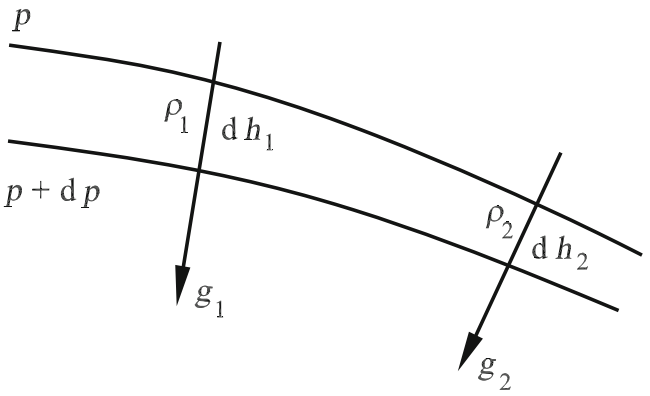


Abb. 1.25 Normalflächen eines Kraftfeldes

Bei dem hier angenommenen Fall einer homogenen Flüssigkeit oder eines homogenen Gases lässt sich die rechte Seite berechnen und man erhält den Druck unmittelbar als Funktion des Potentials. Diese Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Im Fall einer homogenen Flüssigkeit bzw. eines homogenen Gases ist Gleichgewicht nur möglich, wenn das Kraftfeld ein Potential hat. Die Flächen konstanten Potentials, die senkrecht zur Kraft verlaufen, sind gleichzeitig auch Flächen konstanten Druckes. Der Druck steigt in Richtung der Kraft an. Es gilt $\mathrm{d}p = -\rho \cdot \mathrm{d}U$.

Bei einer inhomogenen Flüssigkeit ist der Fall denkbar, dass zwar $g_1 \cdot \mathrm{d}h_1$ ungleich $g_2 \cdot \mathrm{d}h_2$ ist, aber durch geeignete Verteilung der Dichte überall

$$\rho_1 \cdot g_1 \cdot \mathrm{d}h_1 = \rho_2 \cdot g_2 \cdot \mathrm{d}h_2$$

gilt. Man erkennt, dass das Gleichgewicht instabil ist, da beim Verschieben von Flüssigkeit längs der Normalfläche, was keine Arbeit erfordert, sich die Verteilung der Dichte verändert und das Gleichgewicht gestört ist. Wenn man sich also auf stabile Zustände beschränken will, so kommen auch hier nur Kraftfelder in Betracht, die ein Potential besitzen. Ist aber $g_1 \cdot \mathrm{d}h_1$ gleich $g_2 \cdot \mathrm{d}h_2$, so muss zur Erfüllung des Gleichgewichts auch $\rho_1 = \rho_2$ gelten. Man kann also sagen:

Eine stabile Lage einer inhomogenen Flüssigkeit ist nur möglich, wenn das Kraftfeld ein Potential besitzt. Die Flächen konstanten Potentials sind gleichzeitig Flächen konstanten Druckes und konstanter Dichte.

Die Gl. (1.17) und (1.18) sind demnach auch hier anwendbar. Die Bedingungen für die Stabilität der Schichtung sind dieselben, wie sie in den Abschn. 2.3 und 2.5 für das homogene Schwerefeld diskutiert wurden.

Die in der Physik vorhandenen Kraftfelder haben, wenn man von magnetischen Kraftfeldern absieht, fast immer ein Potential. Von Bedeutung ist aber die Forderung, dass auf allen Flächen konstanten Potentials die Dichte ρ konstant sein muss. Diese Bedingung kann z. B. dadurch verletzt werden, dass die Flüssigkeit oder das Gas örtlich erwärmt wird, wodurch sich die Dichte dort verringert. In diesem Fall ist kein Gleichgewicht mehr möglich. Die erwärmte Flüssigkeit und ihre Umgebung setzt sich in Bewegung. Dieser Vorgang kommt erst zur Ruhe, wenn die wärmeren Teile über den kälteren geschichtet liegen und damit die Bedingung konstanter Dichte auf Flächen konstanten Potentials wieder erfüllt ist.

Die freie Oberfläche einer Flüssigkeit oder die Grenzfläche zweier nicht mischbarer Flüssigkeiten unterschiedlicher Dichte folgt immer einer Fläche konstanten Potentials. Man bezeichnet deshalb die Flächen gleichen Potentials (*Äquipotentialflächen*) auch als *Niveauflächen* (freie Oberfläche oder Niveau einer gedachten Flüssigkeit). Bei der Erdvermessung bildet die Meeresoberfläche die Niveaufläche, auf die alle Höhen bezogen werden.

Die vorangegangenen Überlegungen werden im Folgenden an einem einfachen Beispiel erklärt. In einem gleichförmig um eine senkrechte Achse rotierenden Gefäß befindet sich eine homogene schwere Flüssigkeit, die relativ zur Rotationsbewegung in Ruhe ist. Es soll das Gleichgewicht dieser Flüssigkeit betrachtet werden. Hierfür stellt man zunächst den Ausdruck für das Potential auf, das sich additiv aus einem

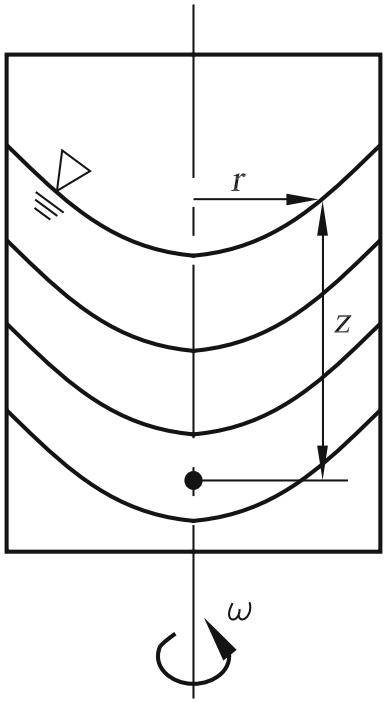


Abb. 1.26 Flüssigkeit in einem rotierenden Gefäß

durch die Schwerkraft und einem durch die Zentrifugalkraft verursachten Anteil zusammensetzt.

Mit den Zylinderkoordinaten r und z (siehe Abb. 1.26) ergibt sich der Anteil der Schwerkraft an dem Potential zu $U_1 = U_0 + g \cdot z$, wobei g hier die Erdbeschleunigung und U_0 ein beliebig gewähltes Anfangspotential ist. Zur Bestimmung des Anteils der Zentrifugalkraft am Potential wird als Stärke des Kraftfeldes die Zentrifugalbeschleunigung $\omega^2 \cdot r$ eingesetzt, mit der gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit ω des Gefäßes und der Flüssigkeit. Durch Integration in Richtung der Zentrifugalbeschleunigung, d. h. in Richtung von r, folgt der zweite Anteil des Potentials

$$U_2 = -\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2}.$$

Damit erhält man das Potential in einem Punkt der Flüssigkeit:

$$U = U_1 + U_2 = U_0 + g \cdot z - \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2}.$$

Die Flächen gleichen Potentials ergeben sich mit der Bedingung $U = \text{konst.}$:

$$z = \text{konst.} + \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g}.$$

Die freie Oberfläche und alle Flächen gleichen Druckes sind Paraboloide mit dem gemeinsamen Parameter g/ω^2. Eine Integration von Gl. (1.17) führt zu der Beziehung $p = p_0 - \rho \cdot U$ für den Druck. Mit $\rho \cdot g = \gamma$ erhält man

$$p = \text{konst.} + \gamma \cdot \left(-z + \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g} \right).$$

2.8 Oberflächenspannung (Kapillarität)

Freie Oberflächen von Flüssigkeiten zeigen das Bestreben sich zu verkleinern und so genannte *Minimalflächen* zu bilden. Dieses Verhalten lässt sich mit einem Spannungszustand in der Oberfläche, wie ihn eine gleichmäßig gespannte dünne Haut annimmt, erklären. Die Ursache für das Bestreben sich zu verkleinern, kann man sich wie folgt vorstellen: Jedes Flüssigkeitsmolekül nahe der Oberfläche wird durch die Anziehung der benachbarten Moleküle (intermolekulare Kräfte) in das Innere der Flüssigkeit gezogen. Dadurch verbleiben an der Oberfläche nur so viele Moleküle, wie zur Bildung der Oberfläche unbedingt notwendig sind. Auch bei Grenzflächen zwischen zwei Flüssigkeiten, die sich nicht mischen, findet man das gleiche Verhalten. Man nennt die Spannung, die die Oberfläche im Gleichgewicht hält, *Oberflächenspannung*.

An ebenen Grenzflächen bewirkt die Oberflächenspannung keine Druckdifferenzen, da die resultierende Oberflächenspannungskraft gleich Null ist. Bei gewölbten Oberflächen entstehen Druckunterschiede, die zur Herstellung des Gleichgewichts notwendig sind. Betrachtet man ein kleines Rechteck einer gewölbten Oberfläche mit den Seitenlängen $\mathrm{d}s_1$ und $\mathrm{d}s_2$ (siehe Abb. 1.27), so führt die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ auf der Fläche $\mathrm{d}s_1 \cdot \mathrm{d}s_2$ zu einer Kraft $(p_1 - p_2) \cdot \mathrm{d}s_1 \cdot \mathrm{d}s_2$. Die Oberflächenspannung ist die Kraft, auf die Längeneinheit bezogen, die die Oberfläche im Gleichgewicht hält. Sie hat die Größe C (C = Kapillarkonstante). Damit erhält man an den vier Rändern des Rechtecks zwei Kräfte $C \cdot \mathrm{d}s_1$ auf den Seiten $\mathrm{d}s_1$ und zwei Kräfte $C \cdot \mathrm{d}s_2$ auf den Seiten $\mathrm{d}s_2$. Die beiden Kräfte auf den Seiten $\mathrm{d}s_2$ stehen unter einem Winkel $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}s_1/R_1$ aufeinander. Damit ergibt sich eine Resultierende $C \cdot \mathrm{d}s_2 \cdot \mathrm{d}\alpha = C \cdot \mathrm{d}s_2 \cdot \mathrm{d}s_1/R_1$. Die beiden anderen Kräfte, die einen Winkel $\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}s_2/R_2$ bilden, ergeben eine Resultierende $C \cdot \mathrm{d}s_1 \cdot \mathrm{d}s_2/R_2$. Aus dem Gleichgewicht der drei Kräfte erhält man

$$p_1 - p_2 = C \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \tag{1.19}$$

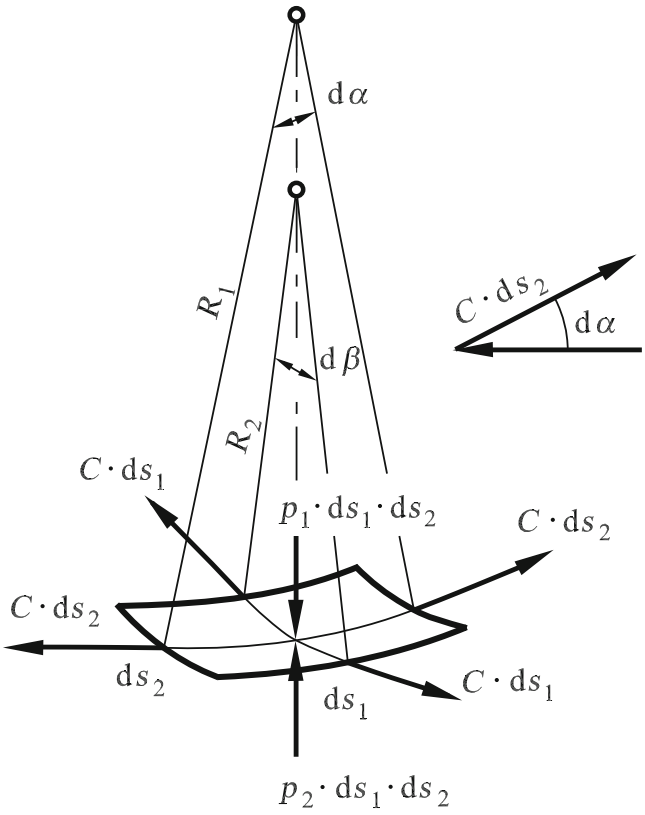


Abb. 1.27 Oberflächenspannung und Druck an einer gewölbten Flüssigkeitsoberfläche

R_1 und R_2 sind dabei, wie aus Abb. 1.27 hervorgeht, die Krümmungsradien der Schnittkurven der Oberfläche mit zwei orthogonalen, zur Tangentialebene senkrechten Ebenen. Aus Gl. (1.19) folgt der geometrische Zusammenhang, dass die Summe $1/R_1 + 1/R_2$ unabhängig von der Richtung ist, da die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ nicht von der Richtung abhängt.

In *schweren Flüssigkeiten* die sich im Gleichgewicht befinden, ändert sich der vom spezifischen Gewicht abhängige Druck mit der Höhe nach dem Gesetz $p = p_0 - \gamma \cdot z$. Damit gilt an der Grenzfläche von zwei Flüssigkeiten mit den spezifischen Gewichten γ_1 und γ_2 für die zugehörigen Drücke $p_1 = p_0 - \gamma_1 \cdot z$ und $p_2 = p_0 - \gamma_2 \cdot z$. Mit Gl. (1.19) ergibt sich hieraus für die Grenzfläche der Zusammenhang zwischen Krümmung und Höhe:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{C} \cdot z. \tag{1.20}$$

Abb. 1.28 zeigt zwei Beispiele solcher Oberflächen. Durch Ausmessen der hier auftretenden Geometrien lässt sich die Kapillarkonstante C bestimmen.

Man erkennt an Gl. (1.20), dass man für sehr kleine Unterschiede der spezifischen Gewichte eine n-*fach* geometrisch ähnliche Vergrößerung der verschiedenen Oberflächenformen erhält (R_1, R_2 und z sind n-mal so groß), wenn der Term $(\gamma_2 - \gamma_1)/C$ um den Faktor $1/\mathrm{n}^2$ verkleinert wird. Für $\gamma_2 = \gamma_1$ verschwindet der Einfluss der Schwerkraft. Die dabei entstehenden Oberflächen sind die so genannten Minimalflächen. Legt man für $\gamma_2 - \gamma_1 \to 0$ gleichzeitig auch die Ebene $z = 0$ ins Unendliche, ergibt sich aus Gl. (1.20) $1/R_1 + 1/R_2 =$ konst.. Dieses Ergebnis liefert Minimalflächen mit gegebenem Volumeninhalt, deren einfachstes Beispiel die Kugel ist. Experimentell lassen sich diese Minimalflächen durch Seifenhäute erzeugen. In kugelförmigen Seifenblasen herrscht im Inneren ein Überdruck der Größe $p_1 - p_2 = 4 \cdot C/R$ (Es sind 2 Oberflächen der Seifenlösung gegen Luft zu berücksichtigen, deshalb ist der Faktor $2 \cdot C$ statt C in Gl. (1.19) einzusetzen).

Stoßen die Grenzflächen von drei Flüssigkeiten längs einer Kante zusammen, ergeben sich aus dem Kräftegleichgewicht der drei Oberflächenspannungen C_{12}, C_{13} und C_{23} an dieser Stelle ganz bestimmte Winkel, unter denen die drei Grenzflächen zusammentreffen (siehe Abb. 1.29). Es kann auch vorkommen, dass C_{13} größer ist als die Summe von C_{12} und C_{23}. In diesem Fall ist kein Gleichgewicht möglich. Dieses tritt z. B. auf, wenn Luft, Mineralöl und Wasser zusammentreffen. Das Mineralöl überzieht dann, gegebenenfalls mit einer sehr dünnen Schicht die ganze Oberfläche. Man kann dieses Verhalten beim Ausbreiten von Schmieröltropfen auf nassen Straßen beobachten. Wird das Mineralöl durch geschmolzenes Fett ersetzt, nimmt dieses zwischen Wasser und Luft die Form flacher Linsen an (Fettaugen in der Suppe). In Abb. 1.29 ist dieser Fall dargestellt. Wenn einer der drei Stoffe

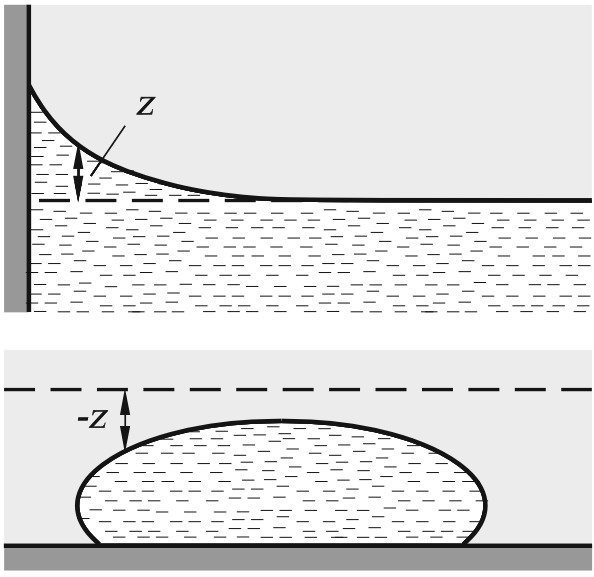


Abb. 1.28 Kapillare Oberflächen schwerer Flüssigkeiten

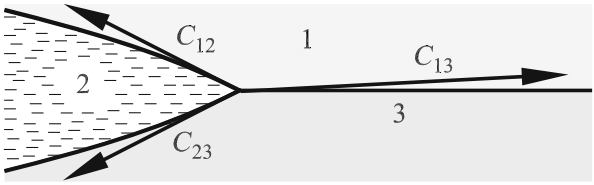
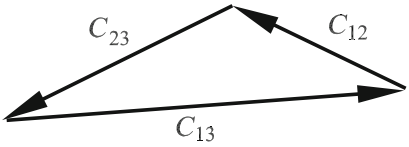


Abb. 1.29 Gleichgewicht von drei Oberflächenspannungen



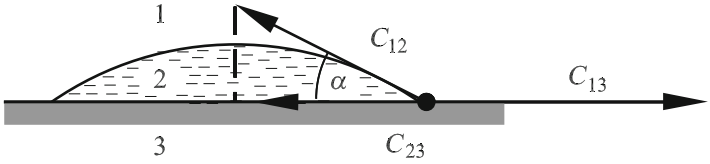


Abb. 1.30 Randwinkel an einer festen Oberfläche

fest ist, kann das Kräftegleichgewicht der drei Oberflächenspannungen nur mit den Komponenten in der hier möglichen Verschiebungsrichtung, parallel zur festen Oberfläche, aufgestellt werden. Es ergibt sich unter Verwendung des *Randwinkels* α (siehe Abb. 1.30) $C_{12} \cdot \cos(\alpha) + C_{23} = C_{13}$, d. h.

$$\cos(\alpha) = \frac{C_{13} - C_{23}}{C_{12}}. \tag{1.21}$$

Wenn C_{12} (Oberflächenspannung an der Grenze der beiden Flüssigkeiten 1 und 2) bereits bekannt ist und α gemessen wird, folgt daraus die Differenz $C_{13} - C_{23}$. C_{13} und C_{23} bleiben dagegen im Einzelnen unbestimmbar. Ist die Differenz negativ, ergeben sich Winkel $\alpha > \pi/2$, wie z. B. für Luft, Quecksilber und Glas. Das untere Bild von Abb. 1.28 stellt einen solchen Quecksilbertropfen dar. Es kann auch der Fall $C_{13} - C_{23} > C_{12}$ vorliegen. Dann überzieht sich der ganze feste Körper mit der Flüssigkeit 2. Dieses tritt z. B. bei Petroleum auf.

In engen Röhrchen beobachtet man beträchtliche Steighöhen von Flüssigkeiten. Ist r der Innenradius des Röhrchens, dann gilt bei einer Vereinfachung der Flüssigkeitsoberfläche durch eine Kugelkalotte (r klein gegen h) entsprechend Abb. 1.31 für den Kugelradius $R = r/\cos(\alpha)$, mit dem Randwinkel α. Damit ist nach Gl. (1.20):

$$h = \frac{2 \cdot C_{12}}{\gamma_2 - \gamma_1} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{r}. \tag{1.22}$$

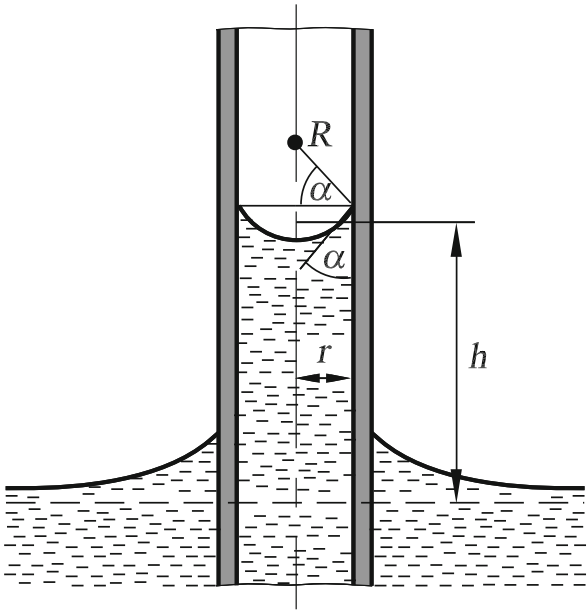


Abb. 1.31 Kapillarerhebung in einem Röhrchen

Die Steighöhe h kann sehr groß werden, wenn r sehr klein ist (Saugwirkung von Fließpapier, feinporigem Ton usw.).

Eliminiert man in Gl. (1.22) $\cos(\alpha)$ mittels Gl. (1.21) und multipliziert beide Seiten mit $\pi \cdot r^2 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)$ ergibt sich die Gleichung:

$$(\gamma_2 - \gamma_1) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = (C_{13} - C_{23}) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r.$$

Das Gewicht der Flüssigkeitssäule, vermindert um deren Auftrieb, ist gleich der resultierenden Zugkraft an der Rohrwand. Wenn die *Zugkraft* negativ ist, d. h. $\alpha > \pi/2$ wie beim Quecksilber, wird h negativ (Abb. 1.31 an der Horizontalen gespiegelt). Bei benetzter Oberfläche kann man $C_{13} - C_{23}$ durch C_{12} ersetzen. Damit wird $\cos(\alpha) = 1$, d. h. $\alpha = 0$. Daraus ergibt sich der Maximalwert für h. Durch Messung von h und r erhält man:

$$C_{12} = \frac{1}{2} \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot h \cdot r.$$

Eine andere Bestimmungsmethode ergibt sich durch Ausmessung von Kapillarwellen, die in Abschn. 8, Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit behandelt wird.

Werte von C_{12} bei 20 °C:	Wasser gegen Luft	0,073 N/m
	Öl gegen Luft	0,025 bis 0.030 N/m
	Quecksilber gegen Luft	0,472 N/m

3 Kinematik der Strömungen

Die Strömungen der Flüssigkeiten und der Gase haben so viele Gemeinsamkeiten, dass es zweckmäßig ist, sie gemeinsam zu behandeln. Die Gase sind im Gegensatz zu den Flüssigkeiten kompressibel. Es hängt jedoch vom jeweils *betrachteten Strömungsvorgang* ab, ob die Kompressibilität eine Rolle spielt oder nicht. Bei kleinen Geschwindigkeiten sowie bei mäßigen Höhenabmessungen des strömenden Gases bleiben die Druckänderungen gegenüber dem mittleren Druck gering. Die Volumenänderungen sind dann so klein, dass man sie vernachlässigen kann. Die Gasströmungen unterscheiden sich dann nicht mehr von den Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten. Vernachlässigt man Volumenänderungen von 1 %, darf man bei Strömungen von atmosphärischer Luft bei mittleren Temperaturen die Gleichungen für inkompressible Strömungen anwenden. Dies gilt für Gasgeschwindigkeiten bis zu 50 m/s und für Höhenausdehnungen bis zu 100 m (vgl. Abschn. 2.5 und 2 des Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit). Bei Strömungsgeschwindigkeiten von 150 m/s betragen die Volumenänderungen etwa 10 %. Wenn die Strömungsgeschwindigkeiten die Größe der Schallgeschwindigkeit erreichen, wird die Volumenänderung so groß, dass die Strömung dadurch deutlich beeinflusst wird. Bei Strömungsgeschwindigkeiten, die größer als die Schallgeschwindigkeit sind, ergibt sich gegenüber der inkompressiblen Flüssigkeitsströmung ein völlig geänderter Charakter der Strömung.

In diesem Kapitel werden hauptsächlich inkompressible Strömungen behandelt. Um nicht immer von *Flüssigkeiten* und *Gasen* zu sprechen, wird im Folgenden das Wort *Fluid* als Sammelbegriff für Flüssigkeiten und Gase gebraucht. Die Gase werden im Sinne dieses Sprachgebrauchs als kompressibles Fluid bezeichnet (Kap. 4 ▸ Dynamik der Gase).

Die Kinematik einer Strömung beschreibt die Bewegung des Fluids ohne Berücksichtigung der Kräfte, die diese Bewegung verursachen. Das Ziel der Kinematik ist die Beschreibung der Bewegung eines Fluidelementes in Abhängigkeit der Zeit für ein vorgegebenes Geschwindigkeitsfeld.

3.1 Darstellungsmittel

Die Strömung eines Fluids kann man beschreiben, indem für jedes Fluidteilchen zu jedem Zeitpunkt der Ort angegeben wird, an dem es sich befindet. Seine Ortsänderung in der Zeit ergibt dann die Geschwindigkeit und Beschleunigung. Mathematisch führt man deshalb zur Unterscheidung der einzelnen Teilchen ein besonderes, mit den Fluidteilchen fest verbundenes, im Raum aber bewegliches Koordinatensystem ein. Hierfür betrachtet man zunächst eine Flächenschar $a = konst.$. a ist dabei in irgendeiner Anfangslage als Funktion der Raumkoordinaten x, y, z gegeben. Wählt man noch zwei weitere Flächenscharen $b = konst.$ und $c = konst.$ derart aus, dass sich jeweils eine Fläche $a = konst.$, eine Fläche $b = konst.$ und eine Fläche $c = konst.$ immer nur in einem einzigen Punkt schneiden, dann ist ein Fluidteilchen in diesem Schnittpunkt durch die Werte von

a, b und c zu einem festen aber beliebigen Zeitpunkt vollständig gekennzeichnet. Ein Fluidteilchen behält diese *Fluidkoordinaten* a, b und c als Anfangs- oder Ruhelage während seiner Bewegung. Das bedeutet, dass jede Fläche $a = konst.$, $b = konst.$ oder $c = konst.$ als Anfangslage dauernd aus denselben Fluidteilchen besteht. Die ursprüngliche Wahl der Fluidkoordinaten ist dabei willkürlich und nur durch Zweckmäßigkeitsgründe bestimmt. Man kann z. B. auch die kartesischen Koordinaten in irgendeiner Anfangs- oder Ruhelage als Fluidkoordinaten wählen. Die Bahnen der Fluidteilchen im Strömungsfeld nennt man *Teilchenbahnen*.

Eine andere Möglichkeit Strömungen zu beschreiben sind *Streichlinien*. Diese sind die Verbindungslinien all der Orte, die die Teilchenbahnen aller Teilchen erreicht haben, die zu einen vorgegebenen Zeitpunkt ein und den selben Ort im Strömungsfeld durchlaufen haben. Gibt man im Experiment an einer bestimmten Stelle des Strömungsfeldes Farbe bzw. Rauch zu, so sind Momentaufnahmen der Farbfäden bzw. Rauchfahnen die Streichlinien.

Um die Teilchenbahnen anzugeben, müssen die Werte der aktuellen Ortskoordinaten x, y, z der Teilchen als Funktionen der Zeit und der Fluidkoordinaten a, b, c der Anfangslage der Teilchen angegeben werden. Man erhält

$$x = \mathrm{F}_1(a, b, c, t), \qquad y = \mathrm{F}_2(a, b, c, t), \qquad z = \mathrm{F}_3(a, b, c, t). \tag{1.23}$$

Zur vollständigen Beschreibung des Zustandes des strömenden Fluids gehört noch die Aussage über den Druck p und bei einer kompressiblen Strömung eine Aussage über die Dichte ρ. Im Allgemeinen verwendet man eine einfachere Darstellung, die den Strömungszustand an jedem Ort und zu jeder Zeit näher beschreibt, ohne nach dem Verbleib der einzelnen Fluidteilchen zu fragen. Handelt es sich um eine *stationäre Strömung*, reicht es aus für jeden Ort des durchströmten Raumes die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung anzugeben und entsprechende Angaben über den Druck und gegebenenfalls über die Dichte zu machen. Ändert sich die Strömung jedoch in der Zeit, sind diese Angaben für die instationäre Strömung zu jedem Zeitpunkt erforderlich. Mathematisch gibt man dazu die drei Geschwindigkeitskomponenten u, v, w (und gegebenenfalls auch den Druck p und die Dichte ρ) als Funktionen der Raumkoordinaten x, y, z und der Zeit t an. Für u, v, w erhält man damit die Gleichungen

$$u = \mathrm{f}_1(x, y, z, t), \qquad v = \mathrm{f}_2(x, y, z, t), \qquad w = \mathrm{f}_3(x, y, z, t). \tag{1.24}$$

Man benennt das Gleichungssystem Gl. (1.23) nach *J.-L. Lagrange* (teilchenfest), das System Gl. (1.24) nach *L. Euler* (ortsfest), obwohl schon *L. Euler* beide gekannt hat. Die Gl. (1.23) und (1.24) werden als *Grundgleichungen der Kinematik* bezeichnet.

Für die Berechnung der Teilchenbahnen müssen die drei Gleichungen

$$\mathrm{d}x = u \cdot \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}y = v \cdot \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}z = w \cdot \mathrm{d}t \tag{1.25}$$

unter Verwendung des Gleichungssystems Gl. (1.24) integriert werden. Da die drei Integrationskonstanten unmittelbar als Fluidkoordinaten a, b, c gedeutet werden können, erhält man wieder das Gleichungssystem Gl. (1.25).

Zur *anschaulicheren Darstellung* des augenblicklichen Strömungszustands eines Fluids, werden neben den Teilchenbahnen die so genannten *Stromlinien* verwendet, die überall in Richtung der Strömung verlaufen, d. h. deren Tangenten überall die Richtung des Geschwindigkeitsvektors besitzen.

Die Differentialgleichungen der *Stromlinien* lauten:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{u}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{w}{u}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{w}{v}. \tag{1.26}$$

Bei einer stationären Strömung stimmen die Stromlinien mit den Teilchenbahnen überein. Bei der instationären Strömung dagegen nicht, da die Stromlinien ein Bild der *momentan* vorhandenen Geschwindigkeitsrichtungen zeigen, die Teilchenbahnen aber die *im Laufe der Zeit von einem Teilchen* eingenommenen Geschwindigkeitsrichtungen darstellen.

Stromlinien ein und derselben Strömung, ebenso wie die Teilchenbahnen, sehen ganz verschieden aus, wenn das Bezugssystem gewechselt wird. Ist z. B. bei der Bewegung eines Körpers durch ein Fluid der Beobachter relativ zum ungestörten Fluid in Ruhe und bewegt er sich zum Vergleich mit dem Körper derart mit, dass für ihn der Körper ruht und das Fluid dem Körper entgegenströmt, ergeben sich zwei unterschiedliche Stromlinienbilder.

Die Stromlinien können sichtbar gemacht werden, indem man kleine Teilchen die der Bewegung des Fluids folgen auf die Fluidoberfläche streut oder dem Fluid beimengt. Bei einer Aufnahme mit kurzer Belichtungszeit erzeugt jedes Teilchen auf dem Film einen kurzen Strich. Diese Striche ergeben auf der Aufnahme bei hinreichend dichter Bestreuung ein Stromlinienbild. Ein Bild der Teilchenbahnen erhält man, wenn man bei geringer Bestreuung lange Belichtungszeiten verwendet. Die beiden Abbildungen 1.32 und 1.33 stellen gleichzeitige Aufnahmen der Bewe-

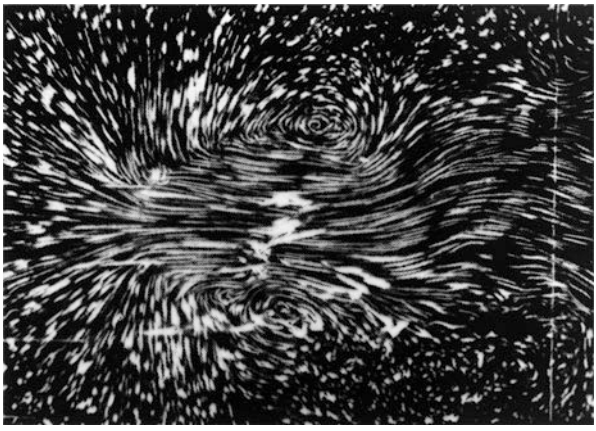


Abb. 1.32 Strömung um eine bewegte Platte, ruhende Kamera. Der Weg der Platte ist durch die Spuren der Seitenwände erkennbar, *F. Ahlborn* 1909

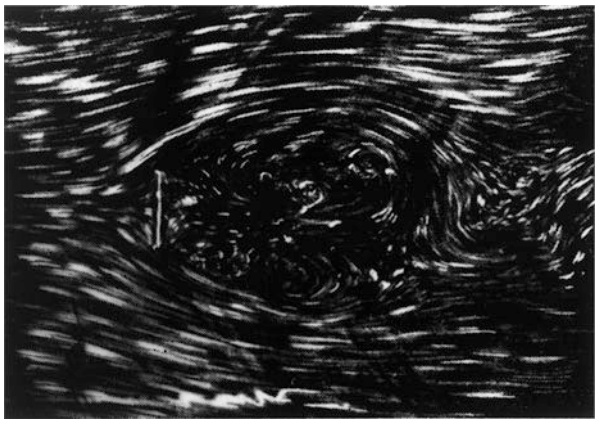


Abb. 1.33 Strömung um eine bewegte Platte, Kamera fährt mit der Platte mit, *F. Ahlborn* 1909

gung einer Platte durch ein ruhendes Fluid von zwei Bezugssystemen aus dar. Die Abb. 1.32 ist von einer ruhenden Kamera, die Abb. 1.33 von einer mit der Platte mitbewegten Kamera aufgenommen. Die Aufnahmen stammen von *F. Ahlborn* 1909. Zur Strömungssichtbarmachung wurde Bärlapp verwendet.

Ein weiteres Beispiel einer instationären Strömung zeigt die Abb. 1.34. Es sind die Streichlinien, Teilchenbahnen und Stromlinien der periodischen Wirbelablösung eines mit konstanter Geschwindigkeit U_∞ in einem ruhenden Fluid bewegten Zylinders skizziert. Die ersten drei Strömungsbilder der sogenannten Kármánschen Wirbelstraße (siehe auch Abb. 46, Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten) sind für den ortsfesten Beobachter dargestellt. Die periodisch ablösenden Wirbel laufen mit der Phasengeschwindigkeit c am Beobachter vorbei. Der mit dem Wirbel mitbewegte Beobachter sieht für ein und denselben Strömungsvorgang ein ganz anderes Bild. Es zeigen sich Stromlinien, die Katzenaugen ähnlich sehen.

Zieht man durch alle Punkte einer kleinen geschlossenen Kurve die Stromlinien, so bilden diese eine Röhre, wenn das Geschwindigkeitsfeld überall stetig ist. Diese hat die besondere Eigenschaft, dass das Fluid in ihr zu dem betrachteten Zeitpunkt definitionsgemäß parallel zu den Stromlinien wie in einem festen Rohr fließt. Ein Durchströmen der Röhrenwand würde eine Geschwindigkeitskomponente quer zur Wand, d. h. quer zu den Stromlinien voraussetzen, was deren Definition widerspricht. Man nennt solche Röhren *Stromröhren*, ihr Inhalt wird als *Stromfaden* bezeichnet. Bei stationären Strömungen verändern sich die Stromröhren nicht und die Fluidteilchen in ihnen fließen wie in einem festen Rohr. Dagegen sind im Allgemeinen bei instationären Strömungen zu einem späteren Augenblick andere Teilchen miteinander durch *Stromröhren* verbunden als vorher. Man kann sich den ganzen vom Fluid ausgefüllten Raum in solche Stromröhren aufgeteilt vorstellen und erhält damit ein anschauliches Bild der Fluidströmung.

Bei vielen einfacher gearteten Strömungen, besonders bei Strömungen durch Rohre und Kanäle, ist es erlaubt, den ganzen von der Strömung ausgefüllten Raum als einen einzigen Stromfaden zu betrachten. Man interessiert sich dann nicht für die unterschiedlichen Geschwindigkeiten in einem Querschnitt, sondern man erhält

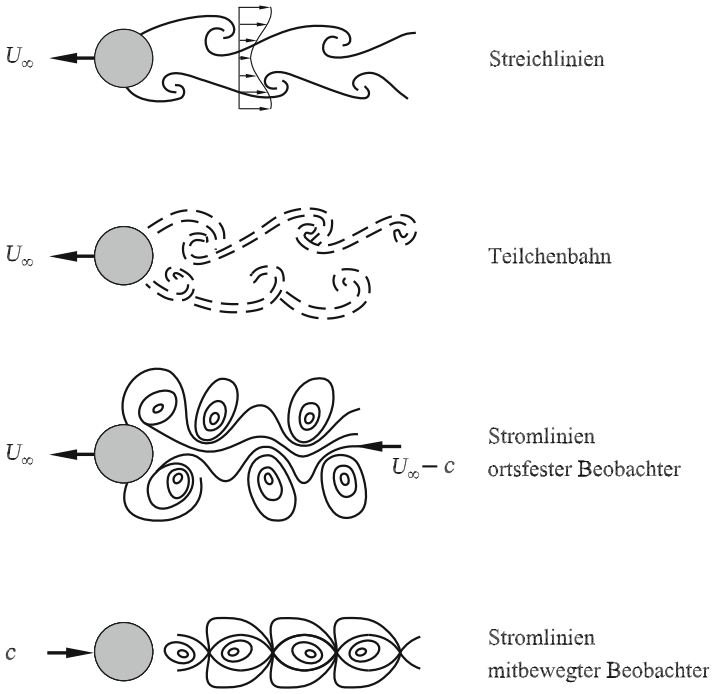


Abb. 1.34 Kármánschen Wirbelstraße, ruhender und mitbewegter Beobachter

nur Aussagen über die mittlere Geschwindigkeit. Davon machen besonders die Ingenieure bei praktischen Berechnungen Gebrauch (siehe Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit). Die Darstellung der Änderung der Strömungsgrößen entlang eines Stromfadens eröffnet die Möglichkeit, die eindimensionale Theorie der Strömungen zu entwickeln.

3.2 Beschleunigung einer Strömung

Nachdem im vorangegangenen Kapitel festgestellt wurde, dass das Strömungsbild vom Bezugssystem abhängig ist, gibt es für die mathematische Beschreibung einer Strömung die zwei beschriebenen Möglichkeiten. Bei der *Eulerschen Betrachtungweise* geht man vom *ortsfesten* Beobachter aus. Diese Beschreibungsweise entspricht dem Vorgehen beim Einsatz eines ortsfesten Messgerätes zur Messung der lokalen Strömungsgrößen, die auch bei der Ableitung der strömungsmechanischen Grundgleichungen in den folgenden Kapiteln ausschließlich benutzt wird.

Die *Lagrangesche Betrachtungsweise* geht von einem teilchen- bzw. fluidelementfesten, also mitbewegten Bezugssystem aus. Der mathematische Zusammenhang beider Betrachtungsweisen ist z. B. für die Beschleunigung der Strömung $\boldsymbol{b} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t^2$ das *totale Differential* des vorgegebenen Geschwindigkeits-

vektors $\boldsymbol{v}(u, v, w)$. Für die u-Komponente $u(x, y, z, t)$ des Geschwindigkeitsvektors gilt

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \mathrm{d}t + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \mathrm{d}z.$$

Damit ergibt sich für die totale zeitliche Ableitung von u

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},$$

mit

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w$$

ist

$$\boxed{\underbrace{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}_{\mathrm{S}} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\mathrm{L}} + \underbrace{u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}}_{\mathrm{K}}}. \tag{1.27}$$

Dabei bedeuten

S Substantielle zeitliche Änderung, *Lagrangesche Betrachtung*,
L Lokale zeitliche Änderung am festen Ort, *Eulersche Betrachtung*,
K Konvektive räumliche Änderungen infolge von Konvektion von Ort zu Ort, Einfluss des Geschwindigkeitsfeldes $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$.

Für die Beschleunigung $\boldsymbol{b}$ des Strömungsfeldes, die in den Bewegungsgleichungen der folgenden Kapitel benötigt werden, erhält man

$$\boldsymbol{b} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}, \tag{1.28}$$

mit dem Nabla-Operator $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ und $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)$ dem Skalarprodukt aus dem Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ und dem Nabla-Operator ∇.

Für kartesische Koordinaten ergibt sich

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

und für $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial}{\partial z},$$

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \left(u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Im Falle einer *stationären Strömung* gilt, dass alle partiellen Ableitungen nach der Zeit verschwinden $\partial/\partial t = 0$, wohingegen die substantielle Ableitung nach der Zeit $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ durchaus ungleich Null sein kann, wenn konvektive Änderungen auftreten. Bei einer instationären Strömung gilt sowohl $\partial/\partial t \neq 0$ als auch $\mathrm{d}/\mathrm{d}t \neq 0$.

3.3 Topologie einer Strömung

Ergänzend zum Originaltext von Prandtl sollen aus den kinematischen Grundgleichungen Gl. (1.24) Schlussfolgerungen gezogen werden, die neben den Stromlinien, Teilchenbahnen und Streichlinien eine verbesserte Beschreibung von dreidimensionalen Strömungen möglich machen. Dazu dient die Analyse der Topologie einer Strömung. Dabei wird unter der Topologie eines Strömungsfeldes die Klassifizierung der *kritischen Punkte* (Singularitäten) verstanden, die durch das Geschwindigkeitsvektorfeld sowie deren Beziehungen untereinander vorgegeben ist. Ein kritischer Punkt im Strömungsfeld ist dadurch ausgezeichnet, dass dort die Richtung des Geschwindigkeitsvektors unbestimmt ist. Für das Strömungsbild der Abb. 1.33 erhält man in dieser Terminologie die Beschreibung der Struktur des Strömungsfeldes (Abb. 1.35) mit zwei Halbsattelpunkten S', den Staupunkten der Strömung und dem Sattelpunkt S, der das Rückströmgebiet der periodisch ablösenden Wirbel von der Nachlaufströmung trennt. Die Wirbel selbst werden im Folgenden Foki F genannt. In Anlehnung an die Beschreibung der Abb. 1.33, sieht man als mitbewegter Beobachter das Momentbild der periodisch stromab schwimmenden Foki (Wirbel) einer senkrecht angeströmten Platte. Damit ist die instationäre Nachlaufströmung im mitbewegten Bezugssystem eindeutig beschrieben.

Die Theorie der *kritischen Punkte* (x_0, y_0, z_0) einer stationären Strömung geht von dem dreidimensionalen Geschwindigkeitsvektorfeld $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (u, v, w)$ aus. Es wird vorausgesetzt, dass dieses stetig und zweimal differenzierbar ist.

In einem kritischen Punkt ist das Richtungsfeld der betrachteten vektoriellen Größe unbestimmt. Betrachtet man im Folgenden den Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$,

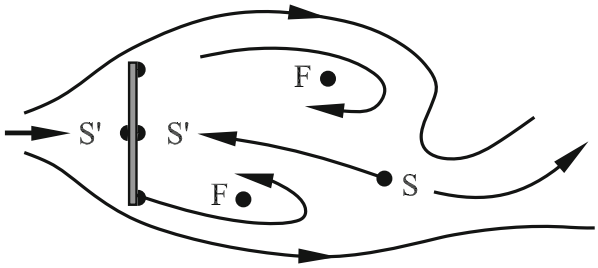


Abb. 1.35 Struktur der Strömung um eine bewegte Platte, Momentanbild im mitbewegten Bezugssystem

so bedeutet dies, dass in einem kritischen Punkt der Betrag der Geschwindigkeit verschwindet und dass den Stromlinien gemäß Gl. (1.26) in diesen Punkten keine Richtung zugeordnet ist. Eine nähere Untersuchung der unmittelbaren Umgebung eines kritischen Punktes ist jedoch möglich, wenn das Vektorfeld durch die Reihenentwicklung Gl. (1.29) um den singulären Punkt (x_0, y_0, z_0) angenähert wird. Dabei wird im Folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ angenommen. In den kritischen Punkten sind die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}$ analytische Funktionen der Ortskoordinaten:

$$\dot{x} = u = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{j}=0}^{\mathrm{N}-\mathrm{i}} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-\mathrm{i}-\mathrm{j}} U_{\mathrm{i,j,k}} \cdot x^{\mathrm{i}} \cdot y^{\mathrm{j}} \cdot z^{\mathrm{k}} + \mathrm{O}_1(\mathrm{N}+1),$$

$$\dot{y} = v = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{j}=0}^{\mathrm{N}-\mathrm{i}} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-\mathrm{i}-\mathrm{j}} V_{\mathrm{i,j,k}} \cdot x^{\mathrm{i}} \cdot y^{\mathrm{j}} \cdot z^{\mathrm{k}} + \mathrm{O}_2(\mathrm{N}+1), \tag{1.29}$$

$$\dot{z} = w = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{j}=0}^{\mathrm{N}-\mathrm{i}} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-\mathrm{i}-\mathrm{j}} W_{\mathrm{i,j,k}} \cdot x^{\mathrm{i}} \cdot y^{\mathrm{j}} \cdot z^{\mathrm{k}} + \mathrm{O}_3(\mathrm{N}+1),$$

mit

$$U_{\mathrm{i,j,k}} = \frac{1}{\mathrm{i}! + \mathrm{j}! + \mathrm{k}!} \cdot \frac{\partial^{\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}} u}{\partial x^{\mathrm{i}} \cdot \partial y^{\mathrm{j}} \cdot \partial z^{\mathrm{k}}},$$

$$V_{\mathrm{i,j,k}} = \frac{1}{\mathrm{i}! + \mathrm{j}! + \mathrm{k}!} \cdot \frac{\partial^{\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}} v}{\partial x^{\mathrm{i}} \cdot \partial y^{\mathrm{j}} \cdot \partial z^{\mathrm{k}}},$$

$$W_{\mathrm{i,j,k}} = \frac{1}{\mathrm{i}! + \mathrm{j}! + \mathrm{k}!} \cdot \frac{\partial^{\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}} w}{\partial x^{\mathrm{i}} \cdot \partial y^{\mathrm{j}} \cdot \partial z^{\mathrm{k}}}.$$

O_i sind dabei Fehlerfunktionen, die durch Terme der Ordnung $\mathrm{N}+1$ bestimmt sind.

Zunächst wird der Fall eines kritischen Punktes in der *freien Strömung* betrachtet. Hier genügt es, die Reihenentwicklung aus Gl. (1.29) bis zur Ordnung N = 1 vorzunehmen. Dies führt auf das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} = (x, y, z), \qquad \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

Die Koeffizienten a_{ij} sind dabei die Komponenten der Gradienten des Geschwindigkeitsvektors. Die Trajektorien des Gleichungssystems Gl. (1.30) sind im allgemeinen Fall die Bahnlinien des Stromfeldes, welche im stationären Fall mit den Stromlinien identisch sind.

Zur Betrachtung von kritischen Punkten auf *festen Wänden* wird im Folgenden angenommen, dass die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in wandnormalen Koordinaten mit z als wandnormale Richtung vorliegt. Im Gegensatz zu Punkten in der freien Strömung ist die Bedingung $\boldsymbol{v} = 0$ auf einer festen Wand kein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines kritischen Punktes, da dort aufgrund der Haftbedingung $\boldsymbol{v} = 0$ identisch erfüllt ist. Zur Identifikation eines kritischen Punktes ist jedoch die Unbestimmtheit der Richtung der Integralkurven des Vektorfeldes entscheidend. Da das Richtungsfeld der Geschwindigkeit im Grenzfall verschwindenden Abstandes z zur Wand in das Richtungsfeld des Wandschubspannungsvektors $\boldsymbol{\tau}$ übergeht, ist also $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{w}}$ nunmehr die maßgebliche Größe. Kritische Punkte auf der Wand erfordern also das Verschwinden der Wandschubspannung $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{w}}$.

Aus der Haftbedingung folgt, dass die Größe $\boldsymbol{v}/z$ mit $z \to 0$ einem konstanten Wert zustrebt und dass das Vektorfeld dieser Größe dieselben Integralkurven besitzt wie das Feld der Wandschubspannung.

Es ist deshalb zweckmäßig den kritischen Charakter der Fläche $z = 0$ zu umgehen und die Taylorentwicklung der Größe $\boldsymbol{v}/z$ zu betrachten.

Mit $\boldsymbol{x}' = \dot{\boldsymbol{x}}/z$ führt Gl. (1.29) mit N = 2 auf folgende Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{u}{z} = U_{1,0,1} \cdot x + U_{0,1,1} \cdot y + U_{0,0,2} \cdot z + \mathrm{O}_1(3), \\ y' &= \frac{v}{z} = V_{1,0,1} \cdot x + V_{0,1,1} \cdot y + V_{0,0,2} \cdot z + \mathrm{O}_2(3), \\ z' &= \frac{w}{z} = W_{0,0,2} \cdot z + \mathrm{O}_3(3). \end{aligned}$$

Die Haftbedingung ist hierbei aufgrund der Beziehung $U_{\mathrm{i,j,0}} = V_{\mathrm{i,j,0}} = W_{\mathrm{i,j,0}} = 0$ berücksichtigt.

Im Gegensatz zu Gl. (1.30) gehen jetzt Ableitungen zweiter Ordnung des Geschwindigkeitsfeldes ein. Beschränkt man sich auf die linearen Terme in den

Raumrichtungen x, y und z, erhält man in völliger Analogie zur freien Strömung wiederum ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit veränderter Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$:

$$\boldsymbol{x}' = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{x}}{z} \\ \frac{\dot{y}}{z} \\ \frac{\dot{z}}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

Die Klassifizierung kritischer Punkte im vorgegebenen Strömungsfeld ist damit auf die Untersuchung singulärer Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt, deren mathematische Theorie entwickelt ist. Der Unterschied kritischer Punkte in der freien Strömung zu denen auf festen Wänden liegt einzig in der zu untersuchenden Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ (Gl. (1.30) bzw. (1.31)).

Die Berechnung der Eigenwerte dieser Matrix gemäß $\det[\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}] = 0$ führt auf das charakteristische Polynom

$$\lambda^3 + \mathrm{P} \cdot \lambda^2 + \mathrm{Q} \cdot \lambda + \mathrm{R} = 0, \tag{1.32}$$

mit den drei reellwertigen Invarianten der Matrix

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= -\mathrm{Spur}(\mathbf{A}) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\ \mathrm{Q} &= \frac{1}{2} \cdot \left[\mathrm{P}^2 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A}^2)\right] = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_1, \\ \mathrm{R} &= -\det(\mathbf{A}) = -\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3. \end{aligned}$$

Die Lösungen der kubischen Gl. (1.32) lassen sich zunächst anhand der Diskriminante D einteilen, mit

$$\mathrm{D} = 27 \cdot \mathrm{R}^2 + (4 \cdot \mathrm{P}^2 - 18 \cdot \mathrm{Q}) \cdot \mathrm{P} \cdot \mathrm{R} + (4 \cdot \mathrm{Q} - \mathrm{P}^2) \cdot \mathrm{Q}^2. \tag{1.33}$$

Für $\mathrm{D} > 0$ erhält man einen reellwertigen sowie ein Paar konjugiert-komplexer Eigenwerte, für $\mathrm{D} < 0$ drei reelle Eigenwerte, die in Abb. 1.36 dargestellt sind. Die Fläche, definiert durch die Bedingung $\mathrm{D} = 0$, teilt den durch die drei Invarianten P, Q und R aufgespannten Raum in zwei Halbräume.

Einen ersten Überblick über das Strömungsverhalten in der Umgebung kritischer Punkte erhält man über die Betrachtung der Eigenvektoren für die zweidimensionale Strömung mit $\mathrm{R} = 0$. Die zugehörige charakteristische Gleichung $\lambda^2 + \mathrm{P} \cdot \lambda + \mathrm{Q} = 0$ führt auf die vereinfachte Diskriminante $\Delta = 4 \cdot \mathrm{Q} - \mathrm{P}^2$. Diese trennt in der P-Q-Ebene das Gebiet reeller Eigenwerte vom Gebiet komplexer Eigenwerte in

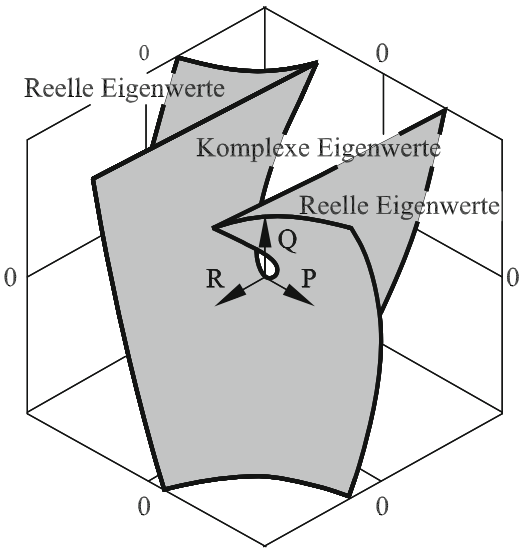


Abb. 1.36 Reelle und komplexe Eigenwerte des charakteristischen Polynoms Gl. (1.32)

Form einer Parabel. Abb. 1.37 zeigt in der P-Q-Ebene die den kritischen Punkten zugeordneten Eigenvektoren.

Die zu den jeweiligen Eigenwerten zugehörigen Eigenvektoren bestimmen die Richtung der Tangenten an die in den kritischen Punkt ein- bzw. auslaufenden Stromlinien. Bei negativem Vorzeichen der reellen Eigenwerte bzw. des Realteils der komplexen Eigenwerte laufen die Trajektorien auf den kritischen Punkt zu, bei positivem Vorzeichen von ihm weg.

Liegen zwei reelle Eigenwerte mit unterschiedlichem Vorzeichen vor ($Q < 0$), so münden zwei Tangenten der Eigenvektoren in den kritischen Punkt ein und zwei laufen aus ihm heraus. Es handelt sich also um einen *Sattelpunkt*. Bei positivem Q liegt für $\Delta > 0$ ein zweitangentiger *Knoten* mit zwei reellen Eigenwerten gleichen Vorzeichens vor. Für $\Delta < 0$ erhält man einen Strudelpunkt oder *Fokus* mit zwei konjugiert komplexen Eigenwerten.

Auf den Grenzlinien der verschiedenen Bereiche, d. h. den Achsen $P = 0$ oder $Q = 0$ sowie der Parabel $P^2 = 4 \cdot Q$, finden sich entartete Fälle, wie z. B. *Wirbel*, *Senken* und *Quellen* (entartete Knoten). So sind für $P = 0$ nur Sattelpunkte ($Q < 0$) oder Wirbelpunkte ($Q > 0$) kinematisch möglich. Für $P = 0$ und $Q = 0$ ist der kritische Punkt degeneriert, so dass für seine Beschreibung weitere Terme der Entwicklung Gl. (1.29) herangezogen werden müssen.

Für die *dreidimensionale Strömung* sind den Eigenwerten der Abb. 1.36 ebenfalls Strömungszustände zuzuordnen. Die Abb. 1.38 zeigt einige ausgewählte Beispiele. So findet man die Knoten-Fokus Struktur z. B. bei Windhosen, Sattel-Foki und instabile Wirbel bei der Wirbelbildung in der Atmosphäre, Knoten und Knoten-Sattelpunkte als Ablöselinien bei zahlreichen technischen Umströmungsproblemen, einschließlich der Strömung im menschlichen Herzen der Abb. 1.13.

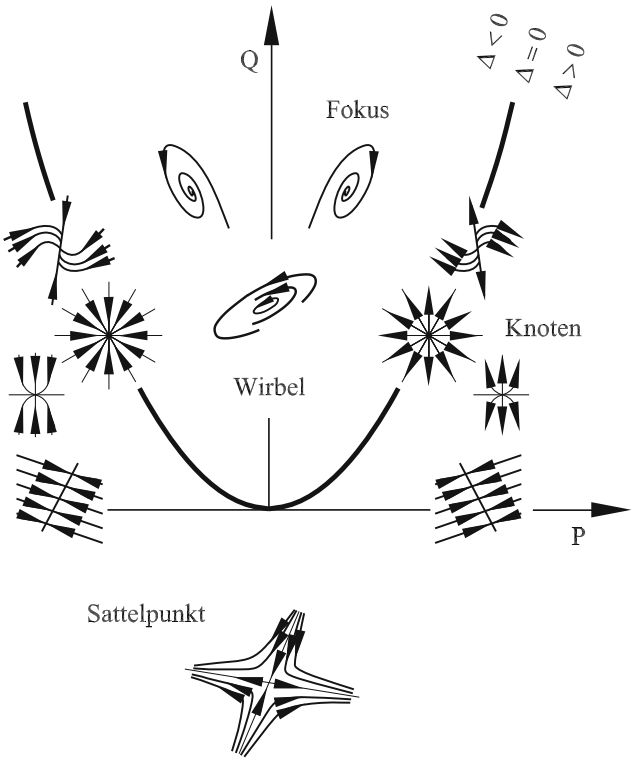


Abb. 1.37 Eigenvektoren der kritischen Punkte für R = 0, zweidimensionale Strömung

Ergänzend zu Abb. 1.35 wird die Topologie der *Kraftfahrzeugumströmung* näher beschrieben (siehe Abb. 1.39). Im Mittelschnitt A1 identifiziert man im Nachlauf des Kraftfahrzeuges drei Halbsattel S′ (Stau- und Ablösepunkte) auf dem Heck und einen Sattelpunkt S im Strömungsfeld. Das Rückströmgebiet ist durch zwei Foki F gekennzeichnet. Legt man die Schnittfläche A2 in den Nachlauf des Kraftfahrzeuges erkennt man einen Fokus, einen Sattelpunkt und einen Knoten. Die Überlagerung der Strömungsstruktur beider Schnittflächen sieht zunächst verwirrend aus. Mit einiger anschaulicher Vorstellungskraft lässt sich jedoch aus den dargestellten Schnittflächen die dreidimensionale Struktur der Nachlaufströmung des Kraftfahrzeuges konstruieren. Es bildet sich am Kofferraumdeckel ein Hufeisenwirbel aus, der sich in die Nachlaufströmung fortsetzt. Die Scherschicht zwischen Straße und Unterboden des Kraftfahrzeuges bildet im Windkanalexperiment den Bereich der Rückströmung, der stromab durch den Sattelpunkt (Schnittfläche A1) begrenzt wird.

Ein weiteres Beispiel beschreibt die *Strömungsstruktur eines angestellten Deltaflügels*, den man bei Überschallflugzeugen vorfindet (siehe Abschn. 8 des Kap. 5 ▸ Aerodynamik). Der aerodynamische Auftrieb wird im Wesentlichen durch den Unterdruck im Kern der an der Vorderkante des Flügels abgelösten

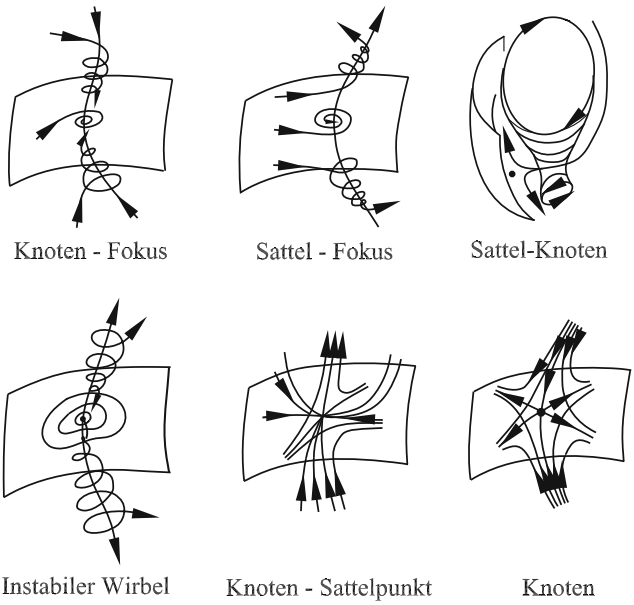


Abb. 1.38 Beispiele der Struktur dreidimensionaler Strömungen

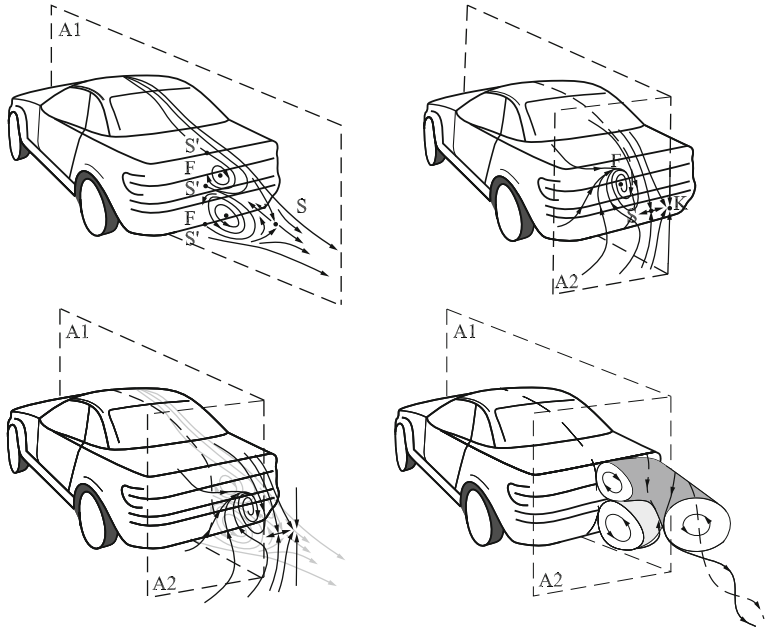


Abb. 1.39 Struktur der Nachlaufströmung eines Kraftfahrzeugs

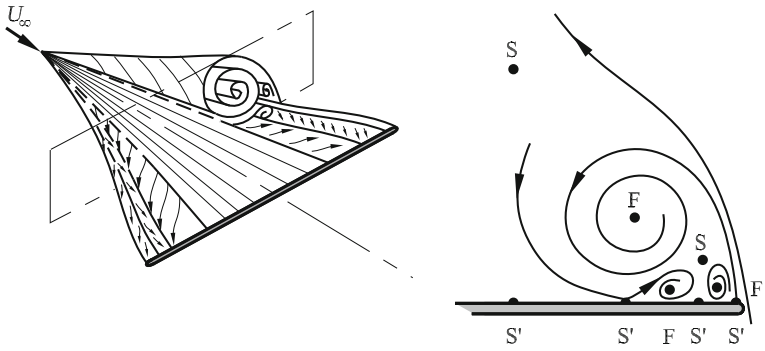


Abb. 1.40 Wandstromlinien und Struktur der Umströmung eines angestellten Deltaflügels

Wirbel erzeugt. Die Abb. 1.40 zeigt die primäre Wirbelablösung (Foki) sowie die Wiederanlegelinien auf dem Flügel, die durch die Konvergenz der Wandstromlinien sichtbar werden. Stromab der primären Vorderkantenablösung entsteht aufgrund der dreidimensionalen Querströmung auf dem Flügel eine Sekundärablösung, die auf jeder Flügelhälfte zu zwei weiteren Foki F und einem Sattel S führt. Die Struktur der Strömung weist also auf der Oberseite jedes Halbflügels insgesamt drei Foki, einen Sattel und die Halbsattel der Ablöse- und Wiederanlegelinien auf. Die Abströmung über dem Deltaflügel verursacht einen weiteren Sattelpunkt S. Die Wirbelstärke der Sekundärablösung ist jedoch gering gegenüber den Primärwirbeln, sodass von diesen die aerodynamischen Eigenschaften des Deltaflügels im Wesentlichen bestimmt werden.

Diese sehr komplexen Beispiele abgelöster Strömungen zeigen, wie nützlich es für die Beschreibung dieser Strömungen sein kann, ausschließlich auf der Basis der kinematischen Grundgleichungen Gl. (1.24) die Topologie mit den kritischen Punkten zu analysieren. Dabei handelt es sich nicht alleine um eine Beschreibung des Strömungsfeldes, sondern um eine wohl definierte Klassifizierung der Strömung.

Weiterführende Literatur

Bodensatz, E., Eckert, M.: Prandtl and the Göttingen School. In: Davidson, P.A., et al. (Hrsg.) A Voyage Through Turbulence. Cambridge University Press, Cambridge/New York (2011)

Flügge-Lotz, I., Flügge, W.: Ludwig Prandtl in the nineteen-thirties. Ann. Rev. Fluid Mech. **5**, 1–8 (1973)

Flügge-Lotz, I., Flügge, W.: Gedächtnisveranstaltung für Ludwig Prandtl aus Anlass seines 100. Geburtstags. Braunschweig (1975)

Görtler, H.: Ludwig Prandtl – Persönlichkeit und Wirken. ZFW **23**(5), 153–162 (1975)

Oswatitsch, K., Wieghardt,K.: Ludwig Prandtl and his Kaiser-Wilhelm-Institut. Ann. Rev. Fluid Mech. **19**, 1–25 (1987)

Prandtl, L.: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlg. III. Intern. Math. Kongr. Heidelberg, S. 574–584. Teubner, Leipzig (1905)

Prandtl, L.: Neue Untersuchungen über die strömende Bewegung der Gase und Dämpfe. Physikalische Zeitschrift **8**, 23 (1907)

Prandtl, L.: Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeiten. Physikalische Zeitschrift **11**, 1072–1078 (1910)
Prandtl, L.: Der Luftwiderstand von Kugeln. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse 177–190 (1914)
Prandtl, L.: Tragflügeltheorie. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse 451–477 (1918)
Prandtl, L.: Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalten zu Göttingen, Bd. 1. R. Oldenbourg, München/Berlin (1921)
Prandtl, L.: Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, Bd. 2. R. Oldenbourg, München/Berlin (1923)
Prandtl, L.: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. ZAMM **5**, 136–139 (1925)
Prandtl, L.: The Generation of Vortices in Fluids of Small Viscosity. J. R. Aeronaut. Soc. **31**, 720–741 (1927)
Prandtl, L.: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalten zu Göttingen, Bd. 3 (1927)
Prandtl, L.: Über Strömungen, deren Geschwindigkeiten mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar sind, Bd. 5, S. 65. Report of the Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University (1930)
Prandtl, L.: Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalten zu Göttingen, Bd. 4 (1932)
Prandtl, L.: Über Tragflügel kleinsten induzierten Widerstandes. ZFM **24**, 305 (1933)
Prandtl, L.: Allgemeine Betrachtungen über die Strömung zusammendrückbarer Flüssigkeiten. ZAMM **16**, 129 (1936)
Prandtl, L.: Theorie des Flugzeugtragflügels im zusammendrückbaren Medium. Luftfahrtforschung **13**, 313 (1936)
Prandtl, L.: Über Schallausbreitung bei rasch bewegten Körpern. Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung, Bd. 7 (1938)
Prandtl, L.: Bemerkungen zur Theorie der Freien Turbulenz. ZAMM **22**, 241–243 (1942)
Prandtl, L.: Über Reibungsschichten bei dreidimensionalen Strömungen. MoS RT 64. Betz Festschrift, Göttingen (1945)
Prandtl, L.: Mein Weg zu hydrodynamischen Theorien. Physikalische Blätter **4**, 89–92 (1948)
Schlichting, H.: Ludwig Prandtl und die Aerodynamische Versuchsanstalt (AVA). ZFW **23**(5), 162–167 (1975)
Sommerfeld, A.: Zu L. Prandtls 60. Geburtstag am 4. Februar 1935. ZAMM **15**, 1–2 (1935)
Tietjens, O.G., Prandtl, L.: Applied Hydro- and Aeromechanics. Based on Lectures of L. Prandtl. McGraw-Hill, New York (1934)
Tollmien, W.: Zu L. Prandtls 70. Geburtstag. ZAMM **24**, 185–188 (1944)
Tollmien, W.: Seventy-fifth anniversary of Ludwig Prandtl. J. Aeronaut. Sci. **17**, 121–122 (1950)
Tollmien, W., Schlichting, H., Görtler, H., Prandtl, L.: Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik. Hydro- und Aerodynamik, Bd. 1–3. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg (1961)
Vogel-Prandtl, J.: Ludwig Prandtl – Ein Lebensbild, Erinnerungen, Dokumente. Universitätsverlag Göttingen, 2005, The International Centre for Theoretical Physics, Trieste (2004)

Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit

2

Herbert Oertel Jr. und Martin Böhle

Zusammenfassung

Das Kapitel Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit führt systematisch in die Grundgleichungen der reibungsfreien Strömung des Lehrbuches und Nachschlagewerkes H. Oertel jr. (Hrsg.) Prandtl-Führer durch die Strömungslehre ein. Es werden die Kontinuitäts-, Bernoulli- und Potentialgleichung abgeleitet und Anwendungsbeispiele der reibungsfreien Strömung wie zum Beispiel der Tragflügelauftrieb und der Magnus Effekt behandelt. Die Bestimmung der integralen Kräfte erfolgt mit dem Impulssatz der stationären Strömung. Die Impulsmomente führen zur Eulerschen Turbinengleichung, eine der Grundgleichungen der Strömungsmaschinen. Das Kapitel endet mit der Behandlung von Wellen auf freien Oberflächen, die bei Schiffswellen und offenen Gerinnen auftreten.

1 Kontinuität und Bernoulli-Gleichung

Bei Strömungen verschwindet weder Materie, noch entsteht neue. Daher müssen die betrachteten Geschwindigkeitsfelder die Konstanz der Masse erfüllen. Am Einfachsten ist die Formulierung bei stationären Strömungen, wenn die Gestalt der Stromlinien bereits bekannt ist. Man betrachtet dann einen Stromfaden für den gilt, dass durch jeden Querschnitt in der Zeiteinheit gleich viel Masse strömt.

Baden-Baden, Deutschland
E-Mail: herbert.oertel@t-online.de

M. Böhle
Lehrstuhl Strömungsmechanik, Technische Universität Kaiserslautern, Kaiserslautern, Deutschland
E-Mail: martin.boehle@mv.uni-kl.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5_2

Wäre diese Masse in zwei Querschnitte nicht gleich, müsste der Masseninhalt des Stromfadens zwischen den zwei Querschnitten zu- oder abnehmen, was dem stationären Zustand widersprechen würde. Ist A der Querschnitt des Stromfadens an einer bestimmten Stelle, w die mittlere Geschwindigkeit in diesem Querschnitt und ρ die entsprechende Dichte, so ist das in der Zeiteinheit durch den Querschnitt fließende Fluidvolumen $A \cdot w$. Die in der Zeiteinheit hindurchfließende Masse ist $\rho \cdot A \cdot w$. Die *Kontinuität* fordert, dass $\rho \cdot A \cdot w$ in allen Querschnitten eines Stromfadens den gleichen Wert haben muss. Hieraus folgt, dass ein Stromfaden einer stationären Strömung im Innern des Fluids nicht aufhören kann. Er kann sich von einer Grenze des betrachteten Fluidraumes bis an eine andere Grenze dieses Raumes erstrecken, oder er kann in sich zurücklaufen.

Handelt es sich um inkompressible Strömungen, so gelten die Beziehungen für die durch einen Querschnitt fließende Masse auch für das Volumen. Da zu keinem Zeitpunkt durch einen Querschnitt eines Stromfadens mehr Volumen hindurchfließen kann als durch einen anderen Querschnitt, kann hier auch die Beschränkung auf stationäre Strömungen wegfallen. Für inkompressible Strömungen gilt allgemein

$$A \cdot w = konst., \tag{2.1}$$

d. h. die Geschwindigkeit ist dem Querschnitt des Stromfadens umgekehrt proportional. Teilt man den ganzen vom Fluid durchströmten Raum in lauter Stromröhren auf, durch die in der Zeiteinheit gleiche Fluidmengen fließen, werden sich bei großen Geschwindigkeiten viele Stromfäden zusammendrängen und dort wo die Geschwindigkeit klein ist, werden sie sich entsprechend weiter ausdehnen. Die Zahl der Stromfäden, die durch eine Flächeneinheit treten, ist proportional zu der Geschwindigkeit an diesem Ort. Das Stromröhrenbild dient somit bei der inkompressiblen Strömung nicht nur durch seine Richtung an jedem Ort, sondern auch durch die Dichte der Stromröhren zur Veranschaulichung der Strömung.

Die hier erörterten Beziehungen sind besonders nützlich, wenn man die ganze Strömung als einen einzigen Stromfaden behandeln darf. Die vorgegebenen Querschnitte entsprechen den Stromfadenquerschnitten. Aus der Beziehung

$$A \cdot w = \dot{V}$$

lässt sich die mittlere Geschwindigkeit an jeder Stelle einer derartigen inkompressiblen Strömung ermitteln. Dabei bedeutet $\dot{V}$ das in der Zeiteinheit geförderte Volumen.

Für kompressible Strömungen gilt in gleicher Weise

$$\rho \cdot A \cdot w = \dot{M},$$

mit der in der Zeiteinheit geförderten Masse $\dot{M}$. Da in diesem Fall die Dichte ρ meistens erst in Verbindung mit dem Druck bestimmt werden kann, lässt sich die

Geschwindigkeit nicht allein aus der Kontinuität ermitteln (siehe Kap. 4 ▸ Dynamik der Gase).

In dieser Darstellung hat man, wenn es sich um stationäre inkompressible Strömungen handelt, nur noch eine unabhängige Veränderliche, nämlich die längs der Röhrenmittellinie gemessene Entfernung des betreffenden Querschnitts von einem beliebigen Anfangspunkt. Man spricht in diesem Zusammenhang von *eindimensionaler Behandlung*, im Gegensatz zu der dreidimensionalen Behandlung, bei der die räumliche Veränderung der Geschwindigkeit und der übrigen Größen berücksichtigt wird. Für Wasser fasst man die Gesamtheit der eindimensionalen Strömungen unter dem Sammelnamen *Hydraulik* zusammen. Die dreidimensionalen Strömungen werden dagegen unter dem Begriff *Hydrodynamik* zusammengefasst. Für Strömungen, die in dem Gebiet der Luftfahrt und in anderen Anwendungsgebieten der Luftströmungen vorkommen, verwendet man den Namen *Aerodynamik*.

Grenzt das Fluid an einer Stelle gegen einen festen Körper oder gegen ein anderes Fluid, so verlangt die Kontinuität, dass dort weder eine Lücke entsteht, noch dass beide Fluide sich durchdringen. Um beides zu vermeiden, müssen die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Grenzfläche auf beiden Seiten dieser Grenzfläche übereinstimmen. Handelt es sich um ruhende Körper im strömenden Fluid oder um feste Wände, muss die Geschwindigkeitskomponente des Fluids senkrecht zur Körperoberfläche oder zur Wand an der Grenzfläche verschwinden. Die zur Wand parallele Geschwindigkeitskomponente kann von der Kontinuität her jeden beliebigen Wert annehmen.

Im Folgenden werden die Kräfte in einer strömenden Flüssigkeit betrachtet. Die beiden auf eine ruhende Flüssigkeit wirkenden Kräfte *Schwerkraft* (und andere Massenkräfte) und *Druckkraft*, die dort im Gleichgewicht stehen, finden sich auch bei der bewegten Flüssigkeit. Zusätzlich tritt die *Flüssigkeitsreibung* hinzu, die als Widerstand gegen Formänderung anzusehen ist. Davon wird in dem Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten noch ausführlich die Rede sein. Für die Betrachtungen dieses Kapitels soll die Reibung jedoch vernachlässigt werden. Die technisch wichtigsten Fluide (Wasser, Luft usw.) haben eine sehr geringe Zähigkeit und zeigen in einigen Fällen nur sehr geringe Reibungswiderstände, so dass deren Vernachlässigung berechtigt erscheint. Deshalb werden die grundlegenden Gesetze der strömenden Bewegung für die *reibungsfreie Flüssigkeit* entwickelt. Erst danach werden die Änderungen durch das Vorhandensein der Reibung (siehe Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten) behandelt. Darum ist im Folgenden die *reibungsfreie Flüssigkeit* zugrunde gelegt. Zunächst wird eine inkompressible Strömung betrachtet.

Um die dynamische Beziehung zwischen dem Druck und der Massenkraft einerseits und dem Bewegungszustand andererseits zu entwickeln, wird an die *Newtonsche Gleichung: Kraft = Masse · Beschleunigung* angeknüpft, die Grundlage der Dynamik ist. Es sollen die gleichzeitigen Zustände längs eines Stromfadens berechnet werden. Dazu benötigt man die Beschleunigungskomponente in der Bewegungsrichtung, die in dem Abschn. 3 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik für die dreidimensionale Strömung bereitgestellt wurde. Für die eindimensionale Strömung wird die Bogenlänge entlang der Stromlinie mit s, die

Zeit mit t und die Geschwindigkeit mit w bezeichnet. Die Geschwindigkeitsänderung bei gleichzeitiger Änderung von s um ds und t um dt ist dann

$$\mathrm{d}w = \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \mathrm{d}s + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \mathrm{d}t.$$

Dabei ist $\partial w/\partial t$ der partielle Differentialquotient (bei festgehaltenem s), dw/dt der totale Differentialquotient (bei festgehaltenem Fluidelement).

Daraus resultiert für die Beschleunigung

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = w \cdot \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{2.2}$$

$w \cdot (\partial w/\partial s)$ ist der Beschleunigungsanteil, der dadurch entsteht, dass sich das Teilchen an Orte mit anderer Geschwindigkeit bewegt. $\partial w/\partial t$ ist der Anteil der zeitlichen Änderung des Strömungszustandes am festen Ort. Bei stationären Strömungen ist der zweite Anteil gleich Null. Der erste Anteil kann auch in der Form $\partial(w^2/2)/\partial s$ geschrieben werden.

Zur Anwendung der Gleichung Kraft = Masse · Beschleunigung wird aus der strömenden Flüssigkeit wieder ein Zylinderelement mit dem Querschnitt dA und der Länge ds heraus gegriffen. Ähnlich wurde dies bereits bei der Gleichgewichtsbetrachtung in dem Abschn. 2 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik gemacht. Die Achse des Zylinderelements liegt in Strömungsrichtung (Abb. 2.1). Die Masse des Zylinderelements ist $\rho \cdot \mathrm{d}A \cdot \mathrm{d}s$.

An dem Zylinderelement wirken, wenn die Bewegung reibungsfrei ist, eine Druckkraft infolge des Druckunterschieds und eine Massenkraft. Der Druck an dem stromaufwärts gelegenen Ende des Zylinderelements habe den Wert p. Er wirkt dann auf die dortige Endfläche dA mit einer Kraft $p \cdot \mathrm{d}A$. An dem stromabwärts gelegenen Ende hat der Druck den Wert $p + (\partial p/\partial s) \cdot \mathrm{d}s$, so dass sich die Resultierende aus den beiden Druckkräften zu $p \cdot \mathrm{d}A - (p + (\partial p/\partial s) \cdot \mathrm{d}s) \cdot \mathrm{d}A =$

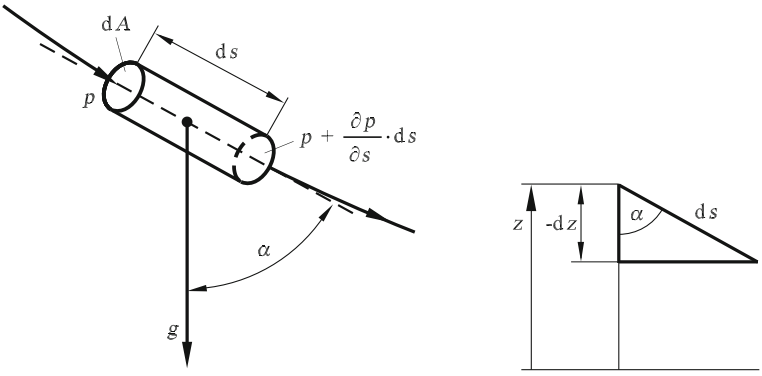


Abb. 2.1 Kräftebilanz an einem Zylinderelement

$-(\partial p/\partial s) \cdot \mathrm{d}s \cdot \mathrm{d}A$ ergibt. Auf die Flüssigkeit wirkt ferner eine Massenkraft, deren Wirkung auf die Masseneinheit gleich g ist (z. B. die Erdschwere). Schließt die Richtung der Massenkraft mit der Strömungsrichtung einen Winkel α ein, so erfährt die Masse $\rho \cdot \mathrm{d}A \cdot \mathrm{d}s$ in Richtung der Bewegung eine Kraftkomponente:

$$\rho \cdot \mathrm{d}A \cdot \mathrm{d}s \cdot g \cdot \cos(\alpha).$$

In der Gleichung Kraft = Masse · Beschleunigung hat jetzt jedes Glied den Faktor $\mathrm{d}A \cdot \mathrm{d}s$, der infolgedessen herausfällt (d. h. das Volumen des willkürlich gewählten Zylinderelements ist für das Ergebnis ohne Belang). Dividiert man durch ρ, ergibt sich:

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + g \cdot \cos(\alpha) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{w^2}{2}\right) + \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{2.3}$$

Gewöhnlich handelt es sich bei der Massenkraft nur um die Schwerkraft. Dann ist g nach Größe und Richtung konstant, und für $\cos(\alpha)$ kann, mit der vertikalen Koordinate z (Abb. 2.1) $-\partial z/\partial s$ geschrieben werden.

Handelt es sich um eine stationäre Strömung ($\partial w/\partial t = 0$) und wird die Dichte ρ als konstant vorausgesetzt, so sind sämtliche Glieder Differentialquotienten nach s. Die Gl. (2.3) kann dann *längs des Stromfadens* integriert werden. Aus

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + g \cdot \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{w^2}{2}\right) = 0$$

erhält man

$$\frac{p}{\rho} + g \cdot z + \frac{w^2}{2} = \text{konst.}. \tag{2.4}$$

Diese Gleichung, die als *Bernoulli-Gleichung* bezeichnet wird, ist die Grundgleichung für die eindimensionale Behandlung von reibungsfreien Strömungen. Dividiert man alle Glieder der Gl. (2.4) durch g, haben die Summanden die Dimension einer Länge und erhalten die Bedeutung von Höhen. Führt man wie im vorigen Kapitel das Gewicht der Volumeneinheit $\rho \cdot g = \gamma$ ein, so erhält die Bernoulli-Gleichung die Form:

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{w^2}{2 \cdot g} = \text{konst.}. \tag{2.5}$$

p/γ bedeutet nach Abschn. 2 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik die Höhe einer Flüssigkeitssäule, die durch ihr Gewicht den Druck p erzeugt, und heißt deshalb *Druckhöhe*. z ist die Höhe des betrachteten Ortes über einer beliebig festgesetzten Horizontalebene und wird *Ortshöhe* genannt. $w^2/(2 \cdot g)$ ist die Höhe, um die ein Körper herunterfallen muss, um die Geschwindigkeit w durch den freien Fall

zu erlangen, und heißt daher *Geschwindigkeitshöhe*. Nach der Bernoulli-Gleichung ist die Summe der Druckhöhe, der Ortshöhe und der Geschwindigkeitshöhe entlang einer Stromlinie konstant. Der Wert der Konstanten kann dabei von Stromlinie zu Stromlinie verschieden sein. Dieses tritt besonders dann auf, wenn die Stromlinien verschiedenen Ursprung haben. Kommen alle Stromlinien aus einem Raum, in dem statische Verhältnisse (d. h. Ruhe oder gleichförmige geradlinige Bewegung) herrschen, ist die Konstante für alle Stromlinien gleich. Die Bernoulli-Gleichung gilt dort auch quer zu den Stromlinien im ganzen Raum. Gemäß Abschn. 2 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik ist in einer ruhenden Flüssigkeit $p/\gamma + z = \text{konst}$. Dieses stimmt mit der Bernoulli-Gleichung für $w = 0$ oder $w = \text{konst}$. überein. Der hier beschriebene spezielle Strömungszustand ist mit der später behandelten stationären Potentialbewegung identisch.

Für andere Massenkräfte ist, wenn sie ein Potential U besitzen, die Integration ebenfalls durchführbar, da $g \cdot \cos(\alpha)$ dann gleich $-\partial U/\partial s$ gesetzt werden kann. Handelt es sich um eine kompressible Strömung, so ist die Integration ebenfalls möglich, wenn die Strömung homogen ist, d. h. die Dichte nur allein vom Druck abhängt. Dann ist $\int(\mathrm{d}p/\rho) = \mathrm{F}(p)$ eine Funktion des Druckes und es gilt $(1/\rho) \cdot (\partial p/\partial s) = \partial \mathrm{F}/\partial s$. Durch die Integration nach s ergibt sich die allgemeine Form der Bernoulli-Gleichung für stationäre Bewegungen:

$$\mathrm{F} + U + \frac{w^2}{2} = \text{konst.}. \tag{2.6}$$

2 Folgerungen aus der Bernoulli-Gleichung

Die Bernoulli-Gleichung liefert für eine große Anzahl von Anwendungen in sehr einfacher Weise eine Lösung. Im Folgenden sind Beispiele angeführt.

2.1 Ausfluss aus einem Gefäß unter dem Einfluss der Schwere

Verfolgt man in dem Gefäß der Abb. 2.2 die Stromlinien von der Ausflussmündung B stromauf, erkennt man, dass sie zum Wasserspiegel A hinführen, der sich mit dem Ausströmen der Wassermasse senkt. Die Wasserteilchen bei A stehen wie die Teilchen in dem freien Strahl bei B unter dem Atmosphärendruck p_0. Das Gewicht der Luft ist dabei vernachlässigt worden. Dies ist möglich, wenn es ausreicht, den Druck nur bis zur zweiten Dezimale genau anzugeben. Die Geschwindigkeit bei A ist, wenn die Fläche des Wasserspiegels groß gegen die der Mündung bei B ist, so klein, dass ihr Quadrat gegenüber dem der Geschwindigkeit bei B vernachlässigt werden kann. Die Bernoulli-Gleichung liefert, mit z_A und z_B als Ortshöhen von A und B:

$$\frac{p_0}{\rho} + g \cdot z_\mathrm{B} + \frac{w_\mathrm{B}^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + g \cdot z_\mathrm{A} + 0.$$

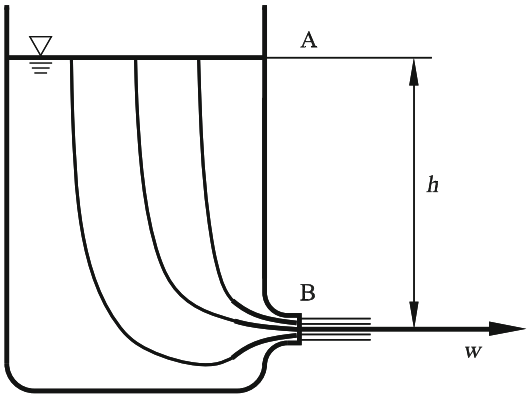


Abb. 2.2 Ausfluss aus einem Gefäß

Es ergibt sich mit $z_A - z_B = h$:

$$\frac{w_B^2}{2 \cdot g} = z_A - z_B = h$$

oder

$$w_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}. \tag{2.7}$$

Die Geschwindigkeit bei B ist damit so groß, als ob das ausfließende Wasserteilchen die Höhe h frei durchfallen hätte. Die in Gl. (2.7) angegebene Beziehung wird *Torricellische Ausflussformel* genannt.

Der Querschnitt des Strahls stimmt in der Regel nicht mit dem des Loches überein. Bei einem Strahl, der z. B. aus einer kreisförmigen Öffnung in einer dünnen Wand kommt, beträgt der Strahlquerschnitt etwa das 0.61 bis 0.64 fache des Lochquerschnitts. Dieses Verhalten, auch *Kontraktion* genannt, kommt daher, dass die Flüssigkeit im Innern des Gefäßes radial auf das Loch zuströmt und am Lochrand nicht plötzlich von der radialen Richtung in die Richtung der Strahlachse umgelenkt werden kann. In den oberen Bildern von Abb. 2.3 sind solche Strömungen dargestellt. Im Fall einer abgerundeten Öffnung kann sich die Umlenkung der Stromfäden innerhalb der Mündung vollziehen. Die Kontraktion ist ungefähr gleich 1. Die durch eine Öffnung vom Querschnitt A pro Sekunde ausfließende Menge $\dot{V}$ (Volumen pro Sekunde) ist

$$\dot{V} = \alpha \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h},$$

mit der Kontraktion α. Bei einer nicht kreisförmigen Öffnung in einer dünnen Wand weicht α meist nur wenig von dem Wert einer kreisförmigen Öffnung ab, aber die Strahlformen, die sich dabei ausbilden, sind in der Regel komplizierter. Der Strahl, der aus einem quadratischen Loch kommt, formt sich z. B. in einen dünnen kreuzförmigen Querschnitt um. Der Strahl, der aus dem rechteckigen Loch ausströmt, bildet ein Band, das auf der langen Rechteckseite senkrecht steht.

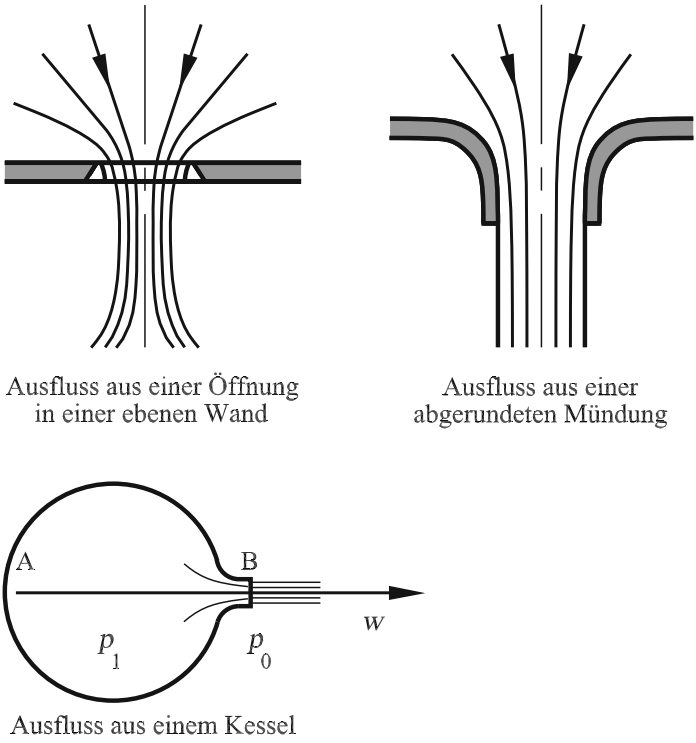


Abb. 2.3 Ausflussströmungen

2.2 Ausfluss aus einem Gefäß unter dem Einfluss eines inneren Überdruckes

Das Gefäß im unteren Bild der Abb. 2.3 steht unter dem Druck p_1. Im Außenraum herrscht der Atmosphärendruck p_0. Für eine Stromlinie, die waagerecht verläuft, gilt $z_A = z_B$. Wird wiederum die Geschwindigkeit bei A als vernachlässigbar klein angesehen, ergibt die Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + 0,$$

d. h.

$$w = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_0)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (p_1 - p_0)}{\gamma}}. \tag{2.8}$$

Bezeichnet man die Höhe $(p_1 - p_0)/\gamma$, d. h. die Höhe einer Flüssigkeitssäule mit dem spezifischen Gewicht γ, zwischen deren oberen und unteren Ende

der Druckunterschied $p_1 - p_0$ beträgt, mit h, erhält man aus Gl. (2.8) wieder $w = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$.

Die Gl. (2.8) ermöglicht es die Größe derjenigen Geschwindigkeit abzuschätzen, bis zu der es noch erlaubt ist, ein Gas als inkompressible Flüssigkeit zu behandeln. Die Grenzgeschwindigkeit w_1 hängt von der Größe der Dichteschwankung ab, die noch zugelassen werden kann. Wegen $p \cdot V^\kappa = \text{konst.}$ oder $p = \text{konst.} \cdot \rho^\kappa$ gilt $\Delta p/p \approx \kappa \cdot \Delta\rho/\rho$. Daraus folgt $\Delta p \approx \kappa \cdot p_0 \cdot \Delta\rho/\rho$. Wählt man als zulässige Dichteänderung $\Delta\rho/\rho = 0.01$, ergibt sich für Luft bei Normaldruck von $p_0 = 1\ bar = 10^5\,\mathrm{N/m^2}$ eine Druckdifferenz von $\Delta p = 1.405 \cdot 10^5 \cdot 0.01\,\mathrm{N/m^2} = 1.405 \cdot 10^3\,\mathrm{N/m^2}$. Mit einem Mittelwert von $\rho = 1.21\,\mathrm{Ns^2/m^4}$ erhält man für die Grenzgeschwindigkeit:

$$w_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}} = \sqrt{2322\,\mathrm{m^2/s^2}} \approx 48\,\mathrm{m/s}.$$

Lässt man 10 % Dichteänderung zu, erhält man eine $\sqrt{10}$ mal größere Geschwindigkeit, d. h. ca. 150 m/s. Die Dichteänderungen wirken auf zweierlei Arten. Kinematisch ändern sich die Stromfadenquerschnitte und dynamisch wird die Größe der zu einer Beschleunigung gehörenden Druckänderung beeinflusst.

2.3 Staupunktströmung

Befindet sich in einer gleichförmigen Flüssigkeitsströmung von der Geschwindigkeit w_0 ein Körper, so staut sich unmittelbar vor dem Körper die Strömung auf und verzweigt nach allen Seiten, um den Körper zu umströmen (Abb. 2.4). Im Mittelpunkt des Staugebietes, dem *Staupunkt*, kommt die Strömung völlig zur Ruhe. Die Bernoulli-Gleichung liefert also für die durch den Staupunkt gezogene Stromlinie, mit dem Druck p_S am Staupunkt und dem ungestörten Druck p_∞ der Anströmung in gleicher Höhe:

$$\frac{p_S}{\rho} + 0 = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{w_\infty^2}{2}, \qquad \text{also} \qquad p_S = p_\infty + \rho \cdot \frac{w_\infty^2}{2}.$$

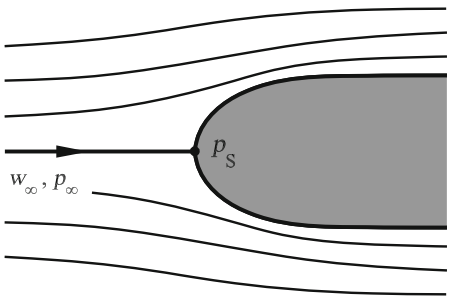
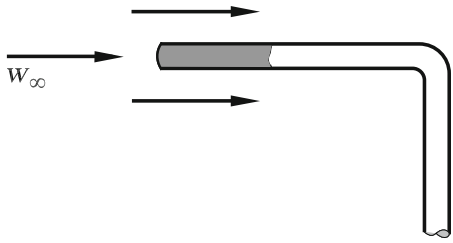


Abb. 2.4
Staupunktströmung

Abb. 2.5 Pitot-Rohr



Die Druckerhöhung $p_S - p_\infty = \rho \cdot w_\infty^2/2$ führt den Namen *Staudruck* oder *dynamischer Druck*. Die Messung dieses Druckanstieges ist eine Methode zur Bestimmung von Strömungsgeschwindigkeiten. Wird ein Körper mit der Geschwindigkeit U_∞ durch die ruhende Luft (oder Flüssigkeit) bewegt, so ergibt sich im mitbewegten Bezugssystem die oben beschriebene Strömung. Dabei ist die Geschwindigkeit w_∞ entgegengesetzt zu U_∞ gerichtet und dem Betrag nach gleich groß. Deshalb wird auch in diesem Fall eine Druckerhöhung von $\rho \cdot U_\infty^2/2$ beobachtet. Weist das Hindernis am Staupunkt eine Anbohrung auf, so pflanzt sich der Druck p_S durch diese ins Innere fort und kann zu einem Messinstrument geleitet werden. Zur Messung des Druckes $p_S = p + \rho \cdot w^2/2$ in einer Strömung genügt ein umgebogenes Rohr (Abb. 2.5), das nach seinem Erfinder *Pitot-Rohr* genannt wird.

Man kann jedem Punkt der strömenden Flüssigkeit, außer dem dort vorliegenden Druck p (den ein mit der Flüssigkeit mitbewegtes Druckmessgerät anzeigen würde), auch den Druck p_S zuordnen, den ein dort angebrachtes Pitot-Rohr liefern würde. Den Druck p bezeichnet man als *statischen Druck*, den Druck p_S als *Gesamtdruck*. Es gilt somit: *Gesamtdruck = statischer Druck + dynamischer Druck*. Aus der Bernoulli-Gleichung

$$\frac{p}{\rho} + g \cdot z + \frac{w^2}{2} = \text{konst.}$$

ergibt sich durch Einführung des Gesamtdruckes $p_S = p + \rho \cdot w^2/2$,

$$\frac{p_S}{\rho} + g \cdot z = \text{konst.} \qquad \text{oder} \qquad p_S + \gamma \cdot z = \text{konst.},$$

d. h. p_S ist nach statischen Gesetzen verteilt. Das bedeutet, dass p_S in jeder Horizontalebene konstant ist, wenn alle Stromlinien dieselbe Konstante haben.

Um die hergeleiteten Beziehungen zur Bestimmung von Strömungsgeschwindigkeiten zu benutzen, benötigt man neben der Bestimmung von p_S auch die Messung des statischen Druckes p. Dieses ist viel schwieriger als die Bestimmung von p_S, da der statische Druck durch das Einbringen einer Sonde gerade an der Stelle gestört wird, an der er gemessen werden soll. Über die Durchführung solcher Druckmessungen vgl. Abschn. 3.

Die folgenden Überlegungen sind nicht auf reibungsfreie Flüssigkeiten beschränkt, sondern gelten (unter Umständen mit geringen Änderungen) auch für

mäßig stark reibungsbehaftete Flüssigkeiten. Die erste Betrachtung setzt aber eine inkompressible Flüssigkeit von konstanter Dichte voraus.

Der Druck in einer solchen Flüssigkeit kann in zwei Anteile aufgespaltet werden, von denen der eine den Druck darstellt, der sich einstellen würde, wenn die Flüssigkeit in Ruhe wäre. Dieser Gleichgewichtsdruck wird mit p' bezeichnet. Es gilt $p' = \text{konst.} - \gamma \cdot z$. Setzt man nun den tatsächlich wirkenden Druck in der strömenden Flüssigkeit $p = p' + p^*$, so stellt p^* den Unterschied des Druckes im Bewegungsfall gegenüber dem in der Ruhe dar. Ist die Bernoulli-Gleichung anwendbar, d. h. $p + \gamma \cdot z + \rho \cdot w^2/2 = \text{konst.}$, folgt unter Berücksichtigung des Wertes von p': $p^* + \rho \cdot w^2/2 = \text{konst.}$. Damit verteilt sich p^* wie bei einer mit träger Masse behafteten, aber schwerelosen Flüssigkeit. Die Ortshöhe z hat auf p^* keinen Einfluss. Jedes Teilchen einer schweren Flüssigkeit wird durch den Auftrieb, den es von seinen Nachbarteilchen erfährt, gerade in der Schwebe gehalten. Dieses Ergebnis lässt sich auch auf reibungsbehaftete Strömungen übertragen. In den folgenden Betrachtungen werden deshalb bei Bewegungen in Wasser oder in Luft die Wirkungen des Schwerefeldes nicht berücksichtigt. Das bedeutet, dass statt des Druckes p immer der Druckunterschied p^* betrachtet wird. Zur Vereinfachung wird aber statt p^* wieder p geschrieben.

Wird bei einer Luft- oder Wasserströmung der Druck durch außen liegende ruhende Druckmessgeräte ermittelt, zu denen von der beweglichen Druckentnahmestelle (Sonde) Rohrleitungen führen, wirkt das Gewicht der Flüssigkeit in den Rohrleitungen derart, dass der angezeigte Druck unabhängig von der Höhenlage der Druckentnahme ist. Das Gerät zeigt demnach einen Druck von der Art wie p^* an. Ist die Sonde ein gegen die Strömung gerichtetes Pitot-Rohr, zeigt das ruhende Gerät auf einer Stromlinie konstanten Druck an. Haben alle Stromlinien dieselbe Konstante, ist die Druckanzeige für das ganze Gebiet gleich.

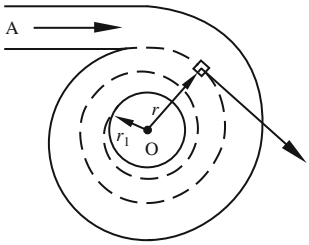
2.4 Strömung in einem Spiralgehäuse

Die Bernoulli-Gleichung behandelt die Drücke längs einer Stromlinie. Über die Druckunterschiede in einer *Richtung quer zur Strömung* lässt sich ebenfalls eine Aussage gewinnen, wenn man statt der Longitudinalbeschleunigung die Transversalbeschleunigung betrachtet. Diese hat die Richtung der Hauptnormalen zur Bahnkurve und den Betrag w^2/r. Dabei ist r der Krümmungsradius der Bahnkurve. Durch die Betrachtung der Kräfte an einem Prismenelement, dessen Achse in Richtung der Hauptnormalen liegt, ergibt sich aus den Komponenten in Richtung des Radius r:

$$\frac{w^2}{r} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s'}. \tag{2.9}$$

Dabei ist $\mathrm{d}s'$ ein Abstandselement in Richtung der Hauptnormalen. p ist im Sinne von p^* aufzufassen. Die Gl. (2.9) bringt die Wirkung der Zentrifugalkraft in einer krummlinigen Strömung zum Ausdruck. Der Druck steigt in radialer Richtung an,

Abb. 2.6 Spiralgehäuse



und zwar um $\rho \cdot w^2/r$ pro Längeneinheit. Diese Beziehung verknüpft nebeneinander liegende Stromfäden. Wichtig ist die Feststellung, dass bei einer *geradlinigen Strömung* ($r = \infty$) *kein Druckunterschied quer zur Strömungsrichtung entsteht*. Für den bereits besprochenen Sonderfall, dass die Konstante der Bernoulli-Gleichung für alle Stromlinien denselben Wert hat, ergibt sich bei einer krummlinigen Strömung ein besonders einfaches Ergebnis. Hier lässt sich aus $\int(\mathrm{d}p/\rho) + w^2/2 = \text{konst.}$ Gl. (2.4) durch Differentiation nach s' ein zweiter Ausdruck für $(1/\rho)\cdot\partial p/\partial s'$ herleiten, nämlich $(1/\rho)\cdot\partial p/\partial s' = -w\cdot\partial w/\partial s'$. Durch Einsetzen in Gl. (2.9) ergibt sich:

$$\frac{\partial w}{\partial s'} + \frac{w}{r} = 0. \tag{2.10}$$

Hieraus folgt, wie später auch in Abschn. 5 gezeigt wird, dass bei einer gekrümmten Strömung die einzelnen Flüssigkeitselemente keine Drehung erfahren. Die Zirkulation längs eines aus zwei Radienstücken von der Länge $\mathrm{d}s'$ und zwei Stromlinienbögen gebildeten Rechtecks verschwindet, wenn Gl. (2.10) erfüllt ist.

Als Beispiel wird die *Strömung in einem Spiralgehäuse* (siehe Abb. 2.6) betrachtet. Alle Stromlinien beginnen in der Parallelströmung bei A. Die Geschwindigkeit soll auf allen Stromfäden gleich sein, so dass bei Druckgleichheit in der Parallelströmung die Bernoulli-Konstante auf allen Stromlinien dieselbe ist. Die Krümmungsradien der einzelnen Stromlinien können näherungsweise gleich dem vom Mittelpunkt O ausgehenden Radius r und das Bogenelement $\mathrm{d}s'$ kann gleich $\mathrm{d}r$ gesetzt werden. Dann ist $\mathrm{d}w/\mathrm{d}r + w/r = 0$, oder $\mathrm{d}w/w = -\mathrm{d}r/r$. Durch Integration ergibt sich $\ln(w) = \ln(\mathrm{C}) - \ln(r)$, d. h. $w = \mathrm{C}/r$, mit der Integrationskonstanten C. Die Geschwindigkeit nimmt zum Mittelpunkt hin zu. Die Radialkomponente der Geschwindigkeit ist bei konstanter Höhe des Spiralgehäuses wegen der Kontinuität ebenfalls proportional $1/r$. Damit ist der Winkel der Stromlinien mit den Radien überall derselbe und die Stromlinien sind logarithmische Spiralen. Den Druck erhält man aus der Bernoulli-Gleichung zu $p = \text{konst.} - \rho\cdot\mathrm{C}^2/(2\cdot r^2)$. Tritt die Flüssigkeit auf dem Innenradius r_1 des Gehäuses in die Umgebung mit dem Druck p_0 aus, berechnet sich der Druck an einer anderen Stelle in dem Spiralgehäuse mit

$$p = p_0 + \rho\cdot\frac{\mathrm{C}^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2}\right).$$

Bei kleinen Radien des Ausströmloches können sehr große Überdrücke bei A auftreten.

2.5 Instationäre Strömung

Für *instationäre Strömungen* tritt bei der Änderung des Strömungszustandes ein zusätzlicher Druckterm zu den bisherigen Drücken hinzu. Die Betrachtung wird hier auf die longitudinale Beschleunigung beschränkt, in der nach Gl. (2.2) das Glied $\partial w/\partial t$ (zeitliche Geschwindigkeitsänderung am festgehaltenen Ort) hinzukommt. Mit den Überlegungen, die zur Bernoulli-Gleichung geführt haben, kommt ausgehend von der vollständigen Gl. (2.3), in Gl. (2.4) auf der linken Seite das Glied $\int_0^s (\partial w/\partial t) \cdot \mathrm{d}s$ hinzu. Handelt es sich um ein Rohr mit konstantem Querschnitt, in dem in jedem Querschnitt die gleiche Geschwindigkeit vorliegt (über die Querschnitte soll die Geschwindigkeit auch konstant angenommen werden, da Reibungsfreiheit vorausgesetzt ist), ist $\partial w/\partial t$ unabhängig vom Ort. Das Integral kann gleich $(\mathrm{d}w/\mathrm{d}t) \cdot s$ gesetzt werden.

Ein Beispiel ist der Beginn des *Ausfließens durch ein Ansatzrohr* von der Länge l (Abb. 2.7). Längs der waagerecht angenommenen Rohrachse gilt:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \cdot s = \text{konst.} = \frac{p_\infty}{\rho} + g \cdot h.$$

Solange $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ von Null verschieden ist, sinkt der Druck p längs des Rohres proportional zu s ab. Der Druck am Rohrende ($s = l$) ist gleich dem Umgebungsdruck p_∞. Es gilt:

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{w^2}{2} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \cdot l = \frac{p_\infty}{\rho} + g \cdot h,$$

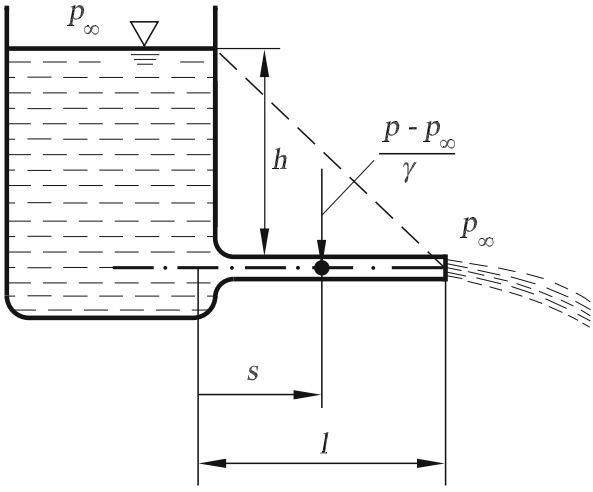


Abb. 2.7 Beginn des Ausfließens

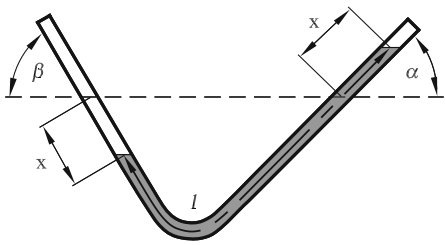


Abb. 2.8 Schwingung einer Wassersäule

d. h.

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{l} \cdot \left(g \cdot h - \frac{w^2}{2} \right). \tag{2.11}$$

Zu Beginn des Ausströmens ergibt sich die einfache Beziehung $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t = g \cdot h/l$ da $w = 0$ ist. Mit Anwachsen von w nimmt $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ immer mehr ab und geht für große Werte von t gegen Null, d. h. die Strömung wird stationär und w wird gleich $\sqrt{2 \cdot g \cdot h}$. Das genaue zeitliche Anwachsen von w erhält man durch Integration der Gl. (2.11). Dieses soll aber hier nicht betrachtet werden. Eine Abschätzung der Zeit T, die näherungsweise bis zum Erreichen des stationären Zustands vergeht, ergibt sich wie folgt. Man nimmt eine konstante Beschleunigung $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ bis zum Erreichen von $w_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ an. Damit kann w_1/T an Stelle von $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ in die Gl. (2.11) eingeführt werden. Man erhält zur Zeit $t = 0$:

$$T = \frac{w_1 \cdot l}{g \cdot h} = \frac{2 \cdot l}{w_1}.$$

Ein anderes Beispiel der instationären Strömung einer Flüssigkeit ist die *Schwingung einer Flüssigkeitssäule* in einem gebogenen, an beiden Enden offenen Rohr unter dem Einfluss des Schwerefeldes der Erde (Abb. 2.8). Das Rohr hat einen konstanten Querschnitt. Die Länge der Flüssigkeitssäule entlang der Rohrachse ist l. Der Ausschlag zu einem Zeitpunkt in Richtung der Rohrachse ist x. Wegen der Kontinuität ist der Ausschlag an beiden Enden und auch für jede Zwischenstelle gleich. Die Geschwindigkeit ist überall dieselbe, nämlich $w = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, d. h. $w \cdot \partial w/\partial s = 0$. Damit ist die Beschleunigung $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$. Das rechte Ende ist um $h_1 = x \cdot \sin(\alpha)$ gegenüber dem Nullniveau angehoben, das andere Ende um $h_2 = x \cdot \sin(\beta)$ abgesenkt. Die Höhendifferenz zwischen den Flüssigkeitsspiegeln an den Enden ist $h_1 + h_2 = x \cdot (\sin(\alpha) + \sin(\beta))$. Der Druck ist an beiden Enden der Umgebungsdruck p_∞. Die erweiterte Bernoulli-Gleichung, auf die Enden angewendet, ergibt:

$$g \cdot x \cdot (\sin(\alpha) + \sin(\beta)) + l \cdot \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung, die mit dem Ergebnis für die elastische Schwingung übereinstimmt, ist $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \vartheta)$, mit $\omega = \sqrt{g \cdot (\sin(\alpha) + \sin(\beta))/l}$. Daraus folgt eine Schwingungszeit von

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g \cdot (\sin(\alpha) + \sin(\beta))}}.$$

Für ein senkrechtes U-Rohr ($\sin(\alpha) = \sin(\beta) = 1$) ist $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{l/(2 \cdot g)}$. Dieses entspricht der Schwingungsdauer eines Pendels von der halben Länge der Flüssigkeitssäule.

3 Druckmessung

Für die Druckmessung ist der in Abb. 2.9 dargestellte Fall eines umströmten Schlitzes von Interesse. Zu Beginn der Bewegung der Flüssigkeit entsteht eine Strömung im Schlitz (Abb. 2.9 links). Dabei bilden sich an den Kanten zunächst Wirbel und Trennflächen. Nachdem die Wirbel abgeschwemmt worden sind, bleibt unter der Voraussetzung, dass die Entfernung der beiden Kanten klein genug ist, eine Strömung entsprechend dem rechten Bild der Abb. 2.9. In dem Einschnitt herrscht praktisch Ruhe. Der Druck im Schlitz ist gleich dem Druck in der strömenden Flüssigkeit, da er in dem ruhenden Teil konstant ist und in der Trennfläche stetig in den der strömenden Flüssigkeit übergehen muss. Schließt man an das Innere des Einschnitts ein Druckmessgerät über eine Rohrleitung an, ist es möglich, den Druck in der strömenden Flüssigkeit zu messen. Statt eines Einschnitts kann auch ein beliebig geformtes Loch, z. B. mit einem kreisförmigen Querschnitt, verwendet werden. Die Ränder des Lochs bzw. des Schlitzes müssen eben sein. Es darf kein Grat in die Strömung stehen, weil der Druck in der dadurch gewölbten Trennfläche erheblich von dem der benachbarten Flüssigkeitsteile abweichen würde. Eine geringfügige Abrundung der Lochränder ist hingegen zulässig.

Im linken Bild von Abb. 2.10 ist eine zweckmäßige Anordnung einer Druckentnahmestelle an einer Rohrwand gezeigt. Um den Druck im Innern der strömenden Flüssigkeit zu messen, kann man unter Anwendung desselben Grundgedankens

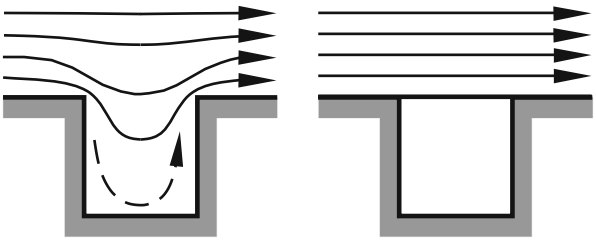


Abb. 2.9 Strömung an einem Schlitz

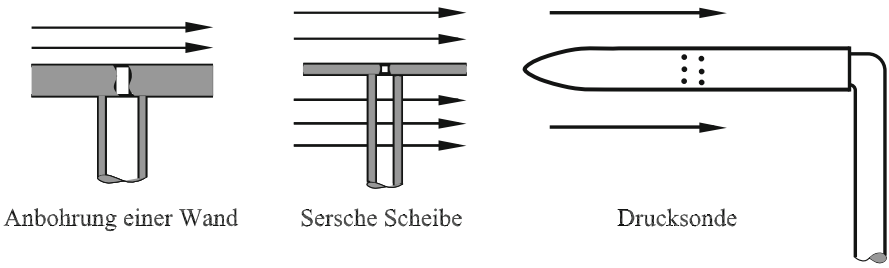


Abb. 2.10 Druckmessung

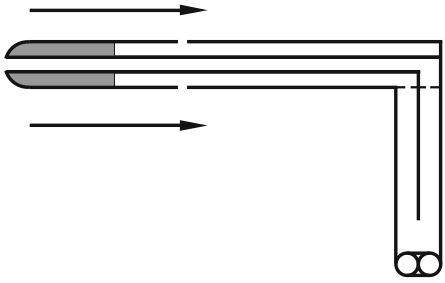


Abb. 2.11 Staurohr nach Prandtl

eine am Ende eines dünnen Rohres angebrachte, in der Mitte durchbohrte sehr feine Scheibe (Sersche Scheibe, Abb. 2.10) verwenden. Diese Messung ist aber gegen eine Richtungsänderung des Luftstroms gegen die Scheibenebene sehr empfindlich. Eine Drucksonde ist unempfindlicher. Sie liefert den Druck bis zu einer Winkelabweichung von etwa 5° genau. Bei größeren Winkeln zeigt sie zu niedrigen Druck an.

Durch die Verbindung einer solchen Druckmessung mit der in Abb. 2.5 angegebenen Messung des Gesamtdrucks ist man in der Lage, den Geschwindigkeitsdruck (dynamischen Druck oder Staudruck) als Differenzdruck $p_\mathrm{d} = \rho \cdot w^2/2$ zu messen. Hieraus kann bei bekannter Dichte ρ die Geschwindigkeit w berechnet werden. In atmosphärischer Luft bei Normaldruck mit einer Dichte von $\rho = 1.21\,\mathrm{Ns^2/m^4} = 1.21\,\mathrm{kg/m^3}$ ergibt sich der Staudruck bei $w = 10\,\mathrm{m/s}$ zu $p_\mathrm{d} = 60.5\,\mathrm{N/m^2}$. In Wasser ist bei gleicher Geschwindigkeit mit $\rho = 1050\,\mathrm{Ns^2/m^4}$ der Staudruck erheblich größer, $p_\mathrm{d} = 50000\,\mathrm{N/m^2}$.

Man kann die Drucksonde der Abb. 2.10 mit dem Pitot-Rohr der Abb. 2.5 in einem Gerät kombinieren. Man erhält das *Prandtlsche Staurohr* für die Geschwindigkeitsmessung (Abb. 2.11). Es ist relativ unempfindlich gegen Abweichungen der Instrumentenachse von der Strömungsrichtung.

Die Druckmessung durch Anbohrungen wird bei vielen Strömungen eingesetzt. So misst man die Druckverteilung auf der Oberfläche eines umströmten Körpers (z. B. eines Flugzeugflügels) durch eine Reihe von Anbohrungen nach Abb. 2.10, die an Druckmessgeräte angeschlossen sind.

Ein bekannter Versuch zur Demonstration der Druckverteilung in einem sich verengenden und danach sich wieder erweiternden Rohr, ist in Abb. 2.12 dargestellt.

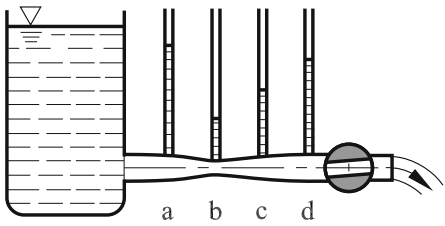


Abb. 2.12 Druckminderung in Verengungen

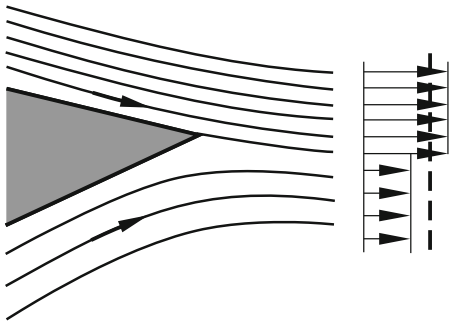


Abb. 2.13 Zusammenfluss zweier Flüssigkeiten

Dieses Experiment dient zur Veranschaulichung der Bernoulli-Gleichung. Durch den Drosselhahn am Rohrende kann der Druck eingestellt werden. Wird der Hahn geöffnet, entsteht bei b ein Unterdruck. Der Druckrückgewinn in dem Rohr hinter dem engsten Querschnitt ist wegen der Reibung etwas kleiner als nach der reibungsfreien Theorie vorhergesagt.

4 Trennflächen und Wirbelbildung

Vereinigen sich zwei Flüssigkeitsströme hinter einer Kante (Abb. 2.13), ist im Allgemeinen die Konstante der Bernoulli-Gleichung in den beiden Strömen nicht dieselbe. Da längs der Fläche, die die beiden Ströme trennt (Trennfläche), Druckgleichheit vorliegt, ist die Geschwindigkeit dem Betrag nach in den beiden Strömen verschieden. Selbst wenn die Bernoulli-Konstante in beiden Strömen gleich ist, kann die Richtung der Strömung auf beiden Seiten unterschiedlich sein. In der Trennfläche wechselt in den betrachteten Fällen die Geschwindigkeit sprunghaft. In dem ersten Fall handelt es sich um einen longitudinalen, im zweiten um einen transversalen Geschwindigkeitssprung. Derartige Trennflächen werden vielfach beobachtet. Sie sind jedoch instabil und bleiben deshalb nicht lange in ihrer ursprünglichen Form bestehen. Kleine Störungen können schnell anwachsen, so dass sich die Geschwindigkeitsunterschiede an einigen Stellen vergrößern und an anderen verringern. Die Trennfläche zerfällt dadurch in eine große Zahl von Wirbeln. Dieser für das Verständnis von Flüssigkeitsbewegungen wichtige Vorgang sei im Folgenden näher beschrieben.

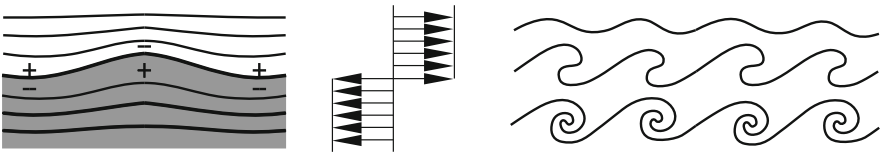


Abb. 2.14 Entstehung von Wirbeln aus Wellen

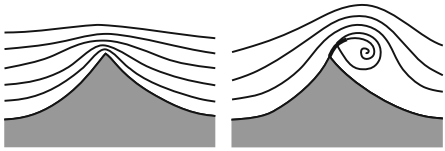


Abb. 2.15 Umströmung einer Kante

Die Trennfläche in Abb. 2.13 soll durch Schwankungen im Zustrom eine leichte Wellung aufweisen, die in Abb. 2.14 skizziert ist. Die Wellen bewegen sich mit dem Mittelwert der beiden Geschwindigkeiten vorwärts, der in Abb. 2.13 durch eine punktierte Linie angedeutet ist. In Abb. 2.14 ist ein Bezugssystem gewählt, das mit dieser mittleren Geschwindigkeit mitbewegt wird. Damit sind die Wellenberge und -täler ortsfest. Die obere Flüssigkeit strömt in diesem Bezugssystem nach rechts, die untere nach links. Analysiert man die Druckverhältnisse in dieser Strömung, liefert sowohl die Bernoulli-Gleichung wie auch die Gl. (2.9) für den transversalen Druckanstieg das Ergebnis, dass unter der Voraussetzung stationärer Strömung in den Wellenbergen jedes einzelnen Stromes Überdruck, in den Tälern dagegen Unterdruck herrscht (in Abb. 2.14 durch + und − angedeutet). Diese Druckverteilung zeigt, dass die Strömung nicht stationär sein kann. Die Flüssigkeit in den Überdruckgebieten wird sich zu dem benachbarten Unterdruckgebiet hin in Bewegung setzen. Das hat zur Folge, dass die Wellung stärker wird. Man spricht dann von einer Instabilität. Das weitere Verhalten einer solchen Trennfläche ist in Abb. 2.14 dargestellt. Das Ende ist ein Zerfall in einzelne Wirbel.

Das Flattern der Fahnen im Wind hat eine ähnliche Ursache. Die Druckverteilung in Abb. 2.14 ändert sich nicht, wenn die Richtung der unteren Strömung umgekehrt wird, das heißt die gleiche Richtung wie die obere Strömung besitzt. Eine schwache Ausbeulung der Fahnen hat die Neigung sich zu verstärken (da die Ausbeulungen sich mit dem Wind leicht mitbewegen, ist der Vorgang in der Realität etwas komplizierter).

In diesem Zusammenhang wird noch eine andere Art von Trennflächen besprochen, bei deren Entstehung gleichzeitig ein Wirbel gebildet wird. Strömt eine Flüssigkeit um eine Kante, so tritt zu Beginn eine Umströmung der Kante ein, wie in der linken Skizze der Abb. 2.15 dargestellt. Die Geschwindigkeit an der Kante ist dabei sehr hoch. Nach der Theorie für reibungsfreie Flüssigkeiten wäre sie unendlich. Man beobachtet, dass die Geschwindigkeit an der Kante unter der Bildung eines Wirbels abnimmt. Die Wirbelbildung verhindert unendliche Geschwindigkeiten an der Kante und führt stattdessen zur Bildung einer Trennfläche. In Abschn. 6 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten wird gezeigt, dass die Wirbel durch

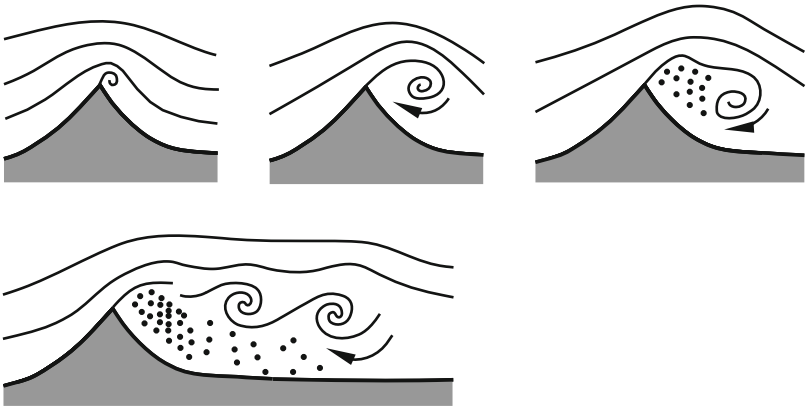


Abb. 2.16 Ausbildung und Zerfall einer Trennfläche

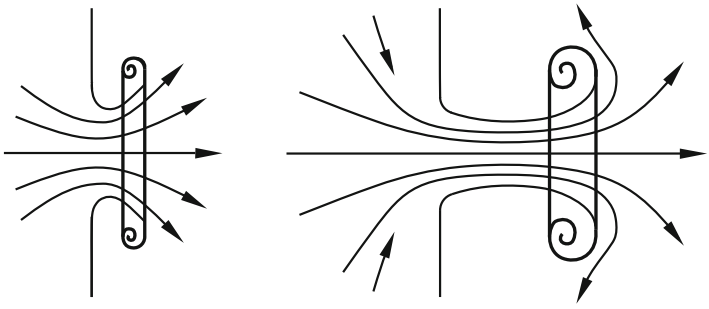


Abb. 2.17 Strahlbildung

die Reibung in der Flüssigkeit in der Nähe fester Wände entstehen. Nimmt man einen Wirbel hinter der Kante an, so dass der Kante in Form einer umlaufenden Strömung von hinten Flüssigkeit zugeführt wird, dann sind die Bedingungen des Zusammenflusses an der Kante erfüllt und es wird eine Trennfläche erzeugt (Abb. 2.15 rechts). Die Trennfläche wird von dem Wirbel aufgewickelt. Dadurch wird ihm Flüssigkeit zugeführt, so dass er wachsen kann. Tatsächlich sind beide, Wirbel und Trennfläche eine Einheit. Beim Anwachsen entfernt sich der Wirbel von der Kante und die Trennfläche zerfällt in einzelne Wirbel (Abb. 2.16). Dabei entstehen an der Kante immer neue Stücke der Trennfläche.

Ganz analoge Vorgänge spielen sich an den Kanten eines runden Loches in einer ebenen Wand ab. Der sich aufrollende vordere Rand der Trennfläche erzeugt einen Wirbelring, der sich unter Ausbildung eines abgegrenzten Flüssigkeitsstrahls stromab bewegt (Abb. 2.17). Wirbelringe können erzeugt werden, indem man einen Kasten mit flexibler Rückwand und mit einem kreisförmigen Loch in der Vorderwand mit Rauch füllt und auf die Rückwand schlägt. Dabei wird nur eine kurzzeitige Strömung aus dem Loch erzeugt. Deshalb entsteht kein Strahl, sondern

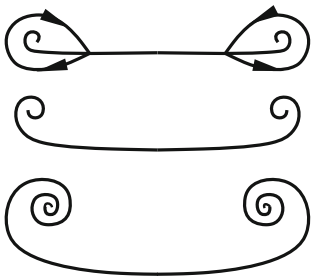


Abb. 2.18 Trennfläche hinter einer geneigten Platte

ein Wirbelring, der sich weiterbewegt und als Rauchring sichtbar wird. Derartige Wirbelringe sind sehr stabile Gebilde und zerfallen erst, wenn ihre Energie durch die Reibung fast vollständig dissipiert ist.

Transversale Geschwindigkeitssprünge entstehen z. B. beim Zusammenfluss der Strömung hinter einer, unter einem kleinen Winkel gegen die Bewegungsrichtung geneigten endlichen Platte. Auf der Druckseite streben die Stromlinien unter der Wirkung des sich ausbildenden Überdrucks nach links und rechts zu den Seiten hin auseinander. Auf der Saugseite werden sie durch den Unterdruck zusammengebogen. Von der Mitte der Platte aus gesehen hat die Strömung an der Hinterkante, quer zur Strömungsrichtung, auf der Druckseite eine Geschwindigkeitskomponente zu den Seitenrändern, auf der Saugseite dagegen eine zur Mitte hin. Im stationären Fall muss wegen der Stetigkeit des Druckes und weil alle Stromlinien einheitlichen Ursprung haben, der Betrag der Geschwindigkeit auf beiden Seiten der Trennfläche derselbe sein. Der Geschwindigkeitssprung ist daher rein transversal. Erfahrungsgemäß rollen sich solche Trennflächen von den Seitenrändern her ein und es entstehen zwei Wirbel, die sich über den ganzen von der Platte zurückgelegten Weg erstrecken. Die Abb. 2.18 veranschaulicht diesen Vorgang. Sie stellt die Gestalt der Trennfläche in verschiedenen Schnitten hinter der Platte dar. Diese Vorgänge sind für das Verständnis der Strömung um Flugzeugtragflügel sehr wichtig. Hierauf wird in dem Kap. 5 ▸ Aerodynamik eingegangen. Die Wirbel kann man sichtbar machen, indem man in ruhender Luft Rauchballen aus Zigarrenrauch erzeugt und ein, unter einem kleinen Winkel angestelltes Lineal, mit seinem freien Ende schnell durch den Rauchballen bewegt.

5 Potentialströmung

In den bisherigen Kapiteln wurden im Wesentlichen nur die Mittelwerte der Strömungsgrößen bestimmt. Das Ziel der Hydrodynamik ist es jedoch, die Geschwindigkeiten in jedem Raumpunkt der homogenen reibungsfreien Flüssigkeit angeben zu können. Zum Verständnis der einschlägigen Methoden ist mehr Mathematik erforderlich, als hier vorausgesetzt wird. Deshalb wird sich im Folgenden auf einige allgemeinere Eigenschaften reibungsfreier Strömungen und auf einige einfache Beispiele beschränkt. Zum Verständnis müssen vorher einige Begriffe erklärt werden.

Ein Linienintegral längs einer gegebenen Linie zwischen den Punkten A und B ist das Integral über das Produkt der Geschwindigkeitskomponente in Richtung von ds mit dem Linienelement $\mathbf{d}\boldsymbol{s}$, d. h.

$$\Lambda = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} w \cdot \mathrm{d}s \cdot \cos(\alpha) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s}$$

(α ist der Winkel zwischen $\boldsymbol{w}$ und $\mathbf{d}\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{w} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s}$ ist das Skalarprodukt von $\boldsymbol{w}$ und $\mathbf{d}\boldsymbol{s}$). Für eine instationäre Strömung sind diese Linienintegrale für einen *Momentanzustand* der Geschwindigkeitsverteilung zu bilden.

Der Betrag des Linienintegrals einer *geschlossenen* Linie wird Zirkulation Γ genannt, d. h. für ein Integral längs einer geschlossenen Linie gilt:

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s}. \tag{2.12}$$

Damit kann der Satz von *W. Thomson* 1869 formuliert werden: *In einer reibungsfreien homogenen Flüssigkeit bleibt die Zirkulation längs einer geschlossenen flüssigen Linie zeitlich konstant*.

Aus diesem Satz können wichtige Folgerungen gezogen werden:

Beginnt die Bewegung der Flüssigkeit aus der Ruhe, ist vor Beginn der Bewegung die Zirkulation für jede geschlossene flüssige Linie gleich Null. Sie bleibt daher zu jedem Zeitpunkt für diese Linie gleich Null. Ist das Linienintegral über jede geschlossene Linie in einem Gebiet gleich Null, dann ist auch das Linienintegral von einem Punkt A nach einem anderen Punkt B vom Weg unabhängig, egal welcher Weg innerhalb des Gebietes gewählt wird. Man kann den bisherigen Integrationsweg von B nach A zurückgehen (hierdurch wird der Betrag des Linienintegrals von A nach B wegen der umgekehrten Richtung von $\mathbf{d}\boldsymbol{s}$ aufgehoben) und auf einem anderen Weg wieder nach B gehen. Man erhält $\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$ plus einem Integral über eine geschlossene Linie, das gleich Null ist. Damit ergibt sich wieder das Integral $\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$, was zu beweisen war. Wird der Punkt A festgehalten, dann ordnet das Linienintegral $\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s}$ jedem Punkt B einen Zahlenwert zu. Dieser Wert wird mit Φ bezeichnet und *Potential* am Punkt B genannt. Geht man von B nach einem um ds entfernten Punkt C weiter, kann für die Bildung von $\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}}$ der Weg über B genommen werden. Es ergibt sich

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} + \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} \quad \text{oder} \quad \Phi_{\mathrm{C}} = \Phi_{\mathrm{B}} + w \cdot \mathrm{d}s \cdot \cos(\alpha) = \Phi_{\mathrm{B}} + w \cdot \mathrm{d}h, \tag{2.13}$$

wenn dh die Projektion von $\mathbf{d}\boldsymbol{s}$ auf die Richtung von $\boldsymbol{w}$ ist. Für $\alpha = 90°$ wird $\cos(\alpha) = 0$ und es gilt $\Phi_{\mathrm{C}} = \Phi_{\mathrm{B}}$. Die Strecke $\mathrm{d}s = \overline{\mathrm{BC}}$ steht somit immer senkrecht auf der Richtung von $\boldsymbol{w}$, wenn $\Phi_{\mathrm{C}} = \Phi_{\mathrm{B}}$ ist. Die Gesamtheit aller Punkte, für die

$\Phi = \Phi_B$ ist, bildet eine Fläche, die durch den Punkt B geht. Diese Fläche trennt das Gebiet $\Phi > \Phi_B$ von dem Gebiet $\Phi < \Phi_B$. Die Tangentialebene dieser Fläche im Punkt B steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{w}$ im Punkt B. Es gilt daher allgemein, dass die *Stromlinien*, die immer die Richtung des Geschwindigkeitsvektors haben, *überall senkrecht auf den Flächen* $\Phi =$ konst. *stehen*.

Für beliebige Werte von α ergibt sich aus Gl. (2.13) mit $\Phi_C - \Phi_B = \mathrm{d}\Phi$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = w \cdot \cos(\alpha) \tag{2.14}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}h} = w. \tag{2.15}$$

dh steht dabei senkrecht auf der Fläche $\Phi =$ konst.. Vektoriell schreibt man

$$\boldsymbol{w} = \mathrm{grad}\Phi \tag{2.16}$$

und fasst damit die Aussage Gl. (2.15) mit der zusammen, dass $\boldsymbol{w}$ senkrecht auf den Flächen $\Phi =$ konst. steht. Die Geschwindigkeit ist nach Größe und Richtung gleich dem größten Anstieg, d. h. gleich dem Gradient von Φ.

Diese geometrische Begriffsbildung des Potentials und des Gradienten stimmt mit der des Kräftepotentials U in der Physik überein. Von dort wurde auch der Name Potential übernommen. Der Gradient des Kräftepotentials ist allerdings eine Feldstärke, der Gradient des hier definierten Potentials eine Geschwindigkeit. Deshalb wird das Potential als *Geschwindigkeitspotential* bezeichnet. Ein weiterer Unterschied ist, dass die Feldstärke $\boldsymbol{g} = -\mathrm{grad}U$ und $\boldsymbol{w} = +\mathrm{grad}\Phi$ gesetzt wird. Aus den bisherigen Überlegungen und unter Verwendung des Potentials und der Zirkulation folgt, dass *jede aus der Ruhe heraus entstandene Bewegung einer homogenen reibungsfreien Flüssigkeit ein Potential besitzt*. Solche Bewegungen werden *Potentialströmungen* genannt. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass die Teilchen keine Drehung erfahren. Als Maß für die Drehung dient die Zirkulation längs einer kleinen geschlossenen Kurve, die nach dem Satz von Thomson gleich Null ist.

Als Gegenbeispiel wird eine Flüssigkeit betrachtet, die wie ein starrer Körper mit einer Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Für einen Kreis vom Radius r mit dem Kreismittelpunkt als Nullpunkt des Bezugssystems ist die Geschwindigkeit gleich $\omega \cdot r$. Eine Translationsbewegung liefert zur Zirkulation keinen Beitrag. Deshalb braucht man sie bei der Berechnung der Zirkulation nicht zu berücksichtigen. Die Geschwindigkeitsrichtung ist tangential zum Kreisumfang. Das Linienintegral für den Kreisumfang ist $\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \omega \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \omega$. Dividiert man diese Gleichung durch die Kreisfläche $A = \pi \cdot r^2$, erhält man $\Gamma / A = 2 \cdot \omega$. Γ / A ist damit ein geeignetes Maß für Drehung. Liegt die Fläche A beliebig im Raum und bildet sie mit der Drehachse einen Winkel α, ergibt sich für die Bewegung $\Gamma / A = 2 \cdot \omega \cdot \sin(\alpha)$. Steht die Drehachse senkrecht zu A, wird Γ / A maximal.

Bei der Potentialströmung ist die Zirkulation für Linien, die im Innern des Strömungsfeldes verlaufen, gleich Null. Die Strömung ist im Innern *drehungsfrei*. Trotzdem können bei einer aus der Ruhe heraus entstehenden Bewegung einer homogenen reibungslosen Flüssigkeit Wirbel entstehen. Betrachtet man die Vorgänge bei der Bildung einer Trennfläche (Abschn. 4) zeigt sich, dass alle im Ruhezustand im Innern der Flüssigkeit gezogenen Linien sich derart bewegen und deformieren, dass sie der Trennfläche ausweichen. Keine der Linien schneidet die Trennfläche. *Über die Beziehungen der Gebiete auf beiden Seiten der Trennfläche zueinander sagt der Thomsonsche Satz nichts aus.* Deshalb ist es kein Widerspruch gegen den Thomsonschen Satz, dass in einer reibungsfreien Flüssigkeit an Kanten Trennflächen und Wirbel entstehen können.

Bei den realen Flüssigkeiten, die reibungsbehaftet sind, bildet sich statt der Trennfläche eine Scherschicht aus, die jedoch häufig sehr dünn ist. Die Teilchen in der Scherschicht stammen immer aus der unmittelbaren Nähe der Oberfläche des festen Körpers, in der die Reibung auch bei sehr kleiner Zähigkeit nicht mehr vernachlässigt werden darf. Die genaue Analyse der inneren Vorgänge in den Scherschichten muss deshalb die Reibung berücksichtigen. Für die Untersuchung der äußeren Vorgänge reicht in der Regel die Betrachtung der statt der Scherschicht eingeführten Trennfläche. Die Einflüsse der Reibung sind in dem Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten erläutert.

In Abschn. 2 wurde aus dem Druckgefälle quer zur Stromlinie für Strömungen, bei denen die Konstante der Bernoulli-Gleichung für alle Stromlinien eines Gebietes denselben Wert hat, die Gl. (2.10) abgeleitet. Mit dem Krümmungsradius r der Stromlinie ergibt die Zirkulation um ein kleines Viereckelement, das aus zwei Stromlinien und zwei Normalen gebildet wird (Abb. 2.19):

$$w \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi - \left(w + \frac{\partial w}{\partial s'} \cdot \mathrm{d}s'\right) \cdot (r + \mathrm{d}s') \cdot \mathrm{d}\varphi = -\,\mathrm{d}s' \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \left(r \cdot \frac{\partial w}{\partial s'} + w + \frac{\partial w}{\partial s'} \cdot \mathrm{d}s'\right) .$$

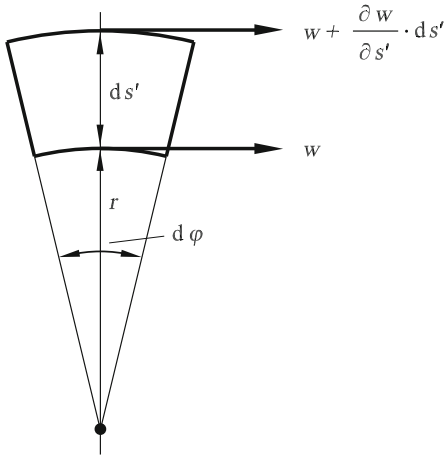


Abb. 2.19 Zirkulation um ein infinitesimales Viereck

Dabei liefern die Normalen keinen Beitrag zur Zirkulation. Das letzte Glied in der Klammer kann als von höherer Ordnung klein gestrichen werden. Der Rest der Klammer ist nach Gl. (2.10) gleich Null. Das bedeutet, dass die obigen Strömungen, für die die Bernoulli-Gleichung auf allen Stromlinien eines Gebietes denselben Wert hat, Bewegungen mit der Zirkulation gleich Null für jedes kleine Element sind. Das heißt sie sind Potentialströmungen. Umgekehrt gilt die Bernoulli-Gleichung in jeder stationären Potentialströmung auch quer zu den Stromlinien.

5.1 Potentialgleichung

Die Ableitung der Potentialgleichung einer allgemeinen dreidimensionalen Strömung erfolgt über die Winkelgeschwindigkeit. Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ hat drei Komponenten (Drehungsanteile um die Koordinatenachsen):

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Sollen diese Drehungsanteile alle Null sein, muss $\partial v/\partial x = \partial u/\partial y$ usw. sein. Wird ein Geschwindigkeitspotential Φ eingeführt, mit $u = \partial\Phi/\partial x$, $v = \partial\Phi/\partial y$ und $w = \partial\Phi/\partial z$, sind diese Beziehungen identisch erfüllt. Es gilt $\partial(\partial\Phi/\partial y)/\partial x = \partial(\partial\Phi/\partial x)/\partial y$ usw. Dieses ist für reguläre Funktionen mehrerer Veränderlicher immer erfüllt. Mit $\partial v/\partial x = \partial u/\partial y$ und $\partial w/\partial x = \partial u/\partial z$ ergibt sich aus der kinematischen Grundgleichung (Gl. 2.27), Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right).$$

Für $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ erhält man die entsprechenden Gleichungen. Setzt man diese Ausdrücke in die drei Euler-Gleichungen (72) des Kap. 1 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik ein, multipliziert sie der Reihe nach mit $\mathrm{d}x$ bzw. $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}z$ und addiert sie, sind alle Terme ohne Einschränkung des Integrationsweges integrierbar. Es ergibt sich mit $\int(\mathrm{d}p/\rho) = \mathrm{F}(p)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \mathrm{F} + U = \text{konst.}. \tag{2.18}$$

Die Konstante auf der rechten Seite hängt noch von der Zeit ab, da die Integration bei festgehaltener Zeit erfolgt. (z. B. kann sich der Druck mit der Zeit durch Einwirkung von außen ändern.) Man ersetzt deshalb besser konst. durch $f(t)$. Den Ausdruck $\partial\Phi/\partial t$ erhält man aus $\Phi = \int(u\cdot dx + v\cdot dy + w\cdot dz)$ und $\int(\partial u/\partial t)\cdot dx = \partial(\int u\cdot dx)/\partial t$ usw. Für stationäre Strömungen geht die Gl. (2.18) in die gewöhnliche Bernoulli-Gleichung Gl. (2.4) über.

Aus Gl. (2.14) folgt der Zusammenhang der Geschwindigkeitskomponenten u, v und w mit dem Potential Φ. Dazu wird ds der Reihe nach gleich dx, dy und dz gesetzt. Man erhält

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \tag{2.19}$$

Die Kontinuitätsgleichung für die inkompressible Strömung $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$ Gl. (2.7) des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten ergibt mit Gl. (2.19):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{2.20}$$

Die Gl. (2.20) nennt man *Laplace-Gleichung*. Sie ist eine *lineare* partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. Damit können Lösungen als lineare Superposition von Elementarlösungen dargestellt werden. Die Tabelle der Abb. 2.20 zeigt eine Zusammenstellung derartiger Elementarlösungen, die bei den folgenden Strömungsbeispielen angewandt werden. Die Laplace-Gleichung tritt auch bei elektrostatischen Potentialen auf und gilt dort in den Teilen des Feldes, die keine Ladung besitzen und für die die Dieelektrizitätskonstante konstant ist. Damit lassen sich die aus der Elektrostatik bekannten Lösungen von Gl. (2.20) auch hier verwenden, wie z. B. die Lösung für eine Punktladung, für einen Dipol usw.

5.2 Staupunktströmung

Einer der einfachsten Ansätze eines Potentials ist $\Phi = (1/2)\cdot(a\cdot x^2 + b\cdot y^2 + c\cdot z^2)$. Aus Gl. (2.20) folgt, dass $a+b+c = 0$ sein muss. Für Rotationssymmetrie bzgl. der z-Achse kann $b = a$ gesetzt werden. Dann ergibt sich aus Gl. (2.20), dass $c = -2\cdot a$ ist. Es gilt damit für das Potential:

$$\Phi = \frac{a}{2}\cdot(x^2 + y^2 - 2\cdot z^2),$$

mit $u = a\cdot x$, $v = a\cdot y$ und $w = -2\cdot a\cdot z$. Die Stromlinien in der y-z-Ebene ($x = 0$) sind durch die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dy} = \frac{w}{v} = -\frac{2\cdot z}{y}$$

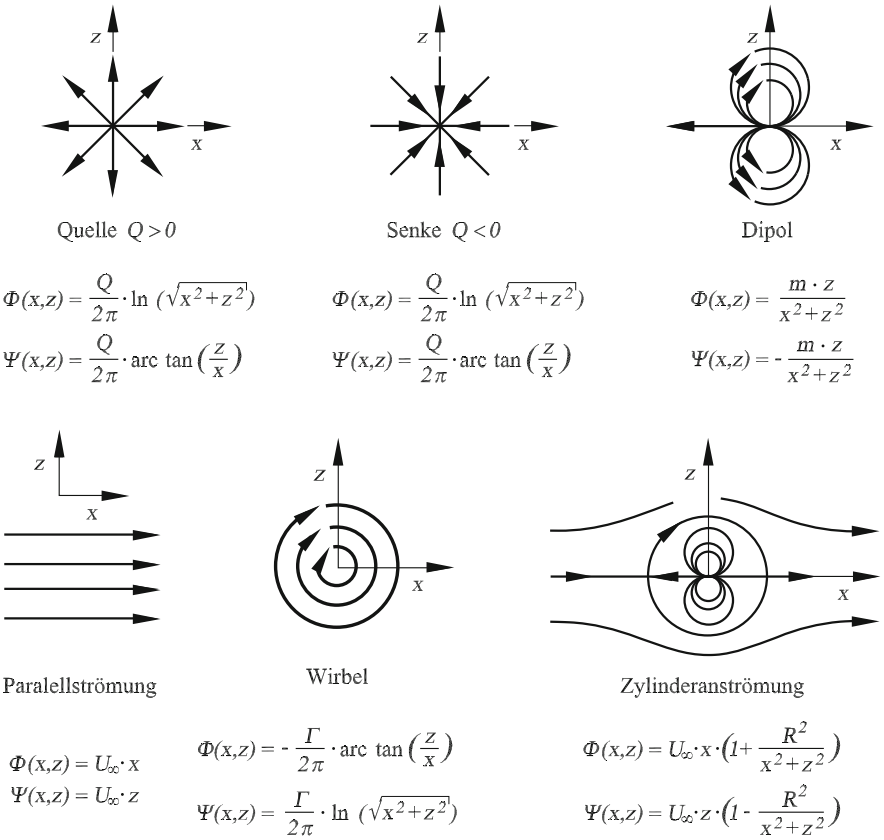


Abb. 2.20 Elementarlösungen der Potentialströmungen

gegeben, die integriert

$$\ln(z) = \text{konst.} - 2\cdot\ln(y) \qquad \text{oder} \qquad y^2\cdot z = \text{konst.}$$

ergibt (kubische Hyperbeln, Abb. 2.21).

Ist die Bewegung stationär, d. h. a zeitlich konstant, so gilt für den Druck

$$p = \text{konst.} - \frac{\rho}{2}\cdot(u^2+v^2+w^2) = \text{konst.} - \frac{\rho\cdot a^2}{2}\cdot(x^2+y^2+4\cdot z^2).$$

Bei $x = y = z = 0$ ist der Druck maximal. Die Flächen gleichen Drucks sind Ellipsoide mit dem Achsenverhältnis $1:1:(1/2)$ (Abb. 2.21).

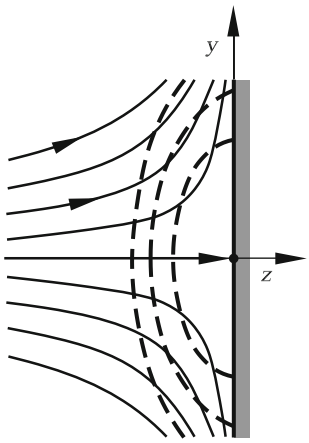


Abb. 2.21
Staupunktströmung, Stromlinien und Isobaren (gestrichelt)

5.3 Quellen und Senken

Nach der an Gl. (2.20) angefügten Bemerkung sind bekannte Lösungen der elektrostatischen Potentiale auch Lösungen für mögliche Potentialströmungen, sofern die Randbedingungen zu erfüllen sind. Bereits das elektrostatische Feld einer Punktladung führt zu einer wichtigen Strömung, der so genannten Quell- bzw. Senkenströmung. Das Potential lautet $\Phi = \pm\, \mathrm{C}/r$. Dabei ist r der Abstand von einem Punkt O und C eine Konstante. Das Potential ist somit auf Kugeln mit dem Mittelpunkt O konstant. Die Geschwindigkeit zeigt immer in radialer Richtung, da sie zur Fläche konstanten Potentials senkrecht steht. Sie hat die Größe $|\mathrm{C}|/r^2$. Die Durchflussmenge, die in der Zeiteinheit durch eine Kugel vom Radius r (Oberfläche $4 \cdot \pi \cdot r^2$) hindurchtritt, ist $Q = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \mathrm{C}/r^2 = 4 \cdot \pi \cdot \mathrm{C}$. Diese Menge entsteht bei der Quelle im Punkt O pro Sekunde neu, bei der Senke verschwindet sie dort pro Zeiteinheit. Dieser Fall ist physikalisch nicht möglich. Man kann jedoch z. B. im Punkt O durch ein dünnes Rohr Flüssigkeit absaugen. Es entsteht dann in der Umgebung der Saugstelle näherungsweise eine Strömung der beschriebenen Art (nur genähert, da das endliche Volumen des Rohres die Strömung beeinflusst).

Eine weitere sehr nützliche Anwendung der Quell- und Senkenströmung ist die Folgende: Bewegt sich ein stabförmiger Körper mit der Geschwindigkeit U_∞ in der Richtung der Stabachse vorwärts, wird an seinem vorderen Ende ständig Flüssigkeit verdrängt, an seinem hinteren Ende fließt sie in dem frei gewordenen Raum zusammen (Abb. 2.22). Die Strömung in der Umgebung des Vorderteils ist so, als ob sich dort eine Quelle befindet. Die Strömung in der Umgebung des hinteren Teils ist so, als ob dort eine Senke ist. Tatsächlich wird die Strömung durch die Gleichung

$$\Phi = \mathrm{C} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

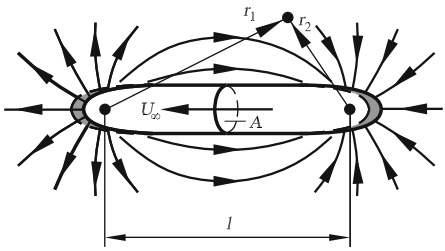


Abb. 2.22
Potentialströmung um einen bewegten Körper, ruhendes Bezugssystem

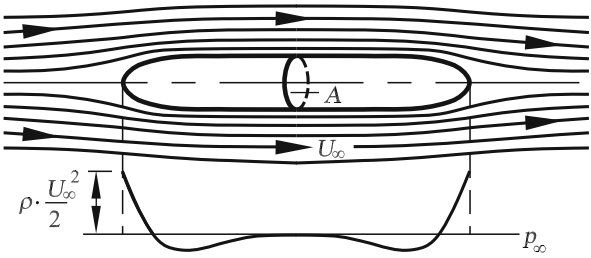


Abb. 2.23
Potentialströmung und Druckverteilung um einen bewegten Körper, mitbewegtes Bezugssystem

beschrieben. Damit diese Gleichung die genaue Lösung der Strömung liefert, müssen die Stabenden eine bestimmte abgerundete Form haben. Aber auch bei anderen Formen der Stabenden stellt diese Gleichung eine brauchbare Näherung dar. Die Quellstärke Q der Quelle und der Senke ist gleich $A \cdot U_\infty$. Dabei ist A der Stabquerschnitt, d. h. $C = A \cdot U_\infty/(4 \cdot \pi)$. Betrachtet man die Strömung, die infolge der Vorwärtsbewegung des Stabes und der Geschwindigkeitsverteilung um den Stab nicht stationär ist, von einem mit dem Körper mitbewegten Bezugssystem aus, ergibt sich eine stationäre Strömung. Für diese Strömung ist der Körper in Ruhe. Die Flüssigkeit bewegt sich am Körper vorbei. Mathematisch wird diese Strömung durch das Potential $\Phi' = \Phi + U_\infty \cdot x$ beschrieben. Ihre Stromlinien sind in Abb. 2.23 dargestellt. Darunter ist die Druckverteilung entlang der Oberfläche des Körpers qualitativ gezeichnet, wie man sie aus der Bernoulli-Gleichung erhält.

Die Strömung um andere schlanke Rotationskörper lässt sich durch stetige Quellenverteilungen längs der Achse beschreiben. Verringert man den Abstand von Quelle und Senke und erhöht die Quellstärke in demselben Maß wie ihre Entfernung abnimmt, erhält man als Grenzfall einen Dipol. Die Strömung von Abb. 2.23 geht dabei in die Umströmung einer Kugel (Abb. 2.24) über. Mit dem Kugelradius R lautet das zugehörige Potential $\Phi = U_\infty \cdot x \cdot (1 + R^3/(2 \cdot r^3))$. Bei einer realen Umströmung einer Kugel sieht der Nachlauf durch die Reibungseinflüsse jedoch anders aus (siehe Abschn. 6 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten).

5.4 Ebene Bewegung

Sind alle Stromlinien ebene Kurven in parallelen Ebenen und liegt auf einer zu der Ebenenschar senkrechten Geraden überall derselbe Strömungszustand vor,

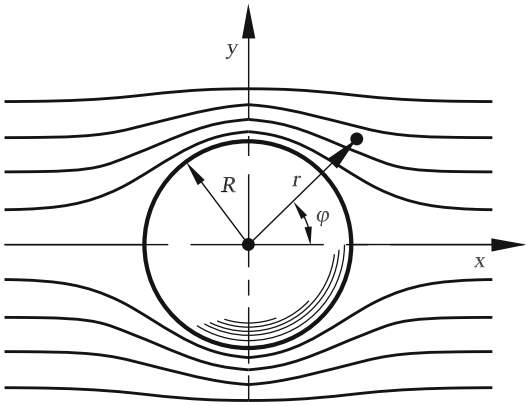


Abb. 2.24
Potentialströmung um eine Kugel

spricht man von einer ebenen Strömung. Wird eine dieser Ebenen als x-y-Ebene ausgewählt, ist die Geschwindigkeitskomponente $w = 0$ und die Geschwindigkeitskomponenten u und v sind nur Funktionen von x und y. Man kann zeigen, dass der reelle sowie der imaginäre Teil jeder analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen $x + i \cdot y$ ein Potential darstellt, das die Gl. (2.20) erfüllt. Die komplexe Veränderliche sei $z = x + i \cdot y$, die Funktion wird $\mathrm{F}(z)$ genannt, mit dem Realteil Φ und dem Imaginärteil Ψ. Es gilt:

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} = \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} = \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Wegen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = i,$$

ist

$$\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}.$$

Mit $\mathrm{F} = \Phi + i \cdot \Psi$ ergibt sich daraus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

In dieser Gleichung müssen die reellen und die imaginären Anteile jeweils übereinstimmen. Es folgt mit $1/i = -i$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v. \tag{2.21}$$

Man erhält:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0,$$

d. h. die Laplace-Gleichung (2.20) ist identisch erfüllt. Für die Funktion Ψ gilt ebenfalls $\partial^2\Psi/\partial x^2 + \partial^2\Psi/\partial y^2 = 0$. Damit ist auch Ψ ein Strömungspotential. Aus den Gl. (2.21) folgt, dass die den Potentialen Φ und Ψ zugeordneten Strömungen in jedem Punkt senkrecht aufeinander stehen und den gleichen Geschwindigkeitsbetrag haben. Die beiden Gradientenrichtungen α und β sind gegeben durch $\tan(\alpha) = (\partial\Phi/\partial y)/(\partial\Phi/\partial x) = v/u$ und $\tan(\beta) = (\partial\Psi/\partial y)/(\partial\Psi/\partial x) = u/(-v)$, d. h. $\tan(\beta) = -1/\tan(\alpha)$. Der Betrag des Gradienten ist in beiden Fällen gleich $\sqrt{u^2 + v^2}$. Die Linien gleichen Potentials der einen Strömung sind daher die Stromlinien der anderen. Die Geschwindigkeit steht immer senkrecht auf der Potentialfläche. Die Funktion, die auf Stromlinien konstant ist, wird Stromfunktion genannt. Ist Φ das *Potential*, dann ist Ψ die *Stromfunktion*. Die Stromfunktion hat noch eine weitere anschauliche Bedeutung: Die Differenz der Funktionswerte von zwei Punkten stellt das in der Zeiteinheit zwischen den beiden Punkten in einer Schicht von der Dicke 1 durchfließende Volumen dar.

Aus den Eigenschaften der Linien gleichen Potentials und gleicher Stromfunktion ergibt sich eine zeichnerische Möglichkeit, beide Liniensysteme für gegebene Randbedingungen zu entwerfen. Man beginnt mit einem rohen Entwurf der Stromlinien, zeichnet dazu ein orthogonales System und verbessert den Entwurf so lange, bis die Maschen überall hinreichend quadratisch sind. Kennzeichen hierfür sind gleiche Längen der Mittellinien in den Quadraten und die Orthogonalität der zwei durch die Quadratecken gezogenen Diagonalkurvenscharen, die die Gleichungen $\Phi + \Psi = \text{konst.}$ und $\Psi - \Phi = \text{konst.}$ erfüllen. Die Abb. 2.23, 2.26, 2.27 und 2.30 sind auf diese Weise gezeichnet worden. Abb. 2.25 zeigt ein Beispiel einer grafisch konstruierten Lösung.

Im Folgenden sind einfache Beispiele von ebenen Strömungen aufgeführt. Die *ebene Staupunktströmung* wird durch die Funktion $F = (a/2) \cdot z^2$ dargestellt:

$$\Phi + i \cdot \Psi = \frac{a}{2} \cdot (x^2 + 2 \cdot i \cdot x \cdot y - y^2),$$

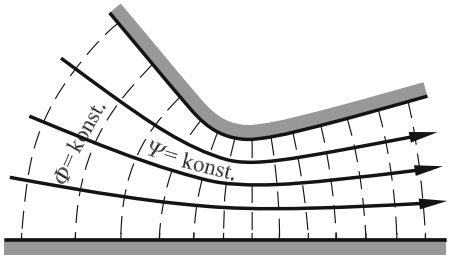


Abb. 2.25 Grafische Konstruktion von Φ und Ψ

d. h.

$$\Phi = \frac{\mathrm{a}}{2} \cdot (x^2 - y^2) \quad und \qquad \Psi = \mathrm{a} \cdot x \cdot y.$$

Die Stromlinien Ψ = konst. sind gleichseitige Hyperbeln. Die Geschwindigkeitskomponenten u und v ergeben die Gleichungen

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \mathrm{a} \cdot x, \qquad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\mathrm{a} \cdot y.$$

Die ebene Quellströmung wird durch $\mathrm{F} = \mathrm{b} \cdot \ln(z)$ erhalten. Es gilt $\ln(z) = \ln(r) + i \cdot \varphi$, mit dem Radius r und dem Zentriwinkel φ in Polarkoordinaten (d. h. Φ = konst. auf Kreisen r = konst. und Ψ = konst. auf radialen Geraden φ = konst.).

Ein weiteres Beispiel ist die *Strömung an zwei Wänden*, die einen Winkel α miteinander bilden. Liegt der Schnittpunkt im Koordinatenursprung und die erste Wand auf der x-Achse, lautet die Funktion $\mathrm{F} = (\mathrm{a}/n) \cdot z^n$, mit $n = \pi/\alpha$. Werden Polarkoordinaten eingeführt ist $z = x + i \cdot y = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ und

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)).$$

Daraus ergibt sich die Stromfunktion zu $\Psi = (\mathrm{a}/n) \cdot r^n \cdot \sin(n \cdot \varphi)$. Für $\varphi = 0, \pi/n, 2 \cdot \pi/n, \ldots$, d. h. für $\varphi = 0, \alpha, 2 \cdot \alpha, \ldots$ ist $\Psi = 0$. Die Form der Stromlinien für verschiedene Werte von α geht aus der Abb. 2.26 hervor. Für $\alpha < \pi$ ist im Ursprung die Geschwindigkeit 0 und für $\alpha > \pi$ ist sie dort ∞. Der Grenzübergang zu $\alpha = 0$ führt auf die Funktion

$$\mathrm{F} = \mathrm{a}' \cdot e^{\mu \cdot z} = \mathrm{a}' \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot (\cos(\mu \cdot y) + i \cdot \sin(\mu \cdot y)).$$

Die Entfernung der beiden Wände ist dabei $h = \pi/\mu$. Die um einen rechten Winkel gedrehte Strömung $\mathrm{F}' = \mathrm{a}' \cdot e^{-i \cdot \mu \cdot z} = \mathrm{a}' \cdot e^{\mu \cdot y} \cdot (\cos(\mu \cdot x) - i \cdot \sin(\mu \cdot x))$ eignet sich für die Darstellung von Wellenvorgängen (Abb. 2.40).

Die Strömung um einen *Kreiszylinder* vom Radius R wird durch $\mathrm{F} = U \cdot (z + R^2/z)$ gegeben. Für die Stromfunktion ergibt sich daraus $\Psi = U \cdot \sin(\varphi) \cdot (r - R^2/r)$.

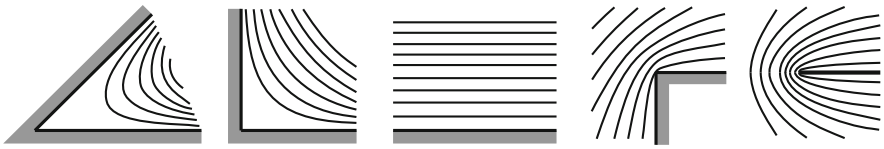


Abb. 2.26 Strömungen $F = \mathrm{A} \cdot z^n$

Für die x-Achse, auf der $\sin(\varphi) = 0$ gilt und für den Kreis mit dem Radius R, auf dem $r - R^2/r = 0$ gilt, ist der Wert der Stromfunktion $\Psi = 0$. Das Stromlinien- und Potentiallinienbild dieser Strömung ist dem der Abb. 2.24 sehr ähnlich.

Es gibt beliebig viele solcher Beispiele. Zur Auffindung geeigneter Lösungen können noch eine Anzahl besonderer Verfahren verwendet werden. So ordnet die komplexe Beziehung $z = \mathrm{f}(\zeta)$, in der $\zeta = \xi + i \cdot \eta$ eine andere komplexe Zahl ist, jedem Wertepaar ξ, η ein Wertepaar x, y zu. Jedem Punkt der ξ-η-Ebene ist ein Punkt der x-y-Ebene zugeordnet. Dieses wird als eine Abbildung bezeichnet. Einer Linie entspricht wieder eine Linie, dem Schnittpunkt zweier Linien entspricht der Schnittpunkt der zugeordneten Linien. Im Einzelnen gelten die Beziehungen analog zu der Gl. (2.21). Ein rechtwinkliges Netz geht wieder in ein rechtwinkliges (aber im Allgemeinen krummliniges) Netz über. Der Abbildungsmaßstab ist in beiden Richtungen derselbe, so dass das unendlich Kleine geometrisch ähnlich abgebildet wird. Man nennt deshalb diese Art von Abbildung auch eine konforme Abbildung. Die bisherigen Beispiele von ebenen Strömungen sind auch konforme Abbildungen, wenn Φ und Ψ durch ξ und η ersetzt werden. Das letzte Beispiel (eine Strömung um den Kreiszylinder) zeigt u. a., wie die halbe Φ-Ψ-Ebene auf ein Gebiet abgebildet wird, das von zwei Stücken der x-Achse und einem dazwischen liegenden Halbkreis vom Radius R begrenzt wird.

Wenn F eine analytische Funktion von z ist, und z eine analytische Funktion von ζ, dann ist F auch eine analytische Funktion von ζ, d. h. auch in der ζ-Ebene liefert $\mathrm{F} = \Phi + i \cdot \Psi$ wieder eine mögliche Strömung. Aus einer beliebigen Strömung in der x-y-Ebene entsteht durch jede Abbildung der x-y-Ebene auf eine ξ-η-Ebene eine neue Strömung in der ξ-η-Ebene. Das Verfahren kann beliebig oft wiederholt werden. Dieses ist ein wichtiger Zusammenhang für die Hydrodynamik.

Es gibt verschiedene Verfahren, um das äußere Gebiet einer tragflügelähnlichen Kontur auf das Äußere eines Kreises abzubilden. Deshalb lässt sich aus der Strömung um den Kreis auch eine Strömung um das Tragflügelprofil herleiten usw.

Der Differentialquotient $\mathrm{dF}/\mathrm{d}z$ ist gleich $u - i \cdot v$ (der konjugierte Wert zur komplexen Geschwindigkeit $u + i \cdot v$). Nennt man diese Größe w, so ist $w = \mathrm{dF}/\mathrm{d}z$ ebenfalls eine analytische Funktion von z oder von F. Der Zusammenhang der Φ-Ψ-Ebene mit der u-v-Ebene ist auch eine konforme Abbildung. Es gibt Fälle in denen Aussagen über die Geschwindigkeiten gemacht werden können, die hinreichen, um das Gebiet in der w-Ebene völlig zu bestimmen. Wenn ein *Flüssigkeitsstrahl durch einen Spalt* zwischen ebenen Wänden austritt (Abb. 2.27 links), ist für die Grenzstromlinie die Richtung gegeben, so lange sie an einer ebenen Wand entlang fließt. Für die Grenzen des freien Strahls ist die Richtung nicht bekannt, dafür aber die Größe der Geschwindigkeit, die wegen der Bernoulli-Gleichung konstant sein muss, wenn der Druck konstant ist. Daraus ergibt sich eine Abgrenzung des Gebietes (Abb. 2.27 rechts). Es ist nur noch notwendig, die auftretenden Singularitäten richtig zu beschreiben, um F als Funktion von w zu erhalten. Man bestimmt die Umkehrfunktion $w = w(\mathrm{F})$. Aus $\mathrm{dF}/\mathrm{d}z = w(\mathrm{F})$ ergibt sich $z = \int(\mathrm{dF}/w(\mathrm{F}))$. Durch Trennen von Real- und Imaginärteil werden schließlich die x- und y-Werte zu jedem Wert von Φ und Ψ ermittelt und man erhält das Stromlinienbild.

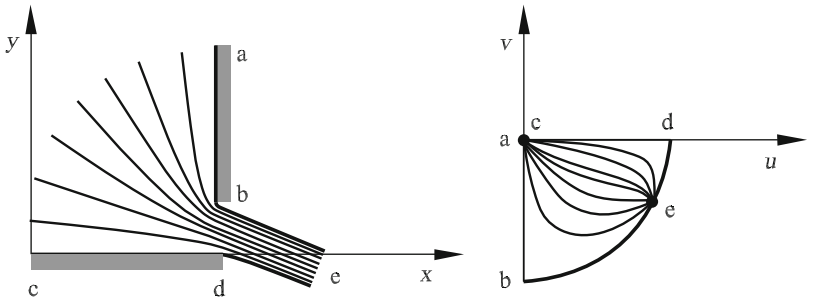


Abb. 2.27 Strömung und Geschwindigkeitsfeld beim Ausfluss aus einem Spalt

Dieser kurze Überblick soll eine Vorstellung von den komplexen Methoden zur Bestimmung von Potentialströmungen geben.

Obwohl bei allen Potentialströmungen in jedem kleinen Gebiet die Zirkulation verschwindet, gibt es doch Strömungen, bei denen im ganzen Stromfeld eine Zirkulation auftritt. Bedingung hierfür ist, dass das Gebiet, in dem die Strömung vorliegt, mehrfach zusammenhängend ist. Dieser mehrfache Zusammenhang ist dadurch gekennzeichnet, dass es Kurven gibt, die durch stetige Veränderung nicht auf Null zusammengezogen werden können, ohne das Gebiet zu verlassen. Beispiele von zweifach zusammenhängenden Räumen sind, ein Zimmer mit einer Säule in der Mitte, oder ein Raum, der einen Ring umgibt. Ist die Zirkulation längs einer solchen Kurve gleich Γ, so ist die Zirkulation längs jeder anderen Kurve, die aus dieser durch stetige Änderung ohne Verlassen des Gebietes entsteht, ebenfalls gleich Γ, wenn die Strömung ansonsten drehungsfrei ist (d. h. in jedem einfach zusammenhängenden Teilgebiet die Zirkulation verschwindet). Das Potential, das sich aus dem Linienintegral zwischen einem festgehaltenen Punkt und einem jeweiligen Raumpunkt ergibt, ist bei solchen Strömungen mehrdeutig. Es nimmt bei jedem Umlauf um den Betrag Γ zu.

Der einfachste Fall einer ebenen Strömung dieser Art wird durch das Potential $\Phi = \mathrm{C} \cdot \varphi$ beschrieben. Hierin bedeutet φ einen Zentriwinkel(Abb. 2.28). Dieses Potential, das auch die Gl. (2.20) mit der komplexen Schreibweise $\mathrm{F} = -i \cdot \mathrm{C} \cdot \ln(z)$ erfüllt, nimmt bei einem Umlauf ($\varphi_2 = \varphi_1 + 2 \cdot \pi$) um $2 \cdot \pi \cdot \mathrm{C}$ zu. Dieser Wert stellt die Zirkulation Γ dar. Die Flächen konstanten Potentials sind hier Ebenen durch die Achse und die Stromlinien sind damit Kreise. Die Geschwindigkeit $w = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}s$ ergibt sich mit $\mathrm{d}s = r \cdot \mathrm{d}\varphi$ zu $w = \mathrm{C}/r$. Die Strömung stimmt daher mit derjenigen, die in dem Beispiel von Abb. 2.6 betrachtet wurde überein. Für $r = 0$ würde sich $w = \infty$ ergeben. Die Strömung hat demnach nur außerhalb eines Kerns von endlichem Durchmesser (Abb. 2.28 grau unterlegt) physikalischen Sinn. Der Kern kann entweder durch einen festen Körper gebildet werden oder er kann aus drehender Flüssigkeit bestehen (in der es kein Potential gibt). Er kann auch aus einer anderen (leichteren) nicht rotierenden Flüssigkeit bestehen, wie z. B. aus Luft, wenn Wasser die umlaufende Flüssigkeit bildet (Hohlwirbel). Unter der Wirkung

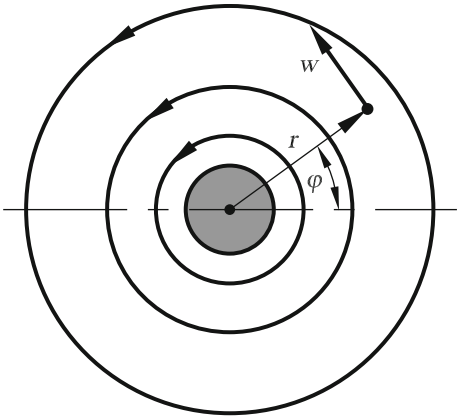


Abb. 2.28 Potentialströmung mit Zirkulation

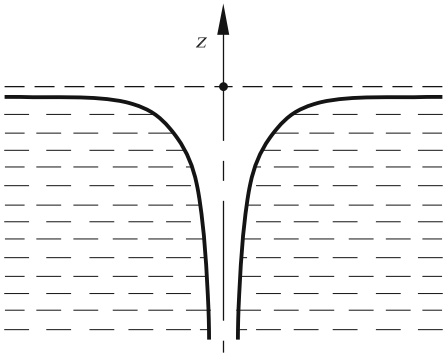


Abb. 2.29 Hohlwirbel

des Schwerefeldes der Erde nimmt die Oberfläche eines solchen Hohlwirbels eine Gestalt wie in Abb. 2.29 an. Deren Form ergibt sich aus der Bernoulli-Gleichung zu

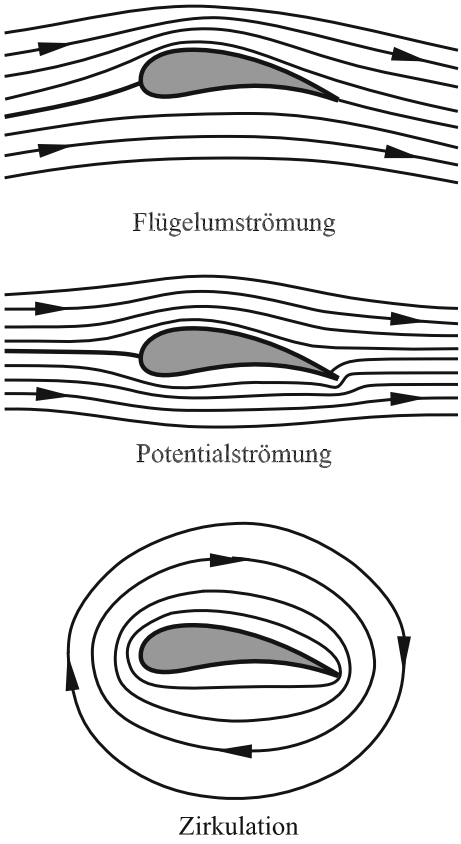
$$z = z_0 - \frac{w^2}{2 \cdot g} = z_0 - \frac{\mathrm{C}^2}{2 \cdot g \cdot r^2}.$$

Derartige Trichter können in fließenden Gewässern, beim Entleeren einer Badewanne usw. beobachtet werden. In diesen Fällen handelt es sich um Strömungen, in denen durch andere Ursachen bereits vorher Zirkulation vorhanden war.

6 Tragflügelauftrieb und Magnus-Effekt

Eine weitere Anwendung der Potentialströmungen mit Zirkulation ist die Bestimmung des Auftriebs von Tragflügeln, der in Abschn. 3 des Kap. 5 ▸ Aerodynamik ausführlich behandelt wird. Die Tragflügelumströmung in Abb. 2.30 (oberes Bild) lässt sich durch Überlagerung aus der gewöhnlichen Potentialströmung (ohne Zirkulation) und einer Strömung mit Zirkulation um den Flügel erzeugen. Damit

Abb. 2.30
Flügelumströmung



besitzt die Tragflügelumströmung selbst eine Zirkulation. Auch ohne Rechnung erkennt man, dass die mit Zirkulation behaftete Strömung auf der Profiloberseite die Potentialströmung verstärkt und ihr auf der Unterseite entgegenwirkt. Nach der Bernoulli-Gleichung bedeutet das eine Druckabnahme auf dem Flügel und eine Druckzunahme auf der Flügelunterseite, d. h. es entsteht ein Auftrieb. *M. W. Kutta* und *N. Y. Joukowski* fanden unabhängig voneinander heraus, dass diese Kraft proportional der Zirkulation Γ ist. Ihre Größe ist auf die Längeneinheit bezogen gleich $\rho \cdot \Gamma \cdot U_\infty$, mit der Anströmgeschwindigkeit U_∞ des Tragflügels. Dieser Satz wird in Abschn. 7 bewiesen.

Nach dem Satz von Thomson kann bei Bewegungen aus der Ruhe heraus auch in einem mehrfach zusammenhängenden Raum keine Zirkulation entstehen, da im Ruhestand die Zirkulation auf jeder Linie gleich Null ist. Damit bleibt sie auch bei der Bewegung gleich Null. Tatsächlich entsteht die Zirkulation in der Regel über eine Trennfläche. So bildet sich z. B. bei dem Spiralgehäuse in Abb. 2.6 beim Bewegungsbeginn an der scharfen Kante ein Wirbel entsprechend Abb. 2.15 aus. Der Wirbel fließt später bei O ab und es bleibt nur seine Zirkulation für die Dauer der Strömung zurück.

Abb. 2.31 Anfahrwirbel eines Flügels

Für die Umströmung eines Tragflügels ergibt sich eine ganz ähnliche Lösung. Zu Beginn der Bewegung entsteht an der Hinterkante des Tragflügels entsprechend der Abb. 2.31 eine Trennfläche. Später wandert der aus der Trennfläche entstandene Wirbel ab. Am Tragflügel verbleibt eine Zirkulation, die der des Wirbels entgegengesetzt gleich ist. Die Linien, die den Tragflügel und den Wirbel zusammen umschließen, behalten dabei die Zirkulation Null, wie es der Thomsonsche Satz verlangt.

Damit durch den Flügel ein zweifach zusammenhängendes Strömungsgebiet erzeugt wird, muss man den Flügel seitlich durch zwei parallele Wände begrenzen oder man muss annehmen, dass er nach beiden Seiten unendlich ausgedehnt ist. Bei realen Tragflügeln ist weder das eine noch das andere der Fall. Die Zirkulation um den Flügel, die auch hier vorhanden und zum Zustandekommen des Auftriebs notwendig ist, wird durch eine Trennfläche mit transversalem Geschwindigkeitssprung erzeugt.

Eine Zirkulation wie beim Tragflügel entsteht auch bei einem quer zur Achse angeströmten rotierenden Kreiszylinder (und zwar durch Reibungswirkung). Sie erzeugt hier eine auf die Längeneinheit bezogene Kraft quer zur Strömung die gleich $\rho \cdot \Gamma \cdot U_\infty$ ist und die hier Quertrieb genannt wird. Auch bei dreieckigen und viereckigen Prismen, die um ihre Längsachse rotieren, sowie bei Kugeln usw. tritt diese Kraft auf. Die Wirkung der Kraft erfolgt dabei immer von der Seite, auf der Drehung und Strömung entgegengesetzt gerichtet sind nach derjenigen, auf der sie in die gleiche Richtung weisen. Dieser Effekt wird nach seinem Entdecker *H. G. Magnus* 1852 *Magnus-Effekt* genannt.

Kugelförmige Geschosse erhalten beim Verlassen des Laufes oft unbeabsichtigte Rotationen um Querachsen. Dadurch ergeben sich in ihrer Flugbahn Seitenabweichungen. Dieses Verhalten ist der Anlass zur Betrachtung des Magnus-Effektes gewesen. Solche Seitenabweichungen lassen sich auch beim Flug von angeschnittenen Tennis- und Golfbällen durch die Luft beobachten. *A. Flettner* 1926 hat mit seinem Rotorschiff den Effekt zum Antrieb von Schiffen durch den Wind benutzt. Dabei wurden an Stelle der Segel senkrecht schnell rotierende Zylinder verwendet. An den Enden sollten überstehende Scheiben angebracht werden (Abb. 2.32 links), da sonst die nicht mit umlaufende Luft an den Zylinderenden in das Unterdruckgebiet auf der Saugseite eindringt und die Strömung dort teilweise zerstört. Die Versuche mit derartigen Schiffen waren erfolgreich. Wirtschaftlich war jedoch das gewöhnliche Motorschiff überlegen, so dass der Flettner-Antrieb sich nicht durchsetzen konnte.

Die Wirkung des Flettner-Rotors kann mit einem einfachen Experiment nachvollzogen werden. Ein von einem kleinen Elektromotor angetriebener rotierender Zylinder befindet sich auf einem auf Schienen laufenden Wagen. Wird der Zylinder durch einen kleinen Ventilator quer zu den Schienen angeblasen, fährt der Wagen auf den Schienen vorwärts. Dreht man den Ventilator so, dass der Wind mit den

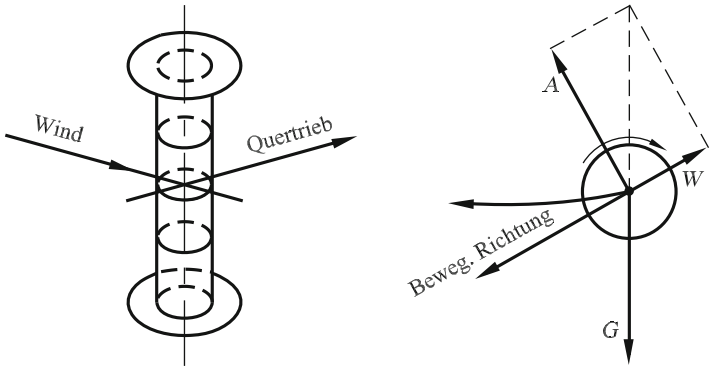


Abb. 2.32 Rotierender Zylinder

Schienen einen anderen Winkel bildet, kann man das Verhalten des Zylindersegels unter verschiedenen Anströmwinkeln untersuchen. Es gelingt, den Wagen unter spitzem Winkel gegen den Wind fahren zu lassen. Bei Umkehrung der Drehrichtung des Zylinders fährt der Wagen in die entgegengesetzte Richtung.

Ein mit waagerechter Achse in schnelle Rotation versetzter leichter Zylinder fällt nicht senkrecht herunter, wenn er losgelassen wird, sondern seine Flugbahn geht in einen flachen Gleitflug über. Er erfährt außer dem Auftrieb A senkrecht zu seiner Bahn einen Widerstand W in Richtung der Flugbahn, der im günstigsten Fall (länglicher Zylinder mit Endscheiben) wesentlich kleiner als der Auftrieb ist. Die Resultierende dieser beiden Kräfte hält dem Gewicht G des Zylinders das Gleichgewicht (Abb. 2.32 rechts) und verhindert sein senkrechtes Fallen.

7 Impulssatz für stationäre Strömungen

Die Impulssätze der allgemeinen Mechanik, die unter dem Namen Schwerpunkts- und Flächensätze bekannt sind, werden auch auf die stationären und instationären Strömungen der Flüssigkeiten, deren zeitliche Mittelwerte als stationäre Bewegungen angesehen werden können, angewendet. Der Wert dieser Impulssätze besteht darin, dass sie nur Aussagen über die Zustände an den Grenzflächen eines Gebietes enthalten, und man deshalb aus ihnen auch Schlüsse auf Vorgänge ziehen kann, deren Einzelheiten nicht vollständig bekannt sind.

Unter dem Impuls einer Masse versteht man das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit. Der Impuls ist ein Vektor und hat wie die Geschwindigkeit drei Komponenten. Die *zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der an der Masse angreifenden resultierenden Kraft*. In Abschn. 2 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik wurde bereits gezeigt, dass sich bei der Summierung über alle Massen eines mechanischen Systems alle inneren Kräfte nach dem Prinzip von Aktio und Reaktio aufheben und nur die äußeren Kräfte übrigbleiben, die von nicht zum System gehörenden Massen ausgeübt werden.

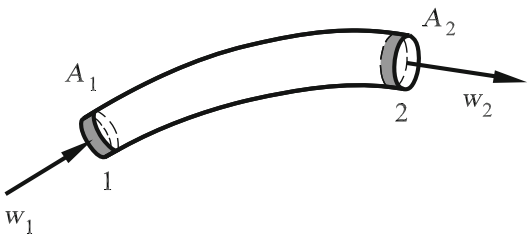


Abb. 2.33 Impulsänderung im Stromfaden

In einer beliebig abgegrenzten *stationär* strömenden Flüssigkeitsmasse ändert sich der Impuls nur dadurch, dass die Grenzen der Flüssigkeitsmasse sich in Folge der Strömung verschieben. Im Inneren der Flüssigkeitsmasse ist jedes Teilchen an seinem Ort durch ein anderes ersetzt worden, das seine Geschwindigkeit angenommen hat. Was an den Grenzen passiert, kann an einem Stromfaden gezeigt werden. Der Impulssatz beinhaltet, dass jede Teilmasse, die zum System gehört, im System verbleibt und keine anderen Teilmassen neu hinzukommen. Die zur Anwendung des Satzes gewählten Grenzflächen verschieben sich deshalb mit der Strömung. Bei dem Stromfaden in Abb. 2.33 verschwindet in der Zeit dt bei 1 die Masse $\mathrm{d}m_1 = \rho \cdot A_1 \cdot w_1 \cdot \mathrm{d}t$. Bei 2 tritt die Masse $\mathrm{d}m_2 = \rho \cdot A_2 \cdot w_2 \cdot \mathrm{d}t$ neu hinzu. Wegen der Kontinuität gilt $\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2 = \mathrm{d}m$. Zur gesamten Impulsänderung liefert der Stromfaden bei 2 in der Zeit dt den positiven Beitrag $\mathrm{d}m \cdot w_2$, in der Zeiteinheit also $(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t) \cdot w_2 = \rho \cdot A_2 \cdot w_2^2$ (in Richtung von w_2). Bei 1 ergibt sich analog der negative Anteil $-(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t) \cdot w_1 = -\rho \cdot A_1 \cdot w_1^2$ (in entgegengesetzter Richtung zu w_1). Die Vektorsumme dieser Impulsänderung pro Zeiteinheit ist gleich der Resultierenden der an dem Stromfaden angreifenden äußeren Kräfte. Statt der Impulsänderungen kann man auch deren Reaktionen betrachten, d. h. die Kräfte von demselben Betrag, aber in entgegengesetzter Richtung. Die Vektorsumme dieser Reaktionskräfte steht mit den an dem Stromfaden angreifenden Kräften im Gleichgewicht. Der Gedankengang entspricht dem, wie bei der Einführung der Trägheitskräfte im d'Alembertschen Prinzip der Mechanik starrer Körper. Der Flüssigkeitsströmung in Abb. 2.33 bei 1 entspricht eine Reaktionskraft $\rho \cdot A_1 \cdot w_1^2$ in Richtung der eintretenden Strömung und bei 2 eine Reaktionskraft $\rho \cdot A_2 \cdot w_2^2$ in entgegengesetzter Richtung der austretenden Strömung. Mit dieser Formulierung ist der Übergang zu einer ortsfesten Fläche vollzogen. Durch die ortsfeste Begrenzungsfläche hindurch werden die Impulsänderungen (bzw. ihre Reaktionskräfte) und die Druckkräfte übertragen. Um die Impulssätze richtig anzuwenden, wird die Flüssigkeitsmasse zweckmäßig mit einer geschlossenen Fläche, der *Kontrollfläche*, umgeben. Diese ist in einigen der folgenden Abbildungen fett kenntlich gemacht. Für alle ein- und austretenden Stromfäden müssen die Reaktionskräfte mit sämtlichen äußeren Kräften, die an der in der Kontrollfläche eingeschlossenen Flüssigkeit angreifen, nach den Regeln der Statik ein Gleichgewichtssystem bilden. Das heißt sowohl die Summe der Kräfte als auch die Summe der Momente der Kräfte muss für alle Koordinatenachsen gleich Null sein. Den Praktiker interessieren oft statt der auf die Flüssigkeit ausgeübten Kräfte, die von der Flüssigkeit auf die Gefäßwände

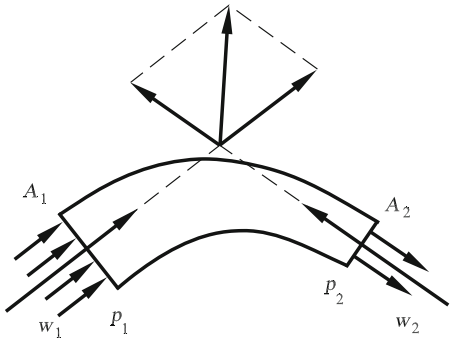


Abb. 2.34 Reaktionskräfte am gekrümmten Rohr

ausgeübten Kräfte. Sehr häufig benötigt man nur die Gleichung einer Komponente, die zur Lösung der speziellen Aufgabe dient.

Im Fall *instationärer* Strömungen kommt ein zusätzlicher Anteil in der Kräftebilanz hinzu, der durch die Impulsänderung im Innern der Flüssigkeit entsteht. Wenn die instationäre Strömung einen konstanten Mittelwert des Impulses besitzt, was oft bei turbulenten Strömungen zutrifft, heben sich die Beiträge des Flüssigkeitsinnern im Mittel auf. Deshalb lassen sich die Impulssätze wie bei stationären Strömungen anwenden.

7.1 Reaktionskräfte in gekrümmten Kanälen

Die Flüssigkeit strömt mit einer Geschwindigkeit w_1 und einem Druck p_1 in den gekrümmten Kanal ein (Abb. 2.34). Der Impulstransport durch die Fläche A_1 ist gleich $\rho \cdot A_1 \cdot w_1^2$. Er ist gleichbedeutend mit einer von der einströmenden Flüssigkeit in Strömungsrichtung ausgeübten Kraft. Dazu ist eine Druckkraft $p_1 \cdot A_1$ in der gleichen Richtung zu berücksichtigen. Eine entsprechende Reaktionskraft $A_2 \cdot (\rho \cdot w_2^2 + p_2)$ wirkt bei der Ausströmung des Kanals. Sie ist entgegengesetzt zur Geschwindigkeit (also immer nach dem Innern der Kontrollfläche) gerichtet. Die Resultierende der beiden Kräfte ist die tatsächlich durch die Druckkräfte an der Wand hervorgerufene Kraftwirkung des Flüssigkeitsstroms auf den Kanal.

7.2 Reaktionskräfte in Freistrahlen

Ein Strahl, der durch eine Öffnung aus einem Raum mit dem Druck p_1 in einen Raum mit dem Druck p_2 ausströmt, besitzt pro Zeiteinheit einen Impuls der Größe $J = \rho \cdot A \cdot w^2$. Dabei ist A der Strahlquerschnitt. Mit $w = \sqrt{2 \cdot (p_1 - p_2)/\rho}$ (Abschn. 2) ergibt sich $J = 2 \cdot A \cdot (p_1 - p_2)$. Dieses entspricht dem Zweifachen der Kraft, die von dem Druckunterschied $p_1 - p_2$ auf einen Kolben von der Größe des Strahlquerschnitts ausgeübt würde. Dieser Impuls muss ein Äquivalent in der Druckverteilung haben. Daraus folgt, dass gegenüber dem geschlossenen Gefäß,

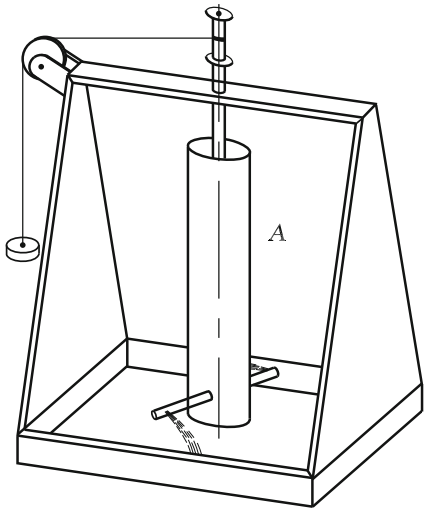


Abb. 2.35 Segnersches Wasserrad

durch den Wegfall des Überdrucks p_1 auf die Öffnung und die Druckabsenkung in der Umgebung der Öffnung infolge der Zuströmung zum Ausfluss, ein Verlust des Wanddrucks entsteht. Dieses entspricht dem Druck auf den zweifachen Strahlquerschnitt. Der Wegfall des Drucks äußert sich als Reaktionskraft des ausfließenden Strahls. Diese Reaktionskraft lässt sich nachweisen, indem man ein Gefäß mit einer seitlichen Öffnung auf einen leicht beweglichen Wagen stellt. Der Wagen mit dem Gefäß setzt sich in der dem ausfließenden Strahl entgegengesetzten Richtung in Bewegung.

Ein ähnlicher Versuch kann mit dem *Segnerschen Wasserrad* (Abb. 2.35) durchgeführt werden. Mit Hilfe des ausfließenden Wassers kann z. B. ein Gewicht gehoben werden, oder es kann eine andere Arbeit verrichtet werden.

Im Fall der *Borda-Mündung* (Abb. 2.36), lässt sich aus der Größe des Impulses die so genannte Kontraktionsziffer, das ist das Verhältnis des Strahlquerschnitts zum Lochquerschnitt, bestimmen. Da auf allen Wandflächen, deren Druckkräfte Komponenten in der Strahlrichtung besitzen, der volle Überdruck p_1 wirkt, muss der Wegfall des Überdrucks im Mündungsquerschnitt A gleich dem Strahlimpuls sein. Es gilt $A \cdot (p_1 - p_2) = 2 \cdot A_S \cdot (p_1 - p_2)$ oder $A_S = (1/2) \cdot A$.

7.3 Plötzliche Erweiterung

Tritt eine Flüssigkeitsströmung mit der Geschwindigkeit w_1 aus einem zylindrischen Rohrstück in ein größeres ebenfalls zylindrisches Rohr ein, wird der Strahl sich mit der umgebenden Flüssigkeit vermischen. Nach der Vermischung wird er nahezu gleichförmig mit einer mittleren Geschwindigkeit w_2 abströmen. Der Impulssatz erlaubt es die mit der Vermischung verbundene Druckzunahme $p_1 - p_2$ zu berechnen, ohne dass die Einzelheiten des Vermischungsvorganges bekannt sein müssen. In

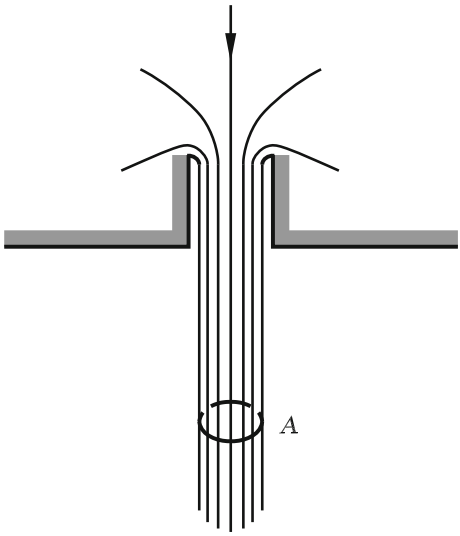


Abb. 2.36 Borda-Mündung

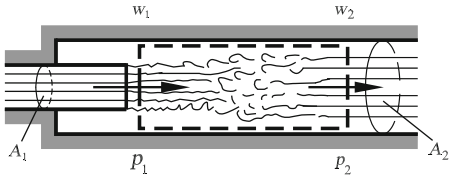


Abb. 2.37 Plötzliche Erweiterung (Diffusor)

der ruhenden Flüssigkeit des größeren Rohres, die den eintretenden Strahl umgibt, herrscht derselbe Druck p_1 wie im Strahl (siehe Abschn. 5 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Freistrahl). Für die in Abb. 2.37 gezeichnete Kontrollfläche, von der nur die Kräfte auf die beiden Stirnflächen Beiträge zum Kräftegleichgewicht liefern, gilt:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot (w_1 - w_2) = A_2 \cdot (p_2 - p_1).$$

Mit $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = \rho \cdot A_2 \cdot w_2$ erhält man:

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot w_2 \cdot (w_1 - w_2).$$

Bei einer sich allmählich erweiternden Röhre würde die Bernoulli-Gleichung für die Druckdifferenz $p_2 - p_1 = (1/2) \cdot \rho \cdot (w_1^2 - w_2^2)$ ergeben. Durch die plötzliche Erweiterung ist demnach ein Druckverlust $p_2' - p_2 = (1/2) \cdot \rho \cdot (w_1 - w_2)^2$ entstanden. Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung für den Verlust an kinetischer Energie beim unelastischen Stoß fester Körper überein. Deshalb wird oft von einem *Stoßverlust* bei der plötzlichen Erweiterung gesprochen, obwohl hier kein Stoßvorgang vorliegt. Mit dem Stoßvorgang hat die plötzliche Erweiterung lediglich die Vermischung der Geschwindigkeiten gemeinsam.

7.4 Schweben schwerer Körper in Luft

Um in ruhender Luft eine Last am Schweben zu halten ist es notwendig, immer neue Luftmassen abwärts zu beschleunigen. w sei die Endgeschwindigkeit mit der sich die Luft nach unten bewegt. Sie wird zur Vereinfachung als gleichförmig angenommen. $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = \dot{m}$ ist die in der Zeiteinheit in Bewegung gesetzte Luftmasse. Treten keine wesentlichen Druckdifferenzen in der nach unten bewegten Masse auf, ist die resultierende Kraft gleich dem Impuls $J = \dot{m} \cdot w$. In guter Näherung kann diese Betrachtung z. B. für eine frei schwebende Hubschraube durchgeführt werden, wenn die Hubschraube genügend weit vom Boden entfernt ist. Es bildet sich dann ein senkrecht nach unten gerichteter Luftstrahl mit dem Impuls $J = \dot{m} \cdot w$ aus. Der Luftstrahl vermischt sich bei hinreichender Entfernung vom Boden mit der ruhenden Luft aus der Umgebung und wird dadurch verlangsamt. Der Impuls bleibt dabei unverändert, da die bewegte Masse sich entsprechend vergrößert. Der Strahl überträgt schließlich beim Aufprallen auf den Erdboden das Gewicht der Luftschraube als Druckkraft auf den Boden. Dabei verliert er seinen Impuls.

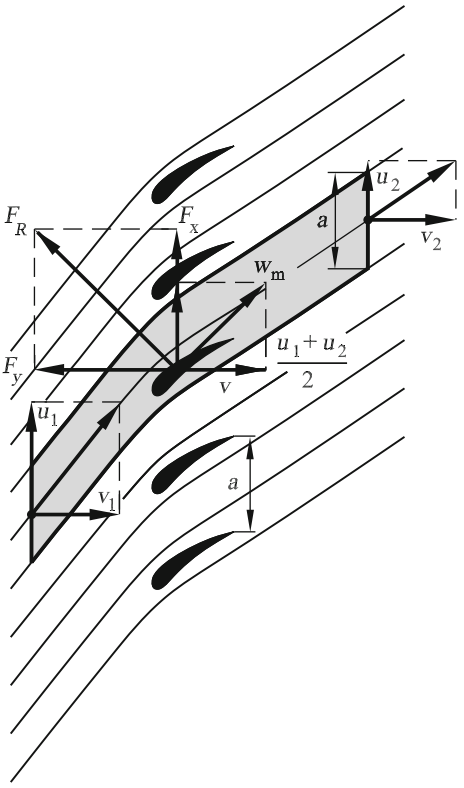
Beim Flugzeug wird die abwärts bewegte Masse durch das in der Luft zurückbleibende Wirbelsystem gebildet. Hier ist jedoch auch das Druckfeld von Bedeutung. Es kommt auf die Gestalt der Kontrollfläche an, ob man das Äquivalent des Auftriebs als Impuls- oder als Druckkraft erhält. Am Erdboden entsteht unter dem Flugzeug eine Druckerhöhung, durch die das Gewicht des Flugzeugs auf den Erdboden übertragen wird.

7.5 Schaufelgitter, Satz von Kutta und Joukowski

Um die Wechselwirkung zwischen den Schaufeln einer Turbine oder den Flügeln eines Propellers mit dem vorbeiströmenden Fluid zu untersuchen, wird zunächst der einfachere Fall des ebenen *Schaufelgitters* betrachtet. Das ebene Schaufelgitter besteht aus lauter gleich großen, parallel zueinander eingestellten unendlich langen Schaufeln. Die Impulssätze für die zur Gitterebene parallelen und die dazu senkrechten Kraftkomponenten liefern zusammen mit der Bernoulli-Gleichung und der Kontinuitätsgleichung Aufschlüsse über die Schaufelkräfte in Verbindung mit den Strömungsgeschwindigkeiten. Abb. 2.38 stellt ein Schaufelgitter mit einer Strömung dar, wie sie einem relativ zu den Schaufeln ruhenden Beobachter erscheint. Das abgebildete Schaufelgitter entspricht dem eines Propellers. Die Schaufeln einer Turbine besitzen eine umgekehrte Wölbung und die Kraftkomponenten zeigen in die entgegengesetzte Richtung. Die folgende Überlegung gilt jedoch für beide Schaufelformen. Die Geschwindigkeitskomponenten parallel und senkrecht zu dem Schaufelgitter seien u und v, die entsprechenden Kräfte bezogen auf die Längeneinheit einer Schaufel F_x und F_y (positiv in den in Abb. 2.38 angegebenen Richtungen). Der Index 1 bezieht sich auf den Eintritt, der Index 2 auf den Austritt.

Es wird vorausgesetzt, dass in der Strömung keine Verluste auftreten. Sie ist dann eine Potentialströmung mit Zirkulation um die Schaufeln. Im Impulssatz

Abb. 2.38 Schaufelgitter



wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass bei diesen Potentialströmungen die Geschwindigkeit in einigem Abstand vor und hinter dem Schaufelgitter nahezu konstant ist. Die Strömung zwischen den Schaufeln braucht dabei nicht näher bekannt zu sein. Es muss nur sichergestellt sein, dass sich keine Ablösung ausbildet. Das kann bei unzweckmäßiger Form der Schaufeln vorkommen.

Zunächst ergibt die Kontinuität mit dem Schaufelabstand a:

$$Q = v_1 \cdot a = v_2 \cdot a.$$

Dabei ist Q die Flüssigkeitsmenge die pro Zeiteinheit zwischen zwei Schaufeln in einer Schicht der Tiefe 1 parallel zur Schaufelachse strömt. Es gilt $v_1 = v_2$. Deshalb wird im Folgenden diese Geschwindigkeitskomponente nur noch mit $v = v_1 = v_2$ bezeichnet. Aus der Bernoulli-Gleichung erhält man mit $w^2 = u^2 + v^2$ (resultierende Geschwindigkeit w):

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot (u_1^2 + v^2) = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot (u_2^2 + v^2)$$

oder

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot (u_1^2 - u_2^2). \tag{2.22}$$

Für den Impulssatz wird eine Kontrollfläche ausgewählt, deren Begrenzung im Schaufelgitter aus zwei gleich verlaufenden Stromlinien besteht, die um eine Schaufelteilung a auseinander liegen. Die weitere Begrenzung wird aus zwei Geraden von der Länge a parallel zur Gitterebene gebildet. Die Kontrollfläche ist in Abb. 2.38 fett eingezeichnet. Die Tiefe sämtlicher Flächen sei 1. Durch die beiden Stromlinienflächen strömt nichts hindurch. Wegen ihrer gleichen Lage bezüglich des Schaufelgitters stimmen alle Größen auf ihnen überein. Damit besitzen sie auch die gleiche Druckverteilung. Sie liefern deshalb weder zum Impuls noch zu der Resultierenden aus den Druckkräften einen Beitrag. Für das Kräftegleichgewicht sind nur die Anteile der Flächen parallel zu der Gitterebene zu berechnen. Die pro Zeiteinheit durchströmende Masse ist $\rho \cdot Q = \rho \cdot a \cdot v$. Man erhält:

$$F_x = 0 + \rho \cdot a \cdot v \cdot (u_1 - u_2) = \rho \cdot a \cdot v \cdot (u_1 - u_2), \tag{2.23}$$

$$F_y = a \cdot (p_2 - p_1) + 0 = a \cdot (p_2 - p_1). \tag{2.24}$$

Es ist sinnvoll in diese Gleichungen die Zirkulation um eine Schaufel einzuführen. Wir benutzen für ihre Berechnung wieder die fette Linie. Die beiden Stromlinien werden in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Es ergeben sich entgegengesetzt gleich große Beiträge. Die beiden geraden Stücke liefern aber die Anteile $a \cdot u_1$ und $-a \cdot u_2$. Damit wird die Zirkulation

$$\Gamma = a \cdot (u_1 - u_2). \tag{2.25}$$

Verwendet man Gl. (2.22) und benutzt den Zusammenhang

$$u_1^2 - u_2^2 = (u_1 - u_2) \cdot (u_1 + u_2),$$

ergibt sich aus (2.23) und (2.24):

$$F_x = \rho \cdot \Gamma \cdot v, \tag{2.26}$$

$$F_y = \rho \cdot \Gamma \cdot \frac{u_1 + u_2}{2}. \tag{2.27}$$

Das Verhältnis $F_y/F_x = ((u_1 + u_2)/2)/v$ zeigt, dass die Resultierende aus F_x und F_y senkrecht zu der aus $(u_1 + u_2)/2$ und v gebildeten resultierenden Geschwindigkeit steht. Dieses ist durch die Betrachtung der entsprechenden ähnlichen Dreiecke in Abb. 2.38 leicht ersichtlich. Wird die resultierende Kraft F_R und die resultierende Mittelgeschwindigkeit w_m genannt, gilt außerdem:

$$F_\mathrm{R} = \rho \cdot \Gamma \cdot w_\mathrm{m}. \tag{2.28}$$

Dieses ist der Satz von *Kutta und Joukowski*. Er lässt sich auch auf andere Art beweisen. Joukowski hat ihn dadurch abgeleitet, dass er den Impulssatz für eine Kontrollfläche anwendet, die aus einem Kreiszylinder mit sehr großem Radius besteht. Die Tragflächenachse ist die Zylinderachse. Man erhält dabei die Hälfte von F_R als Impulskraft, die andere Hälfte als die Resultierende der Druckkräfte. Dieser Satz ist deshalb wichtig, weil durch ihn die zu einem gegebenen Auftrieb gehörende Zirkulation, durch die die Wirbel hinter der Tragfläche bestimmt sind, ermittelt werden kann.

7.6 Impulsmomente, Eulersche Turbinengleichung

Entsprechend den Momenten von Kräften in der Statik kann man auch Momente von Impulskräften bilden. Es gilt auch hier ein dem Schwerpunktsatz analoger Satz: *Die zeitliche Änderung des Impulsmoments ist gleich dem resultierenden Moment der Kräfte*. Dieser Satz wird auch *Drehimpulssatz* genannt. Für stationäre Flüssigkeitsströmungen geht er analog zum Impulssatz wieder in den Satz vom Gleichgewicht der Momente der äußeren Kräfte und der Momente der Reaktionskräfte der Flüssigkeit über.

Als Beispiel wird die *Eulersche Turbinengleichung* hergeleitet. Durch das mit der Winkelgeschwindigkeit ω drehende Laufrad der Abb. 2.39 strömt pro Zeiteinheit die Wassermenge $\dot{m}$. Die Relativgeschwindigkeit am Eintritt ist w_1 für den Eintrittsradius r_1 der Kontrollfläche und am Austritt ist die Relativgeschwindigkeit w_2 für den Austrittsradius r_2.

Die Relativgeschwindigkeiten w ergeben sich gemäß der Geschwindigkeitsdreiecke aus Abb. 2.39 aus der Umfangsgeschwindigkeit U und der Absolutgeschwindigkeit c. Betrachtet man von der Absolutgeschwindigkeit c nur den Anteil in Umfangsrichtung, spricht man von der Umfangskomponte c_u der Absolutge-

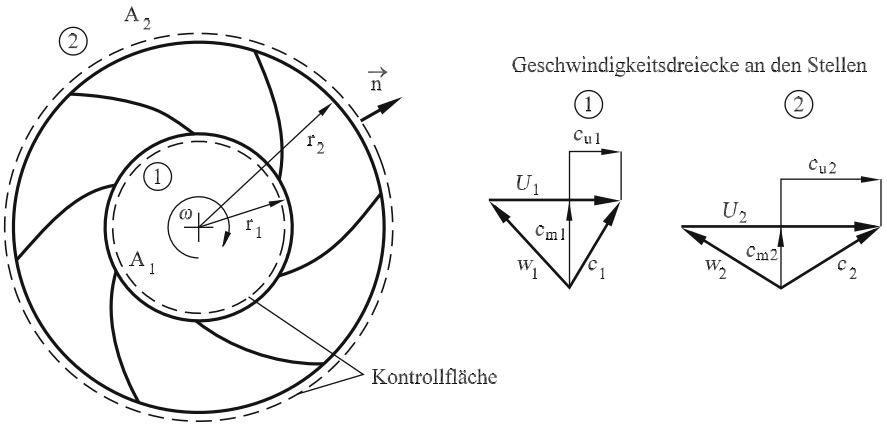


Abb. 2.39 Laufrad einer Turbine

schwindigkeit. Analog bezeichnet man die Komponente in Meridianrichtung als Meridiankomponente c_m der Absolutgeschwindigkeit.

Entsprechend dem zu Beginn des Abschnitts eingeführten Impulssatz, gilt für die Drehmomente der *Drehimpulssatz*:

$$M_1 + M_2 + M_S = 0. \tag{2.29}$$

Die am Eintritt und Austritt auf die Kontrollfläche wirkenden Druckkräfte sind radial gerichtet und verursachen kein Moment. M_S entspricht deshalb dem Antriebsmoment mit entgegengesetztem Vorzeichen:

$$M_S = -M_{\text{Antrieb}}.$$

Für die Impulsmonente M_1 und M_2 am Eintritt und Austritt gilt:

$$M_1 = -\rho \cdot c_{m1} \cdot A_1 \cdot r_1 \cdot c_{u1},$$
$$M_2 = \rho \cdot c_{m2} \cdot A_2 \cdot r_2 \cdot c_{u2}.$$

M_S, M_1 und M_2 eingesetzt in Gl. (2.29) ergibt:

$$-M_{\text{Antrieb}} - \rho \cdot c_{m1} \cdot A_1 \cdot r_1 \cdot c_{u1} + \rho \cdot c_{m2} \cdot A_2 \cdot r_2 \cdot c_{u2} = 0. \tag{2.30}$$

Berücksichtigt man die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{m} = \rho \cdot c_{m1} \cdot A_1 = \rho \cdot c_{m2} \cdot A_2,$$

mit dem Massenstrom $\dot{m}$ durch das Laufrad, erhält man die *Eulersche Turbinengleichung*:

$$M_{\text{Antrieb}} = \dot{m} \cdot (r_2 \cdot c_{u2} - r_1 \cdot c_{u1}). \tag{2.31}$$

Für die Antriebsleistung L des Laufrades gilt:

$$L = M_{\text{Antrieb}} \cdot \omega = \omega \cdot \dot{m} \cdot (r_2 \cdot c_{u2} - r_1 \cdot c_{u1})$$

beziehungsweise

$$L = \dot{m} \cdot (U_2 \cdot c_{u2} - U_1 \cdot c_{u1}).$$

8 Wellen auf einer freien Flüssigkeitsoberfläche

8.1 Ebene Schwebewellen

In den meisten Fällen ist es bei einer freien Flüssigkeitsoberfläche zulässig, die Masse der von der Flüssigkeit mit in Bewegung gesetzten Luftteile gegenüber der Masse der Flüssigkeit zu vernachlässigen. Damit muss der Druck der freien

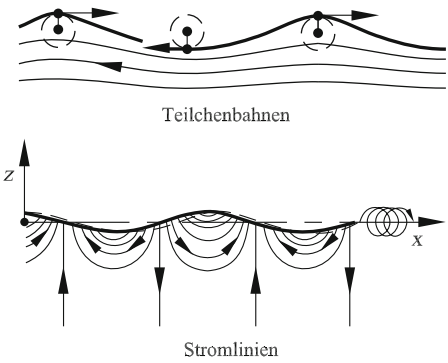


Abb. 2.40 Wellenbewegung

Oberfläche gleich dem Luftdruck p_∞ sein. Beobachtungen haben gezeigt, dass bei der einfachsten Wellenbewegung die einzelnen Teilchen der Wasseroberfläche näherungsweise Kreisbahnen beschreiben. Von einem Bezugssystem aus, das sich mit der Fortschreitungsgeschwindigkeit der Wellenberge und -täler mit den Wellen mitbewegt, ergibt sich eine stationäre Strömung auf die die Bernoulli-Gleichung angewandt werden kann (Abb. 2.40). Der Radius der Kreisbahn eines an der Oberfläche gelegenen Teilchens ist r und die Umlaufszeit ist T. Damit ergibt sich die Geschwindigkeit auf dem Kreis zu $2 \cdot \pi \cdot r/T$. Ist die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Wellen gleich c, wird in dem genannten Bezugssystem die Strömungsgeschwindigkeit auf dem Wellenberg $w_1 = c - 2 \cdot \pi \cdot r/T$ und im Wellental $w_2 = c + 2 \cdot \pi \cdot r/T$. Der Höhenunterschied ist $h = 2 \cdot r$. Wegen der Druckgleichheit gilt:

$$w_2^2 - w_1^2 = 2 \cdot g \cdot h = 4 \cdot g \cdot r.$$

Die linke Seite ergibt $8 \cdot \pi \cdot c \cdot r/T$. Damit erhält man:

$$c = g \cdot \frac{T}{2 \cdot \pi}. \tag{2.32}$$

r kürzt sich heraus, d. h. die Wellengeschwindigkeit hängt nicht von der Höhe der Wellenberge ab. Wenn nicht die Schwingungszeit T, sondern die Wellenlänge λ gegeben ist, muss noch die Beziehung benutzt werden, die das Fortschreiten der Wellenberge und -täler mit der Geschwindigkeit c mit der Schwingungszeit verknüpft. Es gilt:

$$\lambda = c \cdot T. \tag{2.33}$$

Durch Eliminieren von T in Gl. (2.32) mit (2.33) erhält man:

$$c = \sqrt{g \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot \pi}}. \tag{2.34}$$

Im Gegensatz zu den Schallwellen ergibt sich bei den Wasserwellen eine starke Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge. Lange Wellen laufen schneller als die kurzen. Die Wellen können sich gegenseitig überlagern, ohne sich wesentlich zu stören. Bei der Überlagerung von kurzen und langen Wellen bleiben die kurzen Wellen gegenüber den langen zurück. Die Stromlinien der Wellenbewegung in einem relativ zum ungestörten Wasser ruhenden Bezugssystem zeigt das untere Bild der Abb. 2.40. Die Bewegung des Wassers nimmt, wie man an den Stromlinien erkennt, mit wachsender Tiefe unter der Oberfläche sehr rasch mit $\exp(-2 \cdot \pi \cdot (z_1 - z)/\lambda)$ ab. In der Tiefe einer Wellenlänge ist die Bewegung nur noch etwa $1/500$ derjenigen an der Oberfläche.

Die Oberflächenwellen sind nach den Überlegungen von Abschn. 5 Potentialbewegungen. Für Wellen mit kleinen Amplituden ist das Potential $\Phi = a_1 \cdot e^{\mu \cdot z} \cdot \cos(\mu \cdot (x - c \cdot t))$, mit $\mu = 2 \cdot \pi/\lambda$. Für endliche Amplituden tritt an die Stelle des Cosinus eine Fourrier-Reihe. Die Amplituden der einzelnen Glieder folgen aus der Bedingung, dass an allen Stellen der Oberfläche der Druck konstant sein muss. Eine genauere theoretische Betrachtung zeigt, dass Gl. (2.34) nur für flache Wellen gilt, und die Fortschreitungsgeschwindigkeit unabhängig von der Wellenhöhe ist. Bei hohen Wellen wird die Wellengeschwindigkeit etwas größer. Dort sind auch die Bahnen der Wasserteilchen nicht mehr geschlossen, sondern die Teilchen bewegen sich im Wellenberg weiter vorwärts, als sie im Wellental wieder zurück schwingen (siehe Abb. 2.40 unten rechts). Es findet in der Welle ein Wassertransport statt. Die höchste mögliche stationäre Form der Welle besitzen, nach Rechnungen von *G. G. Stokes* 1847, Wellenkämme mit einem Winkel von 120°. Bei weiterer Energiezufuhr beginnen die Wellenkämme zu schäumen.

Bei kurzen Wellenlängen wirkt neben der Schwerkraft auch die Oberflächenspannung. Da diese auf eine Glättung der welligen Oberfläche hinwirkt, führt sie zu einer Vergrößerung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Für die Kapillarkonstante C (Zugspannung in der Oberfläche) gilt

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi} + \frac{2 \cdot \pi \cdot C}{\rho \cdot \lambda}}. \tag{2.35}$$

Bei langen Wellen spielt nur der erste Summand eine Rolle. Ist die Wellenlänge sehr kurz, überwiegt der zweite Summand. Für die Wellenlänge $\lambda_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C/(g \cdot \rho)}$ hat c ein Minimum $c_1 = \sqrt[4]{4 \cdot g \cdot C/\rho}$. Für Wasser mit $\rho = 1000\,\mathrm{Ns^2/m^4}$ und $C = 0.073\,\mathrm{N/m}$ ergibt sich $\lambda_1 = 1.71\,\mathrm{cm}$ und $c_1 = 23.1\,\mathrm{cm/s}$ (gleichzeitig Gruppengeschwindigkeit). Man nennt Wellen, deren Wellenlänge größer als λ_1 ist, *Schwerewellen* und die kleineren *Kapillarwellen*.

8.2 Wellengruppen

Man unterscheidet die Geschwindigkeit, mit der die Wellenfronten fortschreiten, die so genannte Phasengeschwindigkeit c und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

einer Wellengruppe, die so genannte *Gruppengeschwindigkeit* c^*. Zur Herleitung der Gruppengeschwindigkeit wird die Überlagerung zweier Wellen mit gleicher Amplitude, aber geringfügig verschiedener Wellenlänge betrachtet. Diese Überlegung gilt nicht nur für Wasserwellen, sondern ganz allgemein für Wellen, deren Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängt, d. h. die eine *Dispersion* haben. Man geht von einer einfachen Sinuswelle

$$y = A \cdot \sin(\mu \cdot x - \nu \cdot t)$$

aus. Wird x um $2 \cdot \pi/\mu$ oder t um $2 \cdot \pi/\nu$ vergrößert, nimmt der Sinus denselben Wert wie vorher an. Folglich ist $\lambda = 2 \cdot \pi/\mu$ die Wellenlänge und $T = 2 \cdot \pi/\nu$ die Schwingungszeit. Für $\mu \cdot x - \nu \cdot t = \text{konst.}$, d. h. $x = \text{konst.} + (\nu/\mu) \cdot t$ ist das Argument des Sinus zeitlich konstant. Damit ist auch y zeitlich konstant. Dies bedeutet, dass die ganze Wellenform sich mit der Geschwindigkeit $c = \nu/\mu$ bewegt. Diese Welle wird von einer zweiten Welle y' überlagert. Sie besitzt die gleiche Amplitude, aber etwas geänderte Werte μ und ν, die mit μ' und ν' bezeichnet werden. Somit ist $y' = A \cdot \sin(\mu' \cdot x - \nu' \cdot t)$.

$$y + y' = A \cdot [\sin(\mu \cdot x - \nu \cdot t) + \sin(\mu' \cdot x - \nu' \cdot t)]$$

ist das Ergebnis der Überlagerung. An den Stellen, an denen beide Schwingungen in die gleiche Richtung wirken, wird die Amplitude gleich $2 \cdot A$. An denjenigen Stellen, an denen sie entgegengesetzt wirken, wird sie gleich 0. Dieser Vorgang wird als eine *Schwebung* bezeichnet. Durch Anwendung der Gleichung

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

ergibt sich

$$y + y' = 2 \cdot A \cdot \sin\left(\frac{\mu + \mu'}{2} \cdot x - \frac{\nu + \nu'}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu - \mu'}{2} \cdot x - \frac{\nu - \nu'}{2} \cdot t\right).$$

In dieser Gleichung stellt der Faktor $\sin(\ldots)$ eine Welle mit den Mittelwerten von μ und μ' bzw. ν und ν'. Der Faktor $2 \cdot A \cdot \cos(\ldots)$, der sich bei kleinen $\mu - \mu'$ und $\nu - \nu'$ nur langsam ändert, kann als veränderliche Amplitude betrachtet werden (siehe Abb. 2.41). Die *Wellengruppe* ist zu Ende, wenn der Kosinus gleich 0 ist. Die Fortschreitungsgeschwindigkeit dieser Stelle, die Gruppengeschwindigkeit c^*, ist damit gleich $(\nu - \nu')/(\mu - \mu')$. Für lange Gruppen (langsame Schwebung) gilt:

$$c^* = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu. \tag{2.36}$$

Da über die Schwebungsknoten hinweg kein Energietransport stattfinden kann ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenenergie mit der Gruppengeschwindigkeit identisch. Dieses ist für einfache Wellenzüge streng beweisbar.

Abb. 2.41 Schwebung

Für die von der Schwerkraft bestimmten Wasserwellen ergibt sich aus Gl. (2.32):

$$\nu = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{g}{c}.$$

Nach Gl. (2.34) ist

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{g}{\mu}}.$$

Daraus erhält man die Beziehung:

$$\nu = \sqrt{g \cdot \mu}.$$

Damit ergibt sich mit Gl. (2.36) die Gruppengeschwindigkeit

$$c^* = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{\mu}} = \frac{1}{2} \cdot c. \tag{2.37}$$

Die Wellengruppen pflanzen sich mit der Geschwindigkeit $(1/2) \cdot c$ fort oder anders ausgedrückt, in der Gruppe laufen die Wellenfronten mit der doppelten Geschwindigkeit der Gruppenfortpflanzung. Am hinteren Ende der Gruppe bilden sich immer neue Wellen und verschwinden am vorderen Ende wieder. Bei den Wellen, die entstehen wenn ein Stein in ruhiges Wasser geworfen wird, kann man dieses sehr gut beobachten.

8.3 Schiffswellen

Eine andere Art von Wellengruppen liegt bei Schiffswellen vor. Man erhält bereits eine den Schiffswellen sehr ähnliche Figur, wenn man die Wellen betrachtet, die eine mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitende punktförmige Druckstörung auf der Oberfläche eines ruhenden tiefen Gewässers erzeugt. Nach den Rechnungen von *Lord Kelvin*, *V. W. Ekman* 1905 und anderen entsteht ein Wellensystem, wie es in der Abb. 2.42 dargestellt ist. Die ausgezogenen Linien in dieser Figur stellen Wellenrücken dar. Dieses Wellensystem wandert mit der Druckstörung mit. Die Wellenlänge der Querwellen ist nach Gl. (2.35) $\lambda = 2 \cdot \pi \cdot c^2/g$. Dabei ist c die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Druckstörung. Die Länge der Wellengruppe ist gleich der Hälfte des von der Druckstörung zurückgelegten Weges.

Bei einem Schiff wird ein derartiges Wellensystem vom Bug und ein ähnliches vom Heck erzeugt, die beide miteinander interferieren.

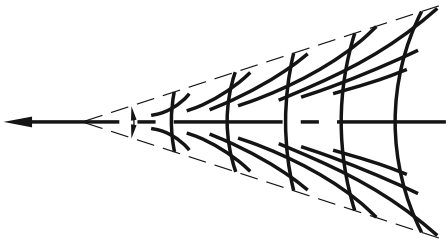


Abb. 2.42 Wellensystem einer gleichförmig über die Wasseroberfläche bewegten Druckstörung

Die Gruppengeschwindigkeit der Kapillarwellen ist der Gruppengeschwindigkeit der Schwerewellen ganz analog. Sie ist größer als die Phasengeschwindigkeit, beim Übergang zu sehr kleinen Wellen das 1.5 fache davon. Bei einer mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Druckstörung eilt die Wellengruppe der Erzeugungsstelle voraus. Tatsächlich bilden sich bei einer Angelschnur oder einem ähnlichen ruhenden Hindernis, das in ein mit mehr als 23.3 cm/s fließendes Wasser eintaucht, stromaufwärts Kapillarwellen und stromabwärts Schwerewellen. Die Schwerewellen haben näherungsweise die Form der Abb. 2.42. Die Kapillarwellen füllen bogenförmig den vorderen Raum aus. Bei Geschwindigkeiten unter 23.3 cm/s entstehen keine Wellen.

8.4 Grenzflächen zweier Flüssigkeiten

Sind zwei Flüssigkeiten mit verschiedenen spezifischen Gewichten übereinander geschichtet, kann die Grenzfläche Wellenbewegungen ausführen. Für zwei ruhend übereinander geschichtete Flüssigkeiten mit den Dichten ρ_1 und ρ_2 ergibt sich aus der Theorie eine Phasengeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{2 \cdot \pi \cdot C}{\lambda \cdot (\rho_1 + \rho_2)}}.$$

Strömt die obere Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit w_1 über die untere hinweg, sind nach der Theorie nur die längeren Wellen stabil. Die kürzeren sind instabil, wie es in Abschn. 4 für die Bewegung zweier Flüssigkeitsströme längs einer Trennschicht gezeigt wird. Dies führt gegebenenfalls zu einer Vermischung der beiden Flüssigkeiten in einer Zwischenzone, wodurch die Strömung wieder stabil wird. Mit steigender Geschwindigkeit w_1 verschiebt sich die Grenze zwischen Instabilität und Stabilität zu den größeren Wellenlängen hin. Zwischen zwei Luftschichten unterschiedlicher Dichte, wie sie in der Atmosphäre vorkommen, können solche Wellen auftreten. Sie werden manchmal durch Wolkenbildungen sichtbar (Helmholtzsche Wellen).

8.5 Schwall

Die in diesem Kapitel angegebenen Gleichungen gelten für Wellen in tiefem Wasser. Die Beziehungen ändern sich, wenn die Wassertiefe gegenüber der Wellenlänge klein wird. Für Wassertiefen bis zu einer halben Wellenlänge sind die bisherigen Gleichungen genau genug. Bei kleineren Wassertiefen bewegen sich die Wasserteilchen auf elliptischen Bahnen. Die Zusammenhänge zwischen Wellenlänge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit werden komplizierter. Für sehr kleine Tiefen, oder für sehr große Wellenlängen bewegen sich die Wasserteilchen an der Oberfläche im Wesentlichen waagerecht hin- und her und führen im Vergleich dazu sehr geringe Hebungen und Senkungen aus. Hierfür ergeben sich von neuem einfache Beziehungen. Es werden wieder periodische Wellen betrachtet die näherungsweise sinusförmig sind. Bei den sehr flachen elliptischen Bahnen der Teilchen kann die Wirkung der Vertikalbeschleunigungen auf die Druckverteilung vernachlässigt werden. Der Druck ändert sich in jeder Senkrechten nur statisch und die Spiegelhöhenunterschiede bewirken nur waagerechte Beschleunigungen.

Hier soll jedoch eine noch einfachere Überlegung durchgeführt werden. Dafür wird ein niedriger *Schwall* betrachtet (Abb. 2.43). Die Überlegung ist eng verwandt mit der Behandlung der Druckausbreitung in einem kompressiblen Medium (Abschn. 1 des Kap. 4 ▸ Dynamik der Gase). Es wird angenommen, dass sich ein Schwall, in dem die Wasserhöhe über dem ebenen Grund von h_1 auf h_2 ansteigt, mit einer Geschwindigkeit c nach rechts hin ausbreitet. Vor der Ankunft des Schwalls ist das Wasser in Ruhe, nach der Erhöhung des Wasserspiegels hat es die Geschwindigkeit w nach rechts.

Diese Geschwindigkeit ist erforderlich, um durch seitliches Zusammenschieben der Wassermasse in dem Übergangsgebiet von der Breite b den Wasserspiegel von h_1 auf h_2 zu erhöhen. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass der Wasserspiegel in dem Übergangsgebiet eine konstante Neigung $(h_2 - h_1)/b$ besitzt. Ist die Geschwindigkeit w klein gegenüber der Ausbreitungsgeschwindigkeit c, steigt der Wasserspiegel mit einer Geschwindigkeit $v = c \cdot (h_2 - h_1)/b$.

Die Kontinuität ergibt, wenn die Tiefe senkrecht zur Bildebene von Abb. 2.43 gleich 1 gesetzt wird, $h_2 \cdot w = b \cdot v$ oder

$$h_2 \cdot w = c \cdot (h_2 - h_1). \tag{2.38}$$

Aus dieser Gleichung ist die Schwallbreite b herausgefallen. Es kommt auf diese Größe nicht an. Gleichung (2.38) ist auch richtig, wenn das Schwallprofil nicht geradlinig ist. Man kann den Schwall dann in eine Anzahl von Schwallen mit geradlinigem Profil zerlegen. Bei der Addition der Kontinuitätsgleichungen der einzelnen Schwalle ergibt sich auf der rechten Seite der Gleichung wieder $h_2 - h_1$ und auf der linken Seite aus den einzelnen Geschwindigkeitsunterschieden wieder w. Das gilt allerdings nur, wenn die Unterschiede der verschiedenen h_2 vernachlässigt werden dürfen. Aus Gl. (2.38) folgt außerdem, dass für eine geringe Geschwindigkeit w auch $h_2 - h_1$ klein sein muss. Sie gilt deshalb nur

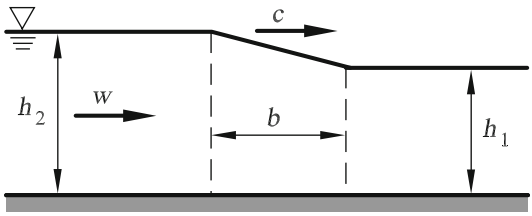


Abb. 2.43 Schwall auf einer Wasseroberfläche

für niedrige Schwalle. Damit ist die vorangegangene Vernachlässigung durchaus zulässig.

Zu der kinematischen Beziehung Gl. (2.38) wird noch eine dynamische benötigt, die man aus der folgenden Überlegung erhält. Die Wassermasse der Breite b ist in beschleunigter Bewegung, denn ihre Teilchen besitzen am rechten Rand die Geschwindigkeit 0 und am linken Rand die Geschwindigkeit w. Die Zeit, in der der Schwall sich über ein Teilchen hinwegbewegt, ist $\tau = b/c$. Daraus ergibt sich die Beschleunigung eines Teilchens zu $w/\tau = w \cdot c/b$. Die Wassermasse der Breite b und der Tiefe 1 senkrecht zur Zeichenebene ist $\rho \cdot b \cdot h_m$ (h_m ist die mittlere Spiegelhöhe). Der Druck in der gleichen Höhe auf beiden Seiten des Schwalls unterscheidet sich um den Betrag $\gamma \cdot (h_2 - h_1)$. Die waagerechte Gesamtkraft auf die Wassermasse unter dem Schwall ist (unter Vernachlässigung kleiner Größen) gleich $h_m \cdot \gamma \cdot (h_2 - h_1)$. Mit der Gleichung Kraft = Masse × Beschleunigung ergibt sich mit $\gamma = \rho \cdot g$:

$$w \cdot c = g \cdot (h_2 - h_1). \tag{2.39}$$

Auch hier ist wieder die Schwallbreite b herausgefallen. Es kann wiederum gezeigt werden, dass Gl. (2.39) auch für einen Schwall mit einem anderen Profil gilt, wenn $h_2 - h_1$ klein gegenüber h_1 und h_2 ist.

Zur Vereinfachung wird in Gl. (2.38) auf der linken Seite nachträglich h_2 durch h_m ersetzt. Dieses ist innerhalb der bereits durchgeführten Vernachlässigungen ebenfalls zulässig. Dividiert man dann Gl. (2.39) durch (2.38), ergibt sich

$$c^2 = g \cdot h_m. \tag{2.40}$$

Durch aufeinander folgende positive und negative Schwalle ergeben sich Wellen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit solcher Wellen ist von der Gestalt der Welle unabhängig. Sie ergibt sich aus Gl. (2.40). Ebenso wie bei den Schallwellen liegt keine Dispersion vor, daher gilt $c^* = c$. Lange Wellen in flachem Wasser pflanzen sich mit der Geschwindigkeit $c = \sqrt{g \cdot h}$ fort (Grundwellengeschwindigkeit).

Wenn mehrere niedrige Schwalle hintereinander herlaufen, von denen jeder zu einer weiteren Erhöhung des Wasserspiegels führt, ist die Geschwindigkeit $\sqrt{g \cdot h}$ der nachfolgenden Welle wegen der größeren Wassertiefe höher als die der vorausgehenden. Entscheidender ist noch, dass die nachfolgenden Schwalle in einer Wassermasse laufen, die selbst schon eine Bewegung mit der Geschwindigkeit w

ausführt. Dadurch holen die nachfolgenden Schwalle die vorangehenden ein, und es entsteht ein Schwall von größerer Amplitude. Man kann diese Überlegung auch auf die Form eines einzelnen Schwalls anwenden. Man kann z. B. den Schwall, mit der in Abb. 2.43 angegebenen Gestalt, als eine Folge von sehr vielen sehr kleinen Schwallen auffassen, die das Intervall b ausfüllen. Aus der obigen Überlegung folgt, dass das Intervall b immer kleiner wird, bis eine steile Stufe entsteht. Dieses kann man auch in der Natur beobachten. Bei Wellen in flachem Wasser laufen die Wellenberge aus dem gleichen Grund schneller als die Wellentäler und überstürzen sich (Brandung).

Schwalle von endlicher Höhe können unter Verwendung des Impulssatzes in ähnlicher Weise behandelt werden, wie in Abschn. 7 das Beispiel der Strömung mit einer plötzlichen Erweiterung. Dazu betrachtet man den Vorgang von einem Bezugssystem aus, das sich mit dem Schwall mitbewegt, so dass der Vorgang stationär ist. Die Geschwindigkeit der endlich hohen Schwalle ist größer als die der Grundwelle. Auch hier ergibt sich ein Verlust an kinetischer Energie, der sein Äquivalent in dem Schäumen der sich überstürzenden Wassermassen hat.

8.6 Offene Gerinne

Die Geschwindigkeit der Schwalle und Grundwellen macht sich beim Fließen von Wasser in einem Flusslauf in ähnlicher Weise bemerkbar wie die Schallgeschwindigkeit bei Gasströmungen (Abschn. 1 und 3 des Kap. 4 ▸ Dynamik der Gase). Ist die Strömungsgeschwindigkeit kleiner als die Schwallgeschwindigkeit, dann führt ein Stau im Fluss (z. B. durch ein Wehr) flussaufwärts zu einer Anhebung des Wasserspiegels. Ist die Strömungsgeschwindigkeit größer als die Grundwellengeschwindigkeit, stellt sich vor dem Wehr oder am Wehr ein endlich hoher stationärer Schwall ein, ein so genannter Wassersprung. Stromaufwärts von diesem Schwall wird die Wasserströmung in keinster Weise durch den Stau beeinflusst. Unebenheiten am Rande des Gerinnes erzeugen kleine schräge Wellen, die den in Abschn. 3 des Kap. 4 ▸ Dynamik der Gase erwähnten schrägen Schallwellen sehr ähnlich sind. Man nennt die beiden Bewegungsarten in einem Wassergerinne mit Strömungsgeschwindigkeiten kleiner oder größer als die Grundwellengeschwindigkeit *Strömen* und *Schießen*.

Berechnet man für einen gegebenen, auf die Breiteneinheit bezogenen Volumenstrom $\dot{V}$ die Wassertiefen der Abb. 2.44, erhält man die Spiegelabsenkung vom ruhenden Wasserspiegel aus mit der Bernoulli-Gleichung zu $h = w^2/(2 \cdot g)$. Die zum Durchfluss des Volumenstroms $\dot{V}$ pro Breiteneinheit notwendige örtliche Wassertiefe folgt aus der Kontinuität zu $a = \dot{V}/w$. Für den Abstand des zugehörigen Gerinnepunktes unter dem ruhenden Wasserspiegel erhält man:

$$z = h + a = \frac{w^2}{2 \cdot g} + \frac{\dot{V}}{w}.$$

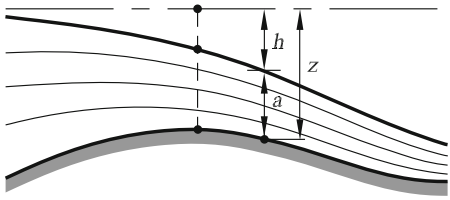


Abb. 2.44 Überströmen eines flachen Wehrrückens

Für einen bestimmten Wert der Geschwindigkeit w besitzt z ein Minimum. Ähnliches ergibt sich für den Stromfadenquerschnitt einer Gasströmung (siehe Abschn. 1 in dem Kap. 4 ▸ Dynamik der Gase). Dieses Minimum ergibt sich durch Differenzieren der Gleichung nach der Geschwindigkeit:

$$\frac{w_1}{g} - \frac{\dot{V}}{w_1^2} = 0, \text{d. h.} \qquad w_1 = \sqrt[3]{\dot{V} \cdot g}.$$

Man erhält:

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{g}} \qquad \text{und} \qquad a_1 = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{g}} = 2 \cdot h_1.$$

Damit ist $w_1 = \sqrt{g \cdot a_1}$, d. h. gleich der Schwallgeschwindigkeit bei der Wassertiefe a_1. Strömt Wasser über einen flachen Wehrrücken, ist über der höchsten Stelle des Wehres die Wassertiefe a_1 gleich 2 / 3 der Tiefe z_1 des Wehrrückens unter dem Wasserspiegel. Die Geschwindigkeit ist dort $\sqrt{(2/3) \cdot g \cdot z_1}$. Die Durchflussmenge ergibt sich zu

$$\dot{V} = a_1 \cdot w_1 = \frac{2}{3} \cdot z_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot g \cdot z_1}. \tag{2.41}$$

Stromab des Wehrrückens hat man schießende Bewegung des Wassers, die meistens auf dem Weg über einen Wassersprung wieder in die strömende Bewegung übergeht.

Bei stärker gekrümmten Wehren gilt nicht mehr die Annahme, dass im ganzen Querschnitt die gleiche Strömungsgeschwindigkeit herrscht. Die qualitativen Beziehungen bleiben aber dieselben.

Diese für offene Gerinne hergeleiteten Gleichungen lassen noch eine wesentlich umfassendere Anwendung zu. Für einen flach geneigten, sonst aber beliebig geformten Boden des Gerinnes (Abb. 2.45) kann man für eine Schar von Höhenlagen des ruhenden Wasserspiegels (strichpunktierte Linien) die zu einem festen Wert des Volumenstroms $\dot{V}$ gehörenden Wassertiefen a auftragen (je zwei für jede Stelle und jede Spiegelhöhe). Man erhält daraus die angegebenen Formen der

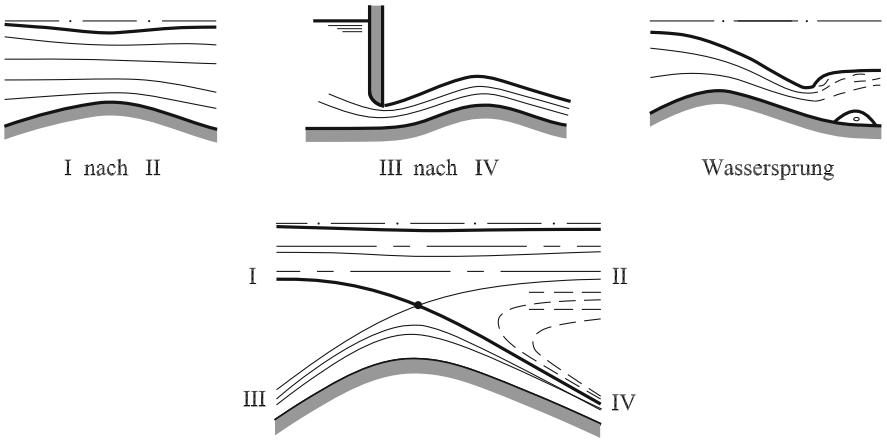


Abb. 2.45 Weitere Beispiele für das Überströmen eines Wehrrückens

Wasseroberfläche. Nur die durch den Doppelpunkt gehende, von I nach IV führende Linie, die dem niedrigst möglichen ruhenden Wasserspiegel entspricht, ergibt eine Strömung wie sie in Abb. 2.44 gezeigt ist. Die zu den höheren Wasserspiegeln gehörenden Linien, die von I nach II bzw. von III nach IV führen, kommen auch in der Praxis vor. Die zu niedrigeren ruhenden Wasserspiegeln gehörenden, in der Abb. 2.45 gestrichelt gezeichneten Kurven können in ihrem oberen Verlauf hinter einem Wassersprung auftreten, der mit einem Energieverlust verbunden ist.

Im linken Bild der Abb. 2.45 ist die Geschwindigkeit kleiner als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Grundwelle. Es ergibt sich über dem Scheitel der Bodenerhebung eine Senkung des Wasserspiegels. Im mittleren Bild ist die Geschwindigkeit größer als die Grundwellengeschwindigkeit. Die Wasseroberfläche hebt sich dabei stärker als die Bodenerhebung. Beim Wassersprung (rechtes Bild) ist die Strömungsgeschwindigkeit vom Wehrrücken bis zum Wassersprung größer und von da ab kleiner als die der jeweils zugehörigen Grundwelle. Da sich Änderungen des Strömungszustandes nur mit der Grundwellengeschwindigkeit fortpflanzen können, kann die schießende Strömung zwischen dem Wehrrücken und dem Wassersprung durch ein Ansteigen des Wasserspiegels nicht geändert werden und es kommt zu dem sprunghaften Übergang.

Bei den vorangegangenen Überlegungen wurde der Einfluss der Vertikalbeschleunigungen vernachlässigt. In der schießenden Strömung führt die Berücksichtigung der Vertikalbeschleunigung nur zu geringfügigen quantitativen Korrekturen. Bei der strömenden Bewegung ändert sich jedoch der Charakter, weil stromabwärts von der Störungsstelle stehende Wellen auftreten. Die Wellenlänge folgt dabei aus Gl. (2.34), wenn statt der Fortschreitungsgeschwindigkeit c die örtliche Strömungsgeschwindigkeit eingeführt wird.

Weiterführende Literatur

Batchelor, G.K.: An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge (2000)
Becker, E.: Technische Strömungslehre. Teubner, Stuttgart (1993)
Chorin, A.J., Marsden, J.E.: A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. Springer, New York (2000)
Durst, F.: Grundlagen der Strömungsmechanik. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (2006)
Gersten, K.: Einführung in die Strömungsmechanik. Shaker, Aachen (2003)
Herwig, H., Bastian, S.: Strömungsmechanik. Springer, Berlin/Heidelberg (2015)
Krause, E.: Strömungslehre. Springer, Wiesbaden (2003)
Kundu, P.K., Cohen, I.M., Hu, H.H.: Fluid Mechanics. Elsevier/Academic Press, Amsterdam/Heidelberg (2015)
Lamb, H.: Hydrodynamics. Cambridge University Press, Cambridge (1994)
Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: Fluid Mechanics. Pergamon Press, London (1959)
Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: Hydrodynamik, Lehrbuch der theoretischen Physik. Akademie-Verlag, Berlin (1974)
Lighthill, J.: Waves in Fluids. Cambridge University Press, Cambridge (2001)
Oertel Jr. H. (Hrsg.): Prandtl – Essentials of Fluid Mechanics, 3. Aufl. Springer, New York (2010)
Oertel Jr. H. (Hrsg.): Prandtl – Führer durch die Strömungslehre, chinesische Übersetzung. Science Press, Beijing (2008)
Oertel Jr. H. (Hrsg.): Prandtl – Führer durch die Strömungslehre, russische Übersetzung. Russian Institute of Dynamics, Izhevsk (2007)
Oertel Jr. H. (Hrsg.): Prandtl – Führer durch die Strömungslehre, 14. Aufl. Springer, Wiesbaden (2017)
Oertel Jr. H.: Introduction to Fluid Mechanics. Vieweg/Braunschweig, Wiesbaden (2001); Universitätsverlag, Karlsruhe (2005)
Oertel Jr. H., Böhle, M., Reviol, T.: Strömungsmechanik. Springer, Wiesbaden (2015)
Spurk, J.H.: Fluid Mechanics. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (2008)
Spurk, J.H.: Strömungslehre. Springer, Berlin/Heidelberg (2010)
Tietjens, O.: Strömungslehre. Springer, Berlin/Heidelberg (1970)
Zierep, J., Bühler, K.: Grundzüge der Strömungslehre. Springer, Wiesbaden (2013)

Dynamik zäher Flüssigkeiten

3

Herbert Oertel Jr.

Zusammenfassung

Das Kapitel Dynamik zäher Flüssigkeiten behandelt die Grundgleichungen der reibungsbehafteten Strömungen des Lehrbuches und Nachschlagewerkes H. Oertel Jr. (Hrsg.) Prandtl-Führer durch die Strömungslehre. Es werden die Navier-Stokes- und Grenzschicht-Gleichungen inkompressibler Strömungen abgeleitet und Anwendungsbeispiele der reibungsbehafteten Strömungen wie zum Beispiel Rohrströmungen, Freistrahlen, Scherschichten, Grenzschichtströmungen, sowie der Strömungsablösung und Wirbelbildung behandelt.

Die Ähnlichkeitsmechanik ermöglicht die Ableitung der Reynolds-Zahl, die dimensionslose Kennzahl reibungsbehafteter Strömungen. Für Strömungen großer Reynolds-Zahlen dominiert die Trägheitskraft und es bilden sich laminare oder turbulente Grenzschichtströmungen aus. Die Stabilitätstheorie ermöglicht die Bestimmung der kritischen Reynolds-Zahl des laminar turbulenten Übergangs. Die Berechnung der turbulenten Schubspannung der ausgebildeten turbulenten Strömung erfolgt mit dem Prandtlschen Mischungsweg. Das Kapitel endet mit Strömungsbeispielen Nicht-Newtonscher zäher Medien.

1 Zähigkeit (innere Reibung), Navier-Stokes-Gleichung

Alle Flüssigkeiten und Gase besitzen eine *Zähigkeit*, die sich durch innere Reibung bei der Formänderung äußert. Besonders zähe Flüssigkeiten sind z. B. Honig, Glyzerin und dicke Öle. Zum Verständnis der Zähigkeit wird die Strömung zwischen zwei parallelen Platten betrachtet, bei der sich die obere Platte mit der Geschwindigkeit U bewegt, während die untere ruht (Abb. 3.1). Aufgrund der Reibung hat die Flüssigkeit an den Platten dieselbe Geschwindigkeit wie die Platten selbst (*Haftbedingung*).

H. Oertel Jr.
Baden-Baden, Deutschland
E-Mail: herbert.oertel@t-online.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5_3

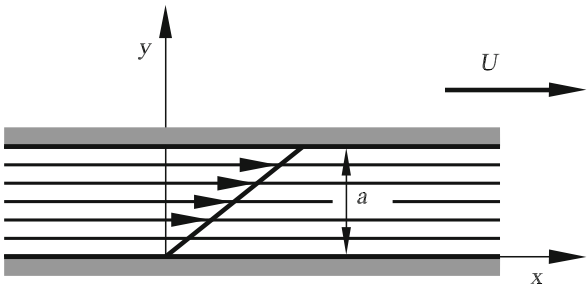


Abb. 3.1 Scherströmung zwischen parallelen Platten

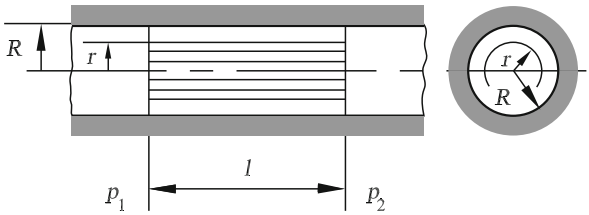


Abb. 3.2 Laminare Rohrströmung

Die dazwischenliegenden Schichten gleiten mit Geschwindigkeiten $u(y)$, die dem Abstand y von der ruhenden Platte proportional sind, übereinander weg:

$$u = U \cdot \frac{y}{a}.$$

Die Flüssigkeitsreibung äußert sich dabei durch eine Kraft, die der Bewegung der oberen Platte Widerstand leistet und die pro Flächeneinheit der Platte die Größe $\tau = \mu \cdot U/a$ hat. Allgemein gilt für die Schubspannung:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}. \tag{3.1}$$

Mit μ wird die *dynamische Zähigkeit* bezeichnet. Der Ansatz Gl. (3.1) gilt für *Newtonsche Medien*.

Mit dieser Kenntnis können bereits einige Beispiele laminarer Strömungen behandelt werden. Dazu gehört die Strömung einer zähen Flüssigkeit in einem geraden Rohr mit Kreisquerschnitt. Der Druckunterschied $p_1 - p_2$ bewirkt an einem zylindrischen Flüssigkeitselement des Radius r (Abb. 3.2) die Kraft $(p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2$. Die Gegenkraft wird durch die Reibung auf der Mantelfläche $2 \cdot \pi \cdot r \cdot l$ erzeugt. Diese ist pro Flächeneinheit τ und ergibt insgesamt $2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \tau$. Durch Gleichsetzen beider Kräfte erhält man:

$$-\tau = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{r}{2}. \tag{3.2}$$

τ ist mit einem Minuszeichen versehen, weil die Reibungskraft entgegen der Strömung wirkt. Gl. (3.1) ergibt $\mathrm{d}u/\mathrm{d}r = \tau/\mu$. Hieraus erhält man durch Integration unter Verwendung der Haftbedingung:

$$u(r) = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \mu \cdot l} \cdot (R^2 - r^2), \tag{3.3}$$

mit dem Rohrradius R. Als Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich ein Rotationsparaboloid (vgl. Abb. 3.8). Die Durchflussmenge berechnet sich zu:

$$Q = \int_0^R u \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \mathrm{d}r = \frac{\pi \cdot R^4}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l}. \tag{3.4}$$

Diese Gleichung ermöglicht bei gemessener Durchflussmenge eine genaue Bestimmung der dynamischen Zähigkeit μ. Die Durchflussmenge ist dem Druckgefälle pro Längeneinheit und der vierten Potenz des Rohrradius proportional. *G. H. L. Hagen* 1839 und *J. L. M. Poiseuille* 1840 fanden durch Experimente Gl. 3.4) unabhängig voneinander. Deshalb wird sie *Hagen-Poiseuillesches Gesetz* genannt. Es sei hier angemerkt, dass das *Hagen-Poiseuillesche Gesetz* nur für die laminare Rohrströmung gilt. Das Gesetz der turbulenten Rohrströmung wird in Abschn. 5 ergänzt.

1.1 Navier-Stokes-Gleichung

Die *allgemeine Theorie der Flüssigkeitsreibung* lehrt, dass durch die Formänderung der einzelnen Flüssigkeitselemente Spannungen entstehen die denen elastischer Körper ähnlich sind. Der Unterschied besteht darin, dass diese Spannungen nicht den Formänderungen, sondern den Formänderungsgeschwindigkeiten proportional sind. Die Gleichungen für die neun Spannungskomponenten (je drei auf den drei zu den Koordinatenachsen senkrechten Flächen, Abb. 3.3) lauten:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\
\sigma_{yy} &= 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\
\sigma_{zz} &= 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \quad , \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Daraus resultieren Kräfte mit den volumenbezogenen Komponenten f_x', f_y', f_z'. Für f_x' gilt:

$$f_x' = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}. \tag{3.6}$$

Entsprechende Gleichungen ergeben sich für f_y' und f_z'. Mit Gl. (3.5) ergibt Gl. (3.6) für Newtonsche Medien und konstante Werte μ und ρ unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.7}$$

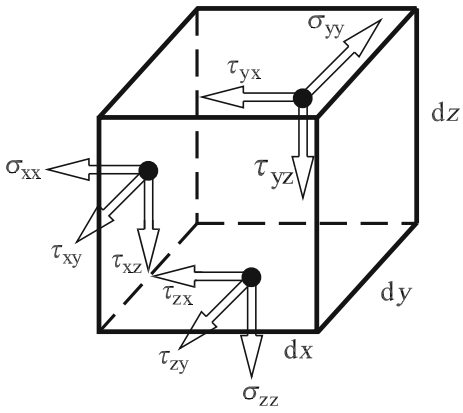


Abb. 3.3
Spannungskomponenten an einem Volumenelement

für inkompressible Flüssigkeiten (Ableitung siehe Abschn. 1 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik):

$$f_x' = \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Für f_y' und f_z' gelten entsprechende Ausdrücke.

Die Reibungskräfte pro Volumen $\boldsymbol{f}'$ treten bei zähen Flüssigkeiten zusätzlich zu den im vorigen Kapitel erörterten Druckkräften der reibungsfreien Strömung und gegebenenfalls zusätzlich zu den Massenkräften pro Volumen $\boldsymbol{f}$ hinzu. Diese Kräfte bestimmen die Beschleunigung des Flüssigkeitsteilchens. Durch Berücksichtigung der Reibungskräfte auf der rechten Seite der Euler-Gleichungen entstehen die *Navier-Stokes-Gleichungen* der zähen Strömung. Für inkompressible Strömungen lauten diese mit dem Δ-Operator $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ (Ableitung siehe Abschn. 2 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik):

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \Delta u, \\ \rho \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \Delta v, \\ \rho \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \Delta w. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dabei bedeutet zum Beispiel $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Bei einer Strömung, bei der die u-Komponente vorherrscht und die sich in y-Richtung am stärksten ändert, ist $\tau_{xy} = \mu \cdot \partial u/\partial y$ die dominante Spannung. Es wird daher der Anteil $\mu \cdot (\partial^2 u/\partial y^2)$ der Reibungskraft f'_x überwiegen. Dieser tritt dann mit dem Druckgradienten $-\partial p/\partial x$, der Trägheitskraft $-\rho \cdot (\partial u/\partial t)$ und gegebenenfalls der volumenbezogenen Massenkraft $\boldsymbol{f}$ in Wechselwirkung.

1.2 Nicht-Newtonsche Fluide

Die bisher abgeleiteten Navier-Stokes-Gleichungen gelten für *Newtonsche Fluide*. Davon unterscheiden sich *Nicht-Newtonsche Fluide*, wie z. B. flüssiger Teer, Magma, Kunststoffschmelzen, Polymerlösungen und Suspensionen wie Blut. Die auf das Fluidelement einwirkenden Reibungsspannungen können außer vom augenblicklichen Bewegungszustand auch von der Bewegung des Fluids in der Vergangenheit abhängen. Das Fluid kann also ein Gedächtnis besitzen.

Zur Charakterisierung der Fließeigenschaften der Fluide z. B. für die Scherströmung der Abb. 3.1 wird die Schubspannung τ_{xy} als Funktion der Schergeschwindigkeit $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ aufgetragen. Einige Beispiele Newtonscher und Nicht-Newtonscher Fluide sind in Abb. 3.4 dargestellt. Im Gegensatz zu den Newtonschen Fluiden spricht man von einem Nicht-Newtonschen Fluid, wenn der funktionale Zusammenhang der Gl. (3.1) nichtlinear ist. Die Kurven für Fluide, die einer Scherrate nicht widerstehen können, gehen durch den Nullpunkt. Bei so genannten nachgebenden Fluiden tritt eine endliche Schubspannung auch bei verschwindendem Geschwindigkeitsgradienten auf. Diese Fluide verhalten sich teilweise als feste Körper und teilweise als Fluide. Die Kurve für pseudoplastische Fluide wie Schmelzen oder Hochpolymere zeigt bei wachsender Schubspannung eine Abnahme der Steigung. Im Gegensatz dazu zeigen dilatante Fluide wie Suspensionen ein Anwachsen der Steigung. Das Verhalten eines idealisierten Bingham-Mediums tritt z. B. bei

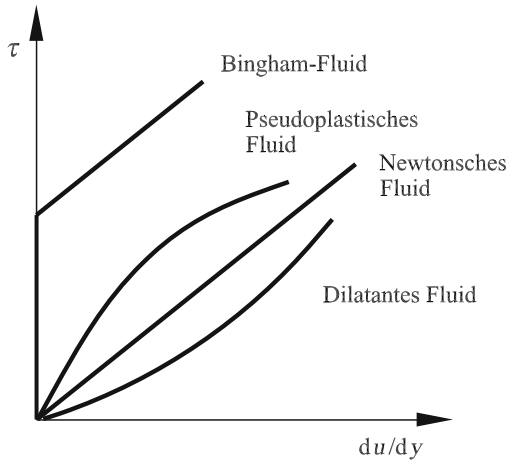


Abb. 3.4 Schubspannung τ für Newtonsche und Nicht-Newtonsche Fluide

Zahnpasta oder Mörtel auf. Dem endlichen Wert von τ_{xy} bei $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = 0$ folgt der lineare Verlauf eines Newtonschen Fluids. Hinzu kommt, dass einige Nicht-Newtonsche Fluide eine Zeitabhängigkeit der Schubspannung aufweisen. Auch wenn die Scherrate konstant gehalten wird, ändert sich die Schubspannung. Ein für Nicht-Newtonsche Medien oft verwendeter Ansatz ist:

$$\tau_{xy} = K \cdot \left| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \right|^n , \tag{3.9}$$

wobei K und n Stoffkonstanten sind. Für $n < 1$ ergibt sich das pseudoplastische Fluid, $n = 1$ mit $K = \mu$ ist das Newtonsche Fluid und $n > 1$ das dilatante Fluid. Man beachte, dass der Ansatz Gl. (3.9) für den Nullpunkt der Abb. 3.4 unrealistische Werte liefert.

Zahlreiche andere Gesetzmäßigkeiten werden für Nicht-Newtonsche Fluide meist aus experimentellen Ergebnissen abgeleitet. Ausgewählte Strömungsbeispiele werden in Abschn. 11 ergänzt. Im Folgenden werden Newtonsche Fluide vorausgesetzt.

2 Mechanische Ähnlichkeit, Reynolds-Zahl

Es stellt sich die Frage, wann bei ähnlicher Geometrie (geometrisch ähnliche Kanäle, geometrisch ähnlich umströmte Körper) die Strömung geometrisch ähnlich verlaufen wird. Das bedeutet, dass in den zu vergleichenden Strömungen bei Vernachlässigung der Massenkraft die jeweiligen Verhältnisse von Druckkraft, Reibungskraft und Trägheitskraft zueinander gleich sein müssen. Wegen des Kräftegleichgewichts reicht es aus ein Verhältnis zu betrachten. Es wird das Verhältnis von Trägheitskraft und Reibungskraft ausgewählt. Die verschiedenen geometrisch und kinematisch ähnlichen Strömungen sollen durch charakteristische Längen l_1, l_2 (z. B. Durchmesser oder Länge eines Körpers, Rohrdurchmesser) und durch charakteristische Geschwindigkeiten u_1, u_2 (z. B. Geschwindigkeit eines Körpers oder mittlere Geschwindigkeit in einem bestimmten Rohrquerschnitt) gekennzeichnet werden. Die unterschiedlichen Dichten und Zähigkeiten werden mit ρ_1 und ρ_2 bzw. μ_1 und μ_2 bezeichnet. Die x-Komponente der Trägheitskraft lautet:

$$-\rho \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \cdots \right).$$

Sie verhält sich bei ähnlichen Strömungen wie $\rho_1 \cdot u_1^2/l_1$ zu $\rho_2 \cdot u_2^2/l_2$. An entsprechenden Orten verhalten sich die u-Werte wie die charakteristischen Geschwindigkeiten u_1, u_2. Die Längen x und y verhalten sich wie die charakteristischen Längen l_1 und l_2. Die Reibungskräfte dagegen werden sich entsprechend dem Ausdruck $\mu \cdot (\partial^2 u/\partial y^2)$ wie $\mu \cdot u/l^2$ verhalten. $\partial^2 u$ bedeutet eine von zweiter Ordnung kleine Geschwindigkeitsdifferenz. Sie verhält sich wie die Geschwindigkeit u. ∂y^2 ist das Quadrat einer kleinen Längendifferenz und verhält sich wie l^2.

Die Forderung der mechanischen Ähnlichkeit verlangt, dass $\rho \cdot u^2/l$ und $\mu \cdot u/l^2$ in einem festen Verhältnis stehen:

$$\frac{\frac{\rho \cdot u^2}{l}}{\frac{\mu \cdot u}{l^2}} = \frac{\rho \cdot u \cdot l}{\mu}.$$

Mechanische Ähnlichkeit der beiden Systeme 1 und 2 ist somit zu erwarten, wenn

$$\frac{\rho_1 \cdot u_1 \cdot l_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 \cdot u_2 \cdot l_2}{\mu_2} \tag{3.10}$$

gilt. Das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Zähigkeitskräften nennt man *Reynolds-Zahl*. Das Verhältnis μ/ρ wird *kinematische Zähigkeit* genannt und mit ν bezeichnet.

Der Strömungswiderstand einer viskosen Flüssigkeit kann durch den Wert seiner Reynolds-Zahl $Re = \rho \cdot u \cdot l/\mu = u \cdot l/\nu$ charakterisiert werden. Dabei bedeuten kleine Reynolds-Zahlen überwiegende Reibungskräfte und große Reynolds-Zahlen überwiegende Trägheitskräfte.

Den Grenzfall sehr kleiner Reynolds-Zahlen bezeichnet man als *schleichende Strömung*, für die eine analytische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (3.8) bei der Kugelumströmung bekannt ist. Diese Strömungen sind dadurch gekennzeichnet, dass die Beschleunigungsterme fortfallen und nur Druck- und Reibungskräfte miteinander im Gleichgewicht stehen, wie z. B. bei sehr zähen Motorölen oder bei sehr geringen geometrischen Abmessungen.

Die Reibungskräfte an einem Volumenelement sind proportional $\mu \cdot u/l^2$. Die Druckkräfte folgen wegen des Gleichgewichts derselben Beziehung, so dass hier die geometrische Ähnlichkeit auch immer die mechanische Ähnlichkeit nach sich zieht. Vergleichbare Volumina verhalten sich wie l^3, so dass die gesamten Widerstandskräfte proportional $\mu \cdot u \cdot l$ sein müssen. Der Widerstand der Kugelumströmung berechnet sich nach der *Stokesschen Lösung* der Navier-Stokes-Gleichungen mit

$$W = 6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot u \cdot R. \tag{3.11}$$

Für die Fallbewegung kleiner Tröpfchen ist der Widerstand gleich der Differenz aus Gewicht und Auftrieb zu setzen. Damit ergibt sich für Tröpfchen mit dem Radius R und der Dichte ρ_t in einem umgebenden Fluid der Dichte ρ:

$$6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot u \cdot R = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot (\rho_t - \rho) \cdot g \cdot R^3.$$

Dem entspricht eine Fallgeschwindigkeit:

$$u = \frac{2}{9} \cdot \frac{(\rho_t - \rho)}{\mu} \cdot g \cdot R^2. \tag{3.12}$$

Diese Gleichung gilt für Reynolds-Zahlen kleiner als 1. Für Wassertröpfchen in Luft erhält man $u = 1,2 \cdot 10^8 \cdot R^2$. Dies gilt für Tröpfchen, deren Radius kleiner als $10^{-2}\ mm$ ist, also für feinen Nebel.

3 Laminare Grenzschichten

Im Grenzfall sehr großer Reynolds-Zahlen überwiegt die Trägheitskraft. Es bildet sich auf der Oberfläche eines Körpers eine dünne Grenzschicht aus, in der die Geschwindigkeit von der reibungsfreien Außenströmung auf den Wert Null an der Wand (Haftbedingung) verzögert wird. Die Grenzschicht ist dabei um so dünner, je kleiner die Zähigkeit ist. In der Grenzschicht sind die Reibungskräfte von der Größenordnung der Trägheitskräfte.

In Abb. 3.5 ist die Geschwindigkeitsverteilung in einer Grenzschicht dargestellt. Ist die Körperabmessung in Strömungsrichtung von der Größenordnung l und die Dicke der Grenzschicht von der Größenordnung δ, so ist die Reibungskraft am Volumenelement $\mu \cdot (\partial^2 u/\partial y^2)$ von der Größenordnung $\mu \cdot U_\infty/\delta^2$. Die Trägheitskraft ist von der Größenordnung $\rho \cdot U_\infty^2/l$. Die Größenordnung dieser beiden Ausdrücke wird gleich, wenn

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu \cdot l}{\rho \cdot U_\infty}} \tag{3.13}$$

gilt. Eine Abschätzung mit demselben Ergebnis gewinnt man auch durch eine Impulsbetrachtung für die Grenzschichtströmung entlang einer ebenen Platte. Die Länge der Platte sei l, die Breite b, die Geschwindigkeit der Außenströmung U_∞, die Dicke der Grenzschicht δ (Abb. 3.6).

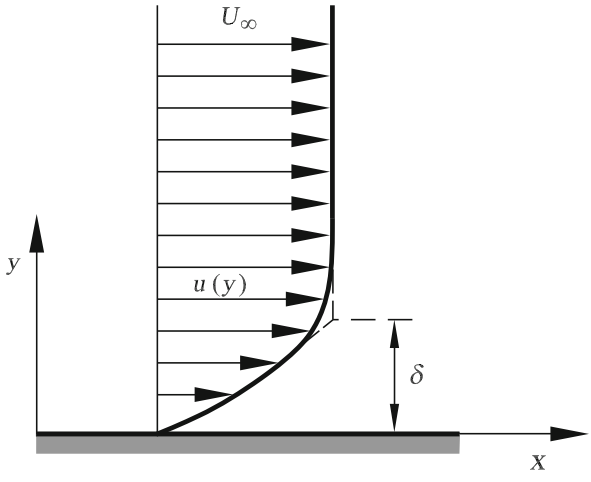


Abb. 3.5 Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe

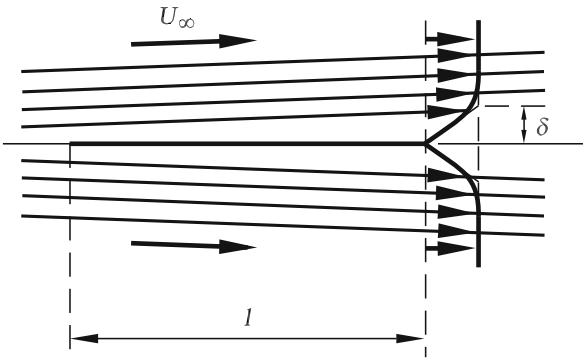


Abb. 3.6 Strömung längs einer Platte

Die in die Grenzschicht pro Sekunde transportierte Masse ist proportional $\rho \cdot b \cdot \delta \cdot U_\infty$. Diese Masse hat in der Anströmung die Geschwindigkeit U_∞ und verliert in der Grenzschicht einen bestimmten Anteil. Der entsprechende Impulsverlust berechnet sich aus Masse mal Geschwindigkeitsverlust und ist proportional $\rho \cdot b \cdot \delta \cdot U_\infty^2$. Der Impulsverlust muss gleich der von der Wand auf die Flüssigkeit ausgeübten Reibungskraft sein. Nach Gl. (3.1) ist diese Reibungskraft proportional $l \cdot b \cdot \mu \cdot U_\infty / \delta$. Aus der Proportionalität der beiden Ausdrücke folgt:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu \cdot l}{\rho \cdot U_\infty}} = \sqrt{\frac{\nu \cdot l}{U_\infty}}.$$

Das Verhältnis δ/l ist demnach proportional $\sqrt{\nu/(U_\infty \cdot l)}$. Mit $U_\infty \cdot l/\nu = Re_l$ und $U_\infty \cdot \delta/\nu = Re_\delta$ ist $\delta/l \sim 1/\sqrt{Re_l}$ und $Re_\delta \sim \sqrt{Re_l}$.

Man kann auch die Zeit einführen, während der das einzelne Flüssigkeitselement an dem Körper entlangströmt. Für Elemente, die nicht allzu nahe an der Oberfläche liegen, ist diese Zeit von der Größenordnung $t \sim l/U_\infty$, so dass gilt:

$$\delta \sim \sqrt{\nu \cdot t}. \tag{3.14}$$

Diese Gleichung kann auch für instationäre Grenzschichtströmungen plötzlich bewegter Körper angewandt werden. Sie zeigt, dass die Grenzschichtdicke zu Beginn der Bewegung proportional zur Wurzel aus der Zeit zunimmt.

Der Strömung in Abb. 3.5 entsprechen lokale Schubspannungen an der Wand, die einen Reibungswiderstand verursachen. Bei der Platte (Abb. 3.6) ist die Schubspannung $\tau_w = \mu \cdot (\partial u/\partial y)_{y=0}$ von der Größenordnung

$$\tau_w \sim \mu \cdot \frac{U_\infty}{\delta} \sim \sqrt{\frac{\mu \cdot \rho \cdot U_\infty^3}{l}}.$$

Ist b die Breite der Platte, so ist die gesamte Oberfläche $O = 2 \cdot b \cdot l$. Für den Widerstand ergibt sich:

$$W \sim 2 \cdot b \cdot l \cdot \tau_{\mathrm{w}} = \mathrm{K} \cdot b \cdot \sqrt{\mu \cdot \rho \cdot l \cdot U_{\infty}^{3}}, \tag{3.15}$$

mit der Konstanten K.

Die *Grenzschichttheorie* geht auf *L. Prandtl* 1904 zurück. In seiner berühmten Arbeit über die Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, wurden die mathematischen Grundlagen der Strömungen für sehr große Reynolds-Zahlen gelegt. Sein Schüler *H. Schlichting* 1950 hat mit seinem Buch Grenzschichttheorie deren Einsatz in nahezu allen Bereichen der Strömungsmechanik dargelegt.

In einer Grenzschichtströmung ist es erlaubt, den Druckgradienten senkrecht zur Wand zu vernachlässigen. Desgleichen wird der Geschwindigkeitsgradient längs der Wand gegenüber dem Geschwindigkeitsgradienten senkrecht zur Wand vernachlässigt. Von den Gliedern auf der rechten Seite der Gl. (3.8) bleibt nur der Term $\mu \cdot (\partial^2 u/\partial y^2)$ übrig. Dieser ist von gleicher Größenordnung wie $\rho \cdot u \cdot \partial u/\partial x$.

Bei einer zweidimensionalen Strömung kann auch eine geringe Krümmung der Grenzschicht vernachlässigt werden. Die x-Koordinate wird mit der Bogenlänge der Stromlinie längs der Wand gleichgesetzt. Man erhält die *Prandtlsche Grenzschichtgleichung* für die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3.17}$$

Da der vertikale Druckgradient vernachlässigt werden kann, wird der Druck p der äußeren Strömung aufgeprägt. Dies folgt auch aus der Gl. (3.8) für die Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung. An der Wand mit $u = 0$ und $v = 0$ verschwindet in Gl. (3.16) die linke Seite. Es gilt also:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{3.18}$$

Bei Druckabfall in der Strömungsrichtung ($\partial p/\partial x$ negativ) ist das Geschwindigkeitsprofil konvex gekrümmt. Bei Druckanstieg ($\partial p/\partial x$ positiv) ist das Geschwindigkeitsprofil dagegen in Wandnähe konkav gekrümmt und weist deshalb einen Wendepunkt auf. Ist der Druckanstieg zu groß, kommt es in Wandnähe zu einer Rückströmung und die Grenzschichtströmung ist abgelöst. Durch die Bedingung $(\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$ ist die *Ablösestelle* gegeben, bei der die Grenzschichtströmung die Wand verlässt. Da das Profil im Falle einer Strömungsablösung konkave Krümmung haben muss, liegt die Ablösestelle im Gebiet des Druckanstiegs.

Als *Grenzschichtdicke* δ wird der Wandabstand eingeführt, für den $u = 0,99 \cdot U_\infty$ gilt. Die *Verdrängungsdicke* δ_1 einer Grenzschicht berechnet sich aus:

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) \cdot \mathrm{d}y. \tag{3.19}$$

Sie gibt an, wie weit die äußere reibungsfreie Strömung infolge des Vorhandenseins der Grenzschicht von der Körperwand verdrängt wird. Die *Impulsverlustdicke*

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \cdot \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) \cdot \mathrm{d}y \tag{3.20}$$

ist ein Maß für den relativen Impulsverlust des Fluids gegenüber der reibungsfreien Strömung.

4 Entstehung der Turbulenz

4.1 Rohrströmung

Bei der Strömung zäher Flüssigkeiten durch lange gerade Rohre wird bei höheren Geschwindigkeiten und damit bei größeren Reynolds-Zahlen, das in Gl. (3.4) angegebene Hagen-Poiseuillesche Gesetz von einem anderen Gesetz abgelöst. Der Druckabfall wird erheblich größer und ist näherungsweise proportional zur zweiten Potenz der Durchflussmenge. Gleichzeitig überlagern Geschwindigkeitsschwankungen die Strömung. In einer laminaren Strömung bildet ein Farbfaden eine gerade Linie. Bei größeren Reynolds-Zahlen wird der Farbfaden zerrissen und die Farbe erfüllt die Flüssigkeit stromab gleichförmig. Man nennt die gradlinige Bewegung *laminar* und die verwirbelte *turbulent*.

Dieses Experiment wurde erstmals von *O. Reynolds* 1883 durchgeführt. Die Abb. 3.7 zeigt den Farbfaden der laminaren und turbulenten Rohrströmung.

Die Hauptbewegung der Strömung erfolgt in Richtung der Rohrachse. In der turbulenten Strömung tritt aufgrund der Strömungsschwankungen eine starke Durchmischung ein, die eine Querbewegung senkrecht zur Hauptbewegung zur Folge hat. Durch diese Querbewegung wird ein Impulsaustausch in Querrichtung verursacht. Dadurch ist bei der turbulenten Rohrströmung die Geschwindigkeitsverteilung über dem Rohrdurchmesser wesentlich gleichmäßiger und völliger als bei der laminaren Rohrströmung (siehe Abb. 3.8).

O. Reynolds 1883 entdeckte bei seinen Experimenten, dass der Übergang von der laminaren in die turbulente Strömungsform immer bei nahezu der gleichen Reynolds-Zahl $Re_d = u_\mathrm{m} \cdot d/\nu$ stattfindet, wobei $u_\mathrm{m} = \dot{V}/A$ die mittlere Strömungsgeschwindigkeit bedeutet (d Rohrdurchmesser, $\dot{V}$ Volumenstrom, A

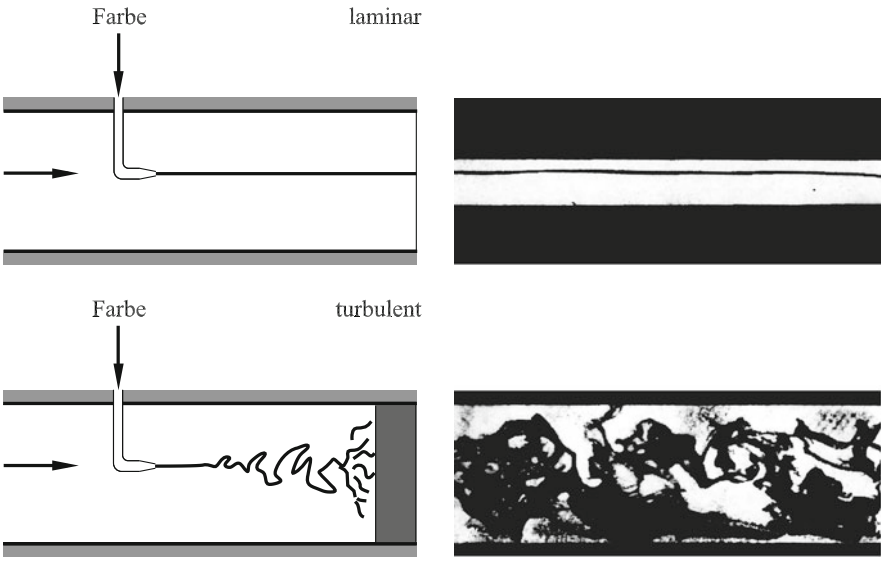
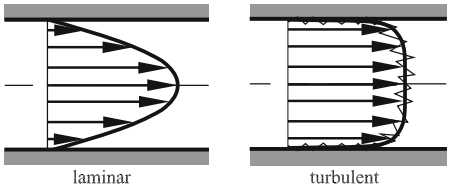


Abb. 3.7 Laminare und turbulente Rohrströmung, *O. Reynolds* 1883

Abb. 3.8 Geschwindigkeitsverteilungen der laminaren und turbulenten Rohrströmung



Rohrquerschnittsfläche). Der Zahlenwert der *kritischen Reynolds-Zahl*, bei der der Übergang eintritt, beträgt

$$Re_{\text{krit}} = \left(\frac{u_{\text{m}} \cdot d}{\nu}\right)_{\text{krit}} = 2300. \tag{3.21}$$

Danach sind Rohrströmungen, deren Reynolds-Zahl $Re < Re_{\text{krit}}$ ist, laminar und solche, für die $Re > Re_{\text{krit}}$ gilt, turbulent. Der Zahlenwert der kritischen Reynolds-Zahl hängt stark vom Rohreinlauf und der Zuströmung ab. Schon *O. Reynolds* 1883 vermutete, dass bei kleineren Störungen in der Zuströmung die kritische Reynolds-Zahl größer wird. Dieses wurde experimentell bestätigt. Es konnten Werte von Re_{krit} bis zu 40000 gemessen werden. Dagegen wurde ein unterer Grenzwert der kritischen Reynolds-Zahl von etwa 2000 gemessen. Unterhalb dieser Reynolds-Zahl bleibt die Strömung auch bei sehr starken Störungen laminar. Heute wissen wir von den Ergebnissen der Stabilitätstheorie, dass der laminar-turbulente Übergang durch dreidimensionale Störungen verursacht wird. Die Rohrströmung ist gegenüber zweidimensionalen Störungen stabil.

Mit dem laminar-turbulenten Übergang ist auch eine Änderung des Rohrwiderstandgesetzes verbunden. Während bei der laminaren Strömung das Druckgefälle zur ersten Potenz der mittleren Durchflussgeschwindigkeit u_m proportional ist, ist bei turbulenten Strömungen dieses Druckgefälle nahezu proportional dem Quadrat der mittleren Durchflussgeschwindigkeit. Dieser größere Durchflusswiderstand hängt ursächlich mit der turbulenten Mischbewegung zusammen.

Beim laminar-turbulenten Übergang, der so genannten *Transition*, handelt es sich um ein *Stabilitätsproblem*. Die laminare Strömung steht unter der Einwirkung kleiner Störungen, die bei der Rohrströmung z. B. durch den Einlauf hervorgerufen werden können. Bei kleinen Reynolds-Zahlen, d. h. bei großen Werten von ν, ist die dämpfende Wirkung der Viskosität groß genug, um diese kleinen Störungen wieder abklingen zu lassen. Erst bei entsprechend großen Reynolds-Zahlen reicht die Dämpfung nicht mehr aus, so dass die Störungen angefacht werden und schließlich den Übergang in die turbulente Strömungsform einleiten. Wie im nächsten Abschnitt dargestellt, treten bei ebenen Grenzschichten zunächst zweidimensionale Störungen auf, denen im weiteren Verlauf der Transition dreidimensionale Störungen folgen.

Wie bereits erwähnt zeigen stabilitätstheoretische Untersuchungen des parabolischen Geschwindigkeitsprofils der Rohrströmung, dass dieses gegenüber zweidimensionalen Störungen stabil ist. Entgegen den im folgenden Abschnitt behandelten Grenzschichtströmungen setzt der laminar-turbulente Übergang in Rohrströmungen von Beginn an mit dreidimensionalen Störungen ein.

4.2 Reynolds-Ansatz

Die *mathematische Beschreibung* turbulenter Strömungen leitet sich aus den experimentellen Erkenntnissen der Abb. 3.7 ab. Die Strömungsgrößen, wie z. B. die u-Komponente der Geschwindigkeit, lassen sich als Überlagerung der zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten $\overline{u}(x, y, z)$ und der zusätzlichen Schwankungen $u'(x, y, z, t)$ darstellen.

Der *Reynolds-Ansatz* für turbulente Strömungen schreibt sich entsprechend der Abb. 3.9:

$$\boldsymbol{u}(x, y, z, t) = \overline{\boldsymbol{u}}(x, y, z) + \boldsymbol{u}'(x, y, z, t). \tag{3.22}$$

Die Definition des zeitlichen Mittelwertes am festen Ort lautet für das Beispiel der Geschwindigkeitskomponente u:

$$\overline{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(x, y, z, t) \cdot \mathrm{d}t. \tag{3.23}$$

T ist dabei ein geeignet großes Zeitintervall mit der Bedingung, dass eine Zunahme von T keine weitere Änderung des zeitlich gemittelten Wertes $\overline{u}$ zur Folge hat. Aus

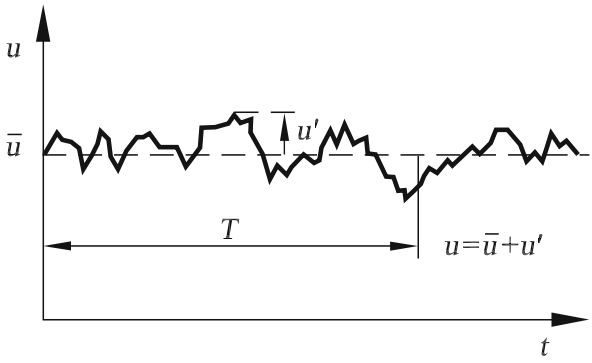


Abb. 3.9 Reynolds-Ansatz für die x-Komponente der Geschwindigkeit u

der Definition des zeitlichen Mittelwertes lässt sich ableiten, dass die zeitlichen Mittelwerte der Schwankungsgrößen verschwinden:

$$\overline{u'} = 0, \qquad \overline{v'} = 0, \qquad \overline{w'} = 0. \tag{3.24}$$

4.3 Grenzschichtströmung

Die Erscheinung der Turbulenz ist nicht auf Strömungen in Rohren und Kanälen beschränkt. Sie wird auch in *Grenzschichten* beobachtet. Die Reynolds-Zahl $U_\infty \cdot \delta/\nu$ wird hier mit der Grenzschichtdicke δ und der Geschwindigkeit U_∞ außerhalb der Grenzschicht gebildet. Bei umströmten Körpern ist die Grenzschichtdicke in der Nähe der Staulinie sehr dünn. Die Strömung ist zunächst laminar und wird stromab, beim Überschreiten einer kritischen Reynolds-Zahl, turbulent.

Die Dicke der laminaren Grenzschicht der Platte wächst mit $\sqrt{x}$ an. Dabei ist x der Abstand von der Vorderkante. Die kritische Reynolds-Zahl der Plattengrenzschicht beträgt:

$$Re_{\text{krit}} = \left(\frac{U_\infty \cdot x}{\nu}\right)_{\text{krit}} = 5 \cdot 10^5. \tag{3.25}$$

Auch bei der längs angeströmten Platte kann wie bei der Rohrströmung die kritische Reynolds-Zahl heraufgesetzt werden, wenn die Zuströmung störungsarm (geringer Turbulenzgrad) ist.

Die experimentellen Ergebnisse der Untersuchungen des laminar-turbulenten Übergangs in der Grenzschicht sind in Abb. 3.10 zusammengefasst. Die laminare Grenzschichtströmung wird bei der kritischen Reynolds-Zahl Re_{krit} von zweidimensionalen Störwellen überlagert, die nach *Tollmien-Schlichting* benannt sind. Weiter stromab überlagern sich dreidimensionale Störungen, die eine charakteristische Λ-Wirbelbildung mit lokalen Scherschichten in der Grenzschicht zur Folge haben. Der Zerfall der Λ-Wirbel verursacht *Turbulenzflecken*, die den Übergang zu einer

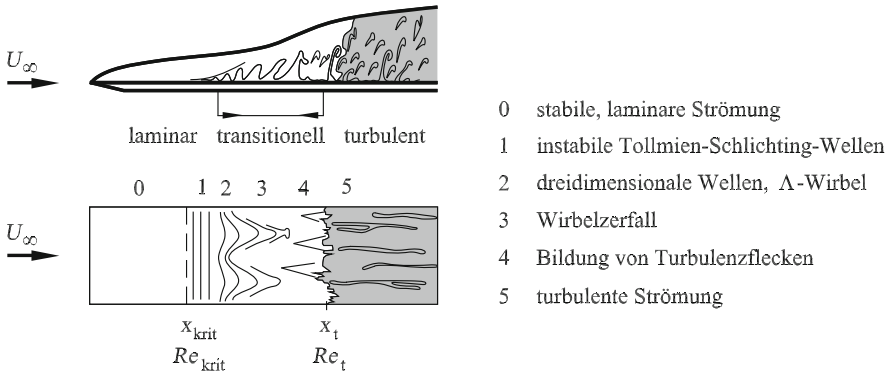


Abb. 3.10 Skizze des laminar-turbulenten Übergangs in der Grenzschicht der längs angeströmten ebenen Platte

turbulenten Grenzschichtströmung einleiten. Bei Re_t ist der Transitionsvorgang abgeschlossen, stromab ist die Grenzschicht turbulent.

Wie aus Abb. 3.10 zu ersehen ist, wächst die Grenzschichtdicke beim laminar-turbulenten Übergang stark an.

4.4 Stabilitätstheorie

Das Einsetzen des laminar-turbulenten Übergangs lässt sich mit der *Stabilitätstheorie* behandeln. Die Bemühungen hierfür begannen bereits im vorigen Jahrhundert und führten schließlich 1930 zum Erfolg. Den theoretischen Untersuchungen liegt die Vorstellung zugrunde, dass in laminaren Strömungen kleine Störungen vorhanden sind. Diese können bei der Rohrströmung unter anderem vom Einlauf herrühren, während sie bei Grenzschichten umströmter Körper z. B. durch die Wandrauhigkeit oder durch Störungen in der Außenströmung verursacht werden können. Die Theorie verfolgt das zeitliche Verhalten solcher, der laminaren Grundströmung überlagerten Störungen, deren Form im Einzelfall noch näher festzulegen ist. Die entscheidende Frage ist, ob die Störungsbewegung zeitlich abklingt oder anwächst. Klingen die Störungen mit der Zeit ab, so wird die Grundströmung als *stabil* angesehen. Wachsen die Störungen zeitlich an, so ist die Grundströmung *instabil*, d. h. es besteht die Möglichkeit des Übergangs in die turbulente Strömung.

Auf diese Weise lässt sich eine *Stabilitätstheorie* der laminaren Strömung entwickeln, deren Ziel die theoretische Berechnung der *kritischen Reynolds-Zahl* für eine vorgegebene laminare Strömung ist (siehe Abschn. 2 des Kap. 7 ▸ Instabilitäten und turbulente Strömungen). Bei dieser Stabilitätsuntersuchung wird die Bewegung in die Grundströmung, deren Stabilität untersucht werden soll, und in eine überlagerte Störungsbewegung zerlegt. Die Grundströmung, die als stationär angesehen werden kann, wird im Folgenden mit den Geschwindigkeitskomponenten U_0, V_0, W_0 und dem Druck P_0 bezeichnet. Diese Grundströmung ist eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (3.8). Für die zeitlich veränderliche Störungsbewegung sind

die entsprechenden Größen u', v', w' und p'. Die resultierende Strömung ergibt sich mit dem Störungs-Ansatz

$$u = U_0 + u', \qquad v = V_0 + v', \qquad w = W_0 + w', \qquad p = P_0 + p'. \tag{3.26}$$

In den meisten Fällen wird dabei vorausgesetzt, dass die Störungsgrößen im Vergleich zu den Werten der Grundströmung klein sind.

Für eine zweidimensionale inkompressible Grundströmung (U_0 und V_0) und eine zweidimensionale Störungsbewegung (u' und v') erfüllt die resultierende Strömung nach Gleichung (3.26) die zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen. Die Grundströmung $U_0(y)$ wird besonders einfach gewählt, so dass U_0 nur von y abhängt. Die Geschwindigkeitskomponente V_0 verschwindet. Die Grenzschichtströmung erfüllt näherungsweise diese Bedingung, da die Abhängigkeit der Grundströmung U_0 von der Längskoordinate x sehr viel geringer ist als von der Querkoordinate y. Dieses wird als *Parallelströmungs-Annahme* bezeichnet. Für den Druck der Grundströmung $P_0(x, y)$ muss auch die Abhängigkeit von x berücksichtigt werden, weil das Druckgefälle $\partial P_0/\partial x$ die Strömung erzeugt. Damit hat die betrachtete Grundströmung die Form:

$$U_0(y), \qquad V_0 = 0, \qquad P_0(x, y). \tag{3.27}$$

Dieser Grundströmung wird eine zweidimensionale Störungsbewegung überlagert (Abb. 3.11), die auch von der Zeit abhängig ist. Die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten und der Druck sind

$$u'(x, y, t), \qquad v'(x, y, t), \qquad p'(x, y, t). \tag{3.28}$$

Man erhält die resultierende Strömung nach Gl. (3.26) zu:

$$u = U_0 + u', \qquad v = v', \qquad p = P_0 + p'. \tag{3.29}$$

Die Grundströmung Gl. (3.27) ist voraussetzungsgemäß eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen. Auch die resultierende Strömung Gl. (3.29) muss die Navier-

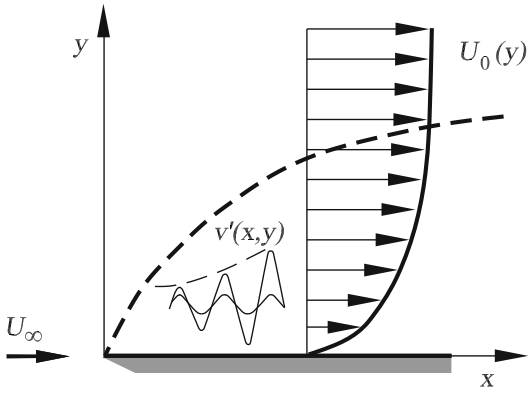


Abb. 3.11 Grundströmung $U_0(y)$ und Störwelle $v'(x, y)$ der Plattengrenzschicht

Stokes-Gleichungen erfüllen. Die überlagerte Störungsbewegung Gl. (3.28) wird als *klein* vorausgesetzt, d. h. sämtliche quadratischen Glieder der Störungsbewegung werden gegenüber den linearen Gliedern vernachlässigt.

Ziel der Stabilitätsuntersuchung ist es festzustellen, ob für eine vorgegebene Grundströmung die Störungsbewegung *zeitlich* abklingt oder anwächst. Je nachdem bezeichnet man die Grundströmung als stabil oder instabil.

Durch Einsetzen von Gl. (3.29) in die Navier-Stokes-Gleichungen erhält man unter Vernachlässigung der quadratischen Glieder in den Störungsgeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \cdot \frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} &= \nu \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 U_0}{\mathrm{d}y^2} + \Delta u' \right), \\
\frac{\partial v'}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p'}{\partial y} &= \nu \cdot \Delta v', \\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0.
\end{aligned}$$

Dabei ist Δ der Laplace-Operator $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Beachtet man, dass die Grundströmung die Navier-Stokes-Gleichungen erfüllt (im Fall der Grenzschicht näherungsweise), so vereinfachen sich diese Gleichungen zu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \cdot \frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} &= \nu \cdot \Delta u', \\
\frac{\partial v'}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p'}{\partial y} &= \nu \cdot \Delta v', \\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Das sind drei Gleichungen für u', v' und p'. Die zugehörigen Randbedingungen verlangen verschwindende Störungsgeschwindigkeiten u' und v' an den begrenzenden Wänden (Haftbedingung) und im Unendlichen. Aus den Gleichungen Gl. (3.30) lässt sich der Druck p' eliminieren, so dass sich zusammen mit der Kontinuitätsgleichung zwei Gleichungen für u' und v' ergeben.

Zur Beschreibung der Komponenten der Störungsgeschwindigkeiten für die *Tollmien-Schlichting-Wellen* wird der Wellenansatz

$$u' = \hat{u}(y) \cdot \exp\left(\mathrm{i} \cdot a \cdot x - \mathrm{i} \cdot \omega \cdot t\right), \qquad v' = \hat{v}(y) \cdot \exp\left(\mathrm{i} \cdot a \cdot x - \mathrm{i} \cdot \omega \cdot t\right), \tag{3.31}$$

verwendet, mit der Wellenzahl a, der Kreisfrequenz ω und den Amplitudenfunktionen $\hat{u}$, $\hat{v}$ der Störungswellen. Für das betrachtete zeitlich angefachte Stabilitätsproblem ist ω komplex:

$$\omega = \omega_\mathrm{r} + i \cdot \omega_\mathrm{i},$$

mit dem Realteil der Kreisfrequenz ω_r und der zeitlichen Anfachungsrate ω_i. Ist $\omega_\mathrm{i} < 0$, wird die Störungswelle gedämpft und die laminare Grenzschichtströmung ist *stabil*. Mit $\omega_\mathrm{i} > 0$ ergibt sich eine *instabile* Grenzschicht, in der Tollmien-Schlichting-Wellen zeitlich angefacht werden. Es ist zweckmäßig, neben a und ω die Phasengeschwindigkeit der Störungswelle einzuführen:

$$c = \frac{\omega}{a} = c_\mathrm{r} + \mathrm{i} \cdot c_\mathrm{i}.$$

Setzt man den Wellenansatz Gl. (3.31) in die Störungsdifferentialgleichung für u' und v' ein, erhält man z. B. für die Amplitudenfunktion $\hat{v}(y)$ die *Orr-Sommerfeld-Gleichung*:

$$(a \cdot U_0 - \omega) \cdot \frac{\mathrm{d}^2\hat{v}}{\mathrm{d}y^2} + a \cdot \left(a \cdot \omega - a^2 \cdot U_0 - \frac{\mathrm{d}^2 U_0}{\mathrm{d}y^2} \right) \cdot \hat{v} + \mathrm{i} \cdot \frac{1}{Re_d} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^4\hat{v}}{\mathrm{d}y^4} - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2\hat{v}}{\mathrm{d}y^2} + a^4 \cdot \hat{v} \right) = 0. \quad (3.32)$$

Dabei werden dimensionslose Größen mit der charakteristischen Geschwindigkeit am Grenzschichtrand U_δ, der charakteristischen Länge $d = \sqrt{\nu \cdot x / U_\delta}$ und der charakteristischen Zeit d/U_δ eingeführt. Die Orr-Sommerfeld-Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung, die mit den Randbedingungen an der Wand und in der ungestörten Anströmung

$$\begin{aligned} y = y_\mathrm{w} \quad &: \quad \hat{v} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}y} = 0, \\ y \to \infty \quad &: \quad \hat{v} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}y} = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

ein *Eigenwertproblem* mit der Reynolds-Zahl Re_d als Parameter ergibt. Dieses wird üblicherweise mit einem Spektralverfahren numerisch gelöst.

Die Lösungen des Eigenwertproblems werden in Form von Stabilitätsdiagrammen (Abb. 3.12) dargestellt. Das Stabilitätsdiagramm wird erstellt, indem die Wellenzahl a über der Reynolds-Zahl Re_d aufgetragen wird. Für die Nullstellen des Imaginärteils des komplexen Eigenwertes ω werden die zugehörigen Wertepaare (Re_d, a) im Diagramm eingetragen. Diese Neutralkurve trennt die stabilen von den instabilen Störungen. Sie wird auch Indifferenzkurve genannt, da im Fall $\omega_\mathrm{i} = 0$ die Störungsamplituden ihren ursprünglichen Wert beibehalten. Im Gebiet innerhalb der Indifferenzkurve gilt $\omega_\mathrm{i} > 0$, d. h. die Strömung ist instabil. Im Bereich außerhalb der Indifferenzkurve nimmt ω_i negative Werte an und die zu untersuchende Grundströmung ist bei der betrachteten Reynolds-Zahl stabil gegenüber aufgebrachten Störungen mit der zugehörigen Wellenzahl a.

Damit kann eine kritische Reynolds-Zahl Re_krit bestimmt werden, oberhalb der eine gegebene laminare Strömung instabil wird. Dazu wird in Abb. 3.12 eine Tan-

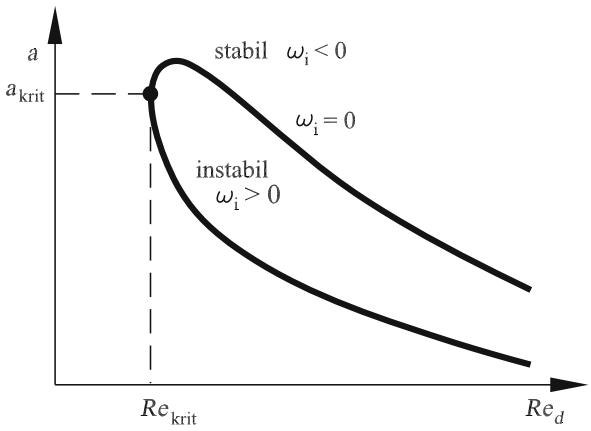


Abb. 3.12
Stabilitätsdiagramm der Plattengrenzschicht

gente an die Indifferenzkurve parallel zur a-Achse eingezeichnet. Der Schnittpunkt dieser Tangente mit der Abszisse ergibt den Wert der gesuchten *kritischen Reynolds-Zahl* Re_{krit}. Für eine Blasius-Grenzschicht beträgt der mit der Lauflänge gebildete Wert der kritischen Reynolds-Zahl:

$$Re_{krit} = \left(\frac{U_\delta \cdot x}{\nu}\right)_{krit} = 5 \cdot 10^5. \tag{3.34}$$

Mit der kritischen Reynolds-Zahl $Re_{krit} = 5 \cdot 10^5$ ergibt sich aus Abb. 3.12 die kritische Wellenzahl $a_{krit} = 2 \cdot \pi/\lambda_{krit}$, mit der sich die kritische Wellenlänge λ_{krit} der aufgebrachten Störungen berechnen lässt. Physikalisch bedeutet dieses, dass die laminare Grundströmung für Reynolds-Zahlen kleiner Re_{krit} gegenüber Störungen beliebiger Wellenlänge stabil ist, da in diesem Reynolds-Zahlbereich für alle Wellenzahlen $\omega_i < 0$ gilt. Bilden wir die kritische Reynolds-Zahl mit der charakteristischen Länge $d = \sqrt{\nu \cdot x/U_\delta}$ ergibt sich der Wert

$$Re_{krit} = \frac{U_\delta \cdot d}{\nu} = 302. \tag{3.35}$$

Diese Bildung ist für Vergleiche mit der Instabilität kompressibler Grenzschichten sinnvoll. So erhält man für das Einsetzen der Tollmien-Schlichting-Welle in einer kompressiblen Grenzschichtströmung bei adiabater Wand ebenfalls $Re_{krit} = 302$. Unterschiede ergeben sich erst bei isothermen Berandungen.

4.5 Beeinflussung des laminar-turbulenten Überganges

Die Beeinflussung des laminar-turbulenten Überganges in der zweidimensionalen Grenzschichtströmung ist von *H. Schlichting* 1968 zusammenfassend dargestellt worden. Die Transition lässt sich durch entsprechende Maßnahmen stromab ver-

schieben. Dieses führt zu einer Reduktion des Widerstandes. Der laminar-turbulente Übergang kann mittels bewegter Oberflächen, Beschleunigung der Grenzschicht durch Ausblasen oder durch Druckgradienten, Absaugen der Grenzschicht und Kühlung der Oberfläche beeinflusst werden. Im Folgenden soll der Einfluss des Druckgradienten, wie er bei der Beschleunigung auf einem Tragflügelprofil vorliegt, untersucht werden.

Während sich bei der Plattenumströmung in verschiedenen Abständen von der Plattenvorderkante ähnliche Geschwindigkeitsprofile ausbilden, verursacht der Druckgradient $\partial p/\partial x$ entlang eines Tragflügelprofils unterschiedliche laminare Grenzschichtprofile. Im Bereich abnehmenden Druckes $\partial p/\partial x < 0$ haben die Geschwindigkeitsprofile keinen Wendepunkt und im Gebiet zunehmenden Druckes $\partial p/\partial x > 0$ findet man solche mit Wendepunkt. Während bei der längs angeströmten Platte sämtliche Geschwindigkeitsprofile dieselbe kritische Reynolds-Zahl $Re_{\text{krit}} = 302$ aufweisen, ist bei einem Tragflügelprofil die Stabilitätsgrenze für die einzelnen Grenzschichtprofile verschieden. Im Bereich abnehmenden Druckes ergeben sich größere kritische Reynolds-Zahlen Re_{krit} und im Gebiet zunehmenden Druckes kleinere als bei der Plattenumströmung.

Der Druckgradient auf dem Tragflügelprofil lässt sich mit dem Formparameter Λ beschreiben:

$$\Lambda = -\frac{\delta^2}{\mu \cdot U_\delta} \cdot \frac{\partial p_\delta}{\partial x} = \frac{\delta^2}{\nu} \cdot \frac{\partial U_\delta}{\partial x},$$

mit der Grenzschichtdicke δ und der Geschwindigkeit am Grenzschichtrand U_δ. Der Formparameter Λ nimmt Werte zwischen $\Lambda = +12$ und $\Lambda = -12$ an, wobei für $\Lambda = -12$ die laminare Grenzschichtströmung ablöst.

Im vorderen Staupunkt des Profils ist $\Lambda = 7,05$ und im Druckminimum ist $\Lambda = 0$. $\Lambda > 0$ bedeutet eine Abnahme des Druckes und $\Lambda < 0$ eine Druckzunahme. Die Geschwindigkeitsprofile für $\Lambda < 0$ besitzen einen Wendepunkt.

Die Abb. 3.13 zeigt das Stabilitätsdiagramm laminarer Grenzschichtprofile mit Druckabnahme und Druckzunahme. Für die Geschwindigkeitsprofile im Gebiet abnehmenden Druckes $\Lambda > 0$ gehen für $Re_d \to \infty$, wie bei der Plattengrenzschicht mit $\Lambda = 0$, beide Zweige der Indifferenzkurve gegen Null. Für die Geschwindigkeitsprofile bei Druckzunahme $\Lambda < 0$ hat dagegen der obere Zweig der Indifferenzkurve eine von Null verschiedene Asymptote, so dass auch für $Re_d \to \infty$ ein endlicher Wellenlängenbereich von angefachten Störungen vorhanden ist. Man erkennt, dass für Grenzschichten im Bereich der Druckzunahme der von der Indifferenzkurve umschlossene instabile Bereich von Störungswellenlängen sehr viel größer ist als im Gebiet abnehmenden Druckes.

4.6 Ausbreitung turbulenter Störungen

Bisher wurde das Einsetzen des laminar-turbulenten Übergangs mit der Stabilitätstheorie behandelt. Im Folgenden werden Störungen im Transitionsbereich betrachtet, die bereits in Abb. 3.10 als *Turbulenzflecken* eingeführt wurden.

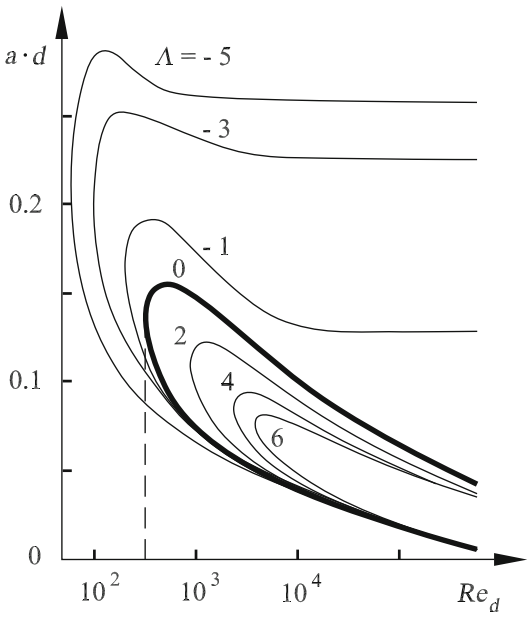


Abb. 3.13 Stabilitätsdiagramm für laminare Grenzschichtprofile bei Druckabnahme $\Lambda > 0$ und Druckanstieg $\Lambda < 0$

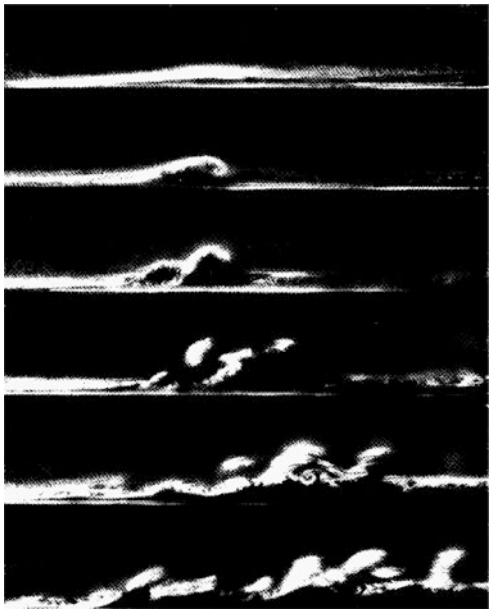


Abb. 3.14 Ausbreitung einer turbulenten Störung

Die Abb. 3.14 zeigt die Ausbreitung lokaler turbulenter Störungen im Transitionsbereich des laminar-turbulenten Übergangs der Plattengrenzschicht. Die zeitliche Abfolge der turbulenten Störungsausbreitung zeigt, dass sich eine durch eine Störung entstandene Turbulenz von selbst stromab weiter ausbreitet. Die

Störung wurde in die Grenzschicht eingebracht, indem kurzzeitig etwas Fluid aus der Grenzschicht abgesaugt wurde. Die Kamera fuhr auf einem Wagen mit der Störung mit, so dass immer dieselbe Wirbelgruppe beobachtet werden konnte. Bei der räumlichen Entwicklung der Wirbel bilden sich stromab immer neue Wirbel bis schließlich die voll turbulente Grenzschichtströmung ausgebildet ist.

Eine Theorie des Ausbreitungsvorgangs turbulenter Störungen gibt es bisher ebenso wenig wie eine exakte Theorie des ausgebildeten turbulenten Zustandes (siehe Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik).

5 Ausgebildete Turbulenz

Sehr viele technische Strömungen sind turbulent. Entsprechend dem Reynolds-Ansatz Gl. (3.22) versteht man darunter, dass der zeitlich gemittelten Hauptbewegung die turbulenten Schwankungen überlagert sind. Zur Veranschaulichung sind in Abb. 3.15 Aufnahmen einer turbulenten Strömung in einem Wassergerinne dargestellt.

Ein und dasselbe Strömungsbild wurde bei gleicher Durchflussgeschwindigkeit mit unterschiedlicher Kamerageschwindigkeit aufgenommen. An den vier Bildern lässt sich erkennen, ob die Längsgeschwindigkeit der Strömung größer oder kleiner als die der Kamera ist. Bei kleiner Kamerageschwindigkeit sieht man die Turbulenzstruktur an der Wand. Bei größerer Kamerageschwindigkeit werden die Turbulenzstrukturen innerhalb der Strömung sichtbar. Man kann die Orte erkennen, in denen die Längsgeschwindigkeit der Strömung mit der Kamerabewegung momentan übereinstimmt.

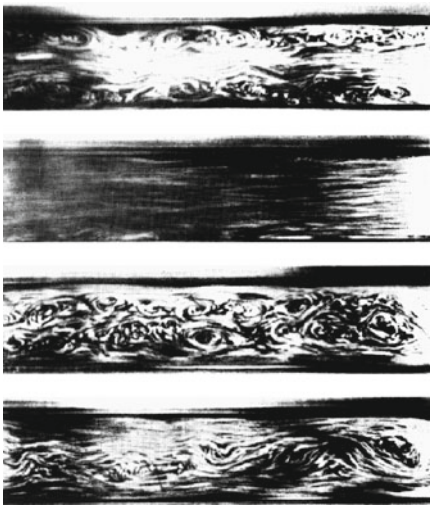


Abb. 3.15 Turbulente Strömung in einem Wassergerinne, bewegte Kamera. Aufnahme von *J. Nikuradse* 1929, Wiedergabe nach *W. Tollmien* 1931

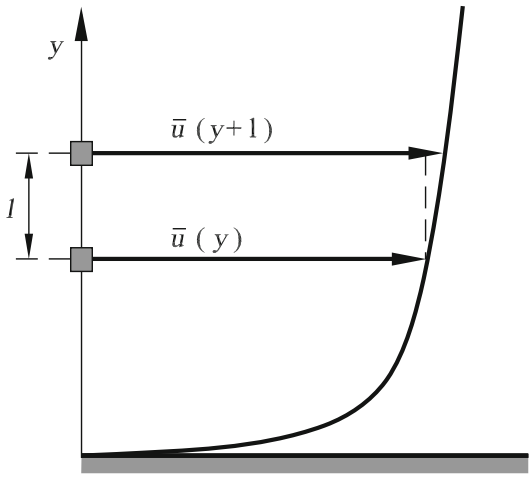


Abb. 3.16 Prandtlscher Mischungsweg

Der im Bild gezeigte Längs- und Querimpulsaustausch der turbulenten Strömung verursacht eine turbulente Mischbewegung, die maßgeblich für den größeren Widerstand der turbulenten Strömung verantwortlich ist.

5.1 Prandtlscher Mischungsweg

Die Geschwindigkeitsschwankungen verursachen scheinbare Spannungen, z. B. die turbulente Schubspannung $\tau' = -\rho \cdot \overline{u' \cdot v'}$. Diese muss mit der Verteilung der mittleren Geschwindigkeiten verknüpft werden. Hierfür ist der so genannte *Prandtlsche Mischungsweg* wesentlich. Das ist der Weg auf dem ein Fluidelement durch die turbulente Vermischung mit der umgebenden Flüssigkeit seine Individualität verliert.

In Abb. 3.16 wird ein Flüssigkeitselement in der betrachteten Grenzschicht von der Stelle y mit der mittleren Geschwindigkeit $\overline{u}(y)$ um den Weg l verschoben. Der Geschwindigkeitsunterschied zu der Geschwindigkeit am neuen Ort beträgt $\overline{u}(y + l) - \overline{u}(y)$. Hierfür kann in erster Näherung $l \cdot (\partial\overline{u}/\partial y)$ geschrieben werden. Dieser Wert gibt die Größenordnung der Schwankung u' an. Die Größe von v' erhält man mit der Annahme, dass zwei Fluidelemente, die von verschiedenen Seiten in die betrachtete Schicht eintreten, sich mit der Relativgeschwindigkeit $2 \cdot l \cdot (\partial\overline{u}/\partial y)$ nähern oder von einander entfernen. Aus Kontinuitätsgründen ist die Quergeschwindigkeit von gleicher Größenordnung. Damit ergibt sich auch für v' die Größenordnung $l \cdot (\partial\overline{u}/\partial y)$. Bei der Mittelwertbildung $\overline{u' \cdot v'}$ ist das Vorzeichen der u- und v-Komponenten zu beachten. Zu positiven v' gehören negative u' und zu negativen v' positive u'. Das Produkt $u' \cdot v'$ ist deshalb immer negativ. Die scheinbare Schubspannung wird positiv und ist von der Größenordnung $\rho \cdot (l \cdot (\partial\overline{u}/\partial y))^2$.

Für die turbulente Schubspannung τ' erhält man:

$$\tau' = \rho \cdot l^2 \cdot \left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right| \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}. \tag{3.36}$$

Aus Gleichung Gl. (3.36) folgt, dass sich die scheinbaren Spannungen der turbulenten Mischbewegungen proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ändern. In der Tat zeigen alle hydraulischen Widerstände im Wesentlichen dieses Verhalten. Die Länge l, die man *Prandtlschen Mischungsweg* nennt, hat eine gewisse Verwandtschaft zu der mittleren freien Weglänge der kinetischen Gastheorie. Dort wird der durch die Molekularbewegung hervorgerufene Impulstransport in entsprechender Weise betrachtet, wie im Fall der turbulenten Strömung der Impulstransport der Fluidelemente. Der Mischungsweg l der turbulenten Bewegung ist im Allgemeinen vom Ort abhängig. Wie groß er im Einzelfall ist, darüber fehlt eine allgemeine Theorie. Jedoch lassen sich für eine Reihe von Einzelfällen passende Annahmen finden, die zu gut bestätigten Ergebnissen führen (siehe Abschn. 3 des Kap. 7 ▸ Instabilitäten und turbulente Strömungen).

5.2 Freistrahl

Für einen Freistrahl hinreichend großer Reynolds-Zahl (siehe Abb. 3 des Kap. 6 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik) empfiehlt es sich den Mischungsweg l in jedem Querschnitt proportional der dortigen Strahlbreite zu setzen, also $l = \alpha \cdot b$. Dabei ist b der Halbdurchmesser einer parabolischen Geschwindigkeitsverteilung deren Maximalgeschwindigkeit und deren Volumenstrom mit der tatsächlichen Strömung übereinstimmen. α ist eine Proportionalitätskonstante mit $\alpha \approx 0,125$.

Eine derartige Festlegung eines Geschwindigkeitsprofils ist erforderlich, weil die viskose Strömung diffus in die äußere Flüssigkeit übergeht. Die Geschwindigkeit des runden Freistrahls nimmt dabei mit zunehmender Entfernung ab, wobei in allen Querschnitten eine glockenförmige Verteilung der Geschwindigkeit vorliegt (siehe Abb. 3.17). Da im Strahl annähernd der Druck der Umgebung herrscht, sind es hauptsächlich die scheinbaren Schubspannungen, die die Geschwindigkeit mit der Entfernung vermindern und dabei gleichzeitig immer neue ruhende Flüssigkeit mitreißen. Die scheinbare Schubspannung τ' nimmt ausgehend von der Mitte des Freistrahls in radialer Richtung von Null bis zu einem Maximalwert zu, um dann wieder bis auf Null abzunehmen.

Wegen des annähernd konstanten Drucks ist es nahe liegend anzunehmen, dass der Impuls des Strahles $J = \rho \cdot \int u^2 \cdot \mathrm{d}A$ für alle x-Werte gleich groß ist. Damit ist J proportional zu $\rho \cdot u_1^2 \cdot \pi \cdot b^2$, wobei u_1 die Maximalgeschwindigkeit im Querschnitt A des Freistrahls ist. Da J konstant ist, folgt hieraus, dass u_1 proportional zu $1/b$ und damit auch proportional zu $1/x$ ist. Die Strömung verläuft nach Abb. 3.17. Ist

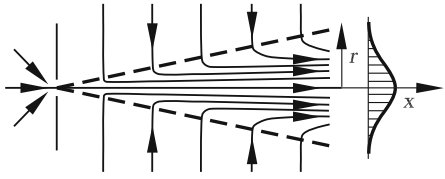


Abb. 3.17 Stromlinien eines sich ausbreitenden Freistrahls

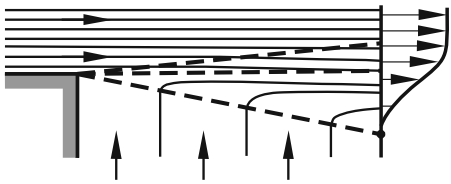


Abb. 3.18 Stromlinien einer Eckenströmung

b der Halbwertdurchmesser, für den $u/u_1 = 0.5$ gilt, ergibt sich für $x/d > 10$ (d Strahldurchmesser bei $x = 0$) $b/x = 0,0848$ und ferner $u_1(x)/u_1(x = 0) = 6,57 \cdot d/x$. Die in axialer Richtung strömende Flüssigkeitsmenge $\int u \cdot \mathrm{d}A$ ist proportional $u_1 \cdot \pi \cdot b^2$ und nimmt mit der Entfernung x linear zu. Die im Raum befindliche Flüssigkeit strömt darum mit der radialen Geschwindigkeit $v \sim \sqrt{J/\rho}/r$ auf den Strahl zu.

Mit $l = \alpha \cdot b$ erhält man für die Schubspannung τ' nach Gl. (3.36) einen Mittelwert τ'_m über den Querschnitt, wenn $\partial\overline{u}/\partial y$ durch $-2 \cdot u_1/b$ angenähert wird. Es ergibt sich:

$$\tau'_\mathrm{m} = -4 \cdot \rho \cdot l^2 \cdot \left(\frac{u_1^2}{b}\right) = -4 \cdot \alpha^2 \cdot \rho \cdot u_1^2.$$

5.3 Scherschicht

Ein anderer Fall turbulenter Ausbreitung ist die Auflösung des Strahlrandes einer Eckenumströmung (Abb. 3.18). Hier ist u_1 konstant. τ'_m ist mit $l = \alpha \cdot b$ proportional zu $\alpha^2 \cdot \rho \cdot u_1^2$ und folglich ebenfalls konstant. Für die weitere Betrachtung wird die Breitenausdehnung senkrecht zur Zeichenebene gleich 1 gesetzt. Damit ist der Impulsverlust der ankommenden Strömung proportional $\rho \cdot u_1^2 \cdot b$. Der zugehörige Widerstand ist proportional $\tau'_\mathrm{m} \cdot x$, d. h. $b \sim \alpha^2 \cdot x$ wie beim Freistrahl. Die ruhende Flüssigkeit der Umgebung erfährt einen gleichgroßen Impulsgewinn.

5.4 Wandturbulenz

Bei Strömungen längs einer Wand muss der Mischungsweg bei Annäherung an die Wand gegen Null gehen. Hieraus ergibt sich, dass $\partial\overline{u}/\partial y$ im Inneren der Strömung sehr klein wird, in der Nähe der Wände aber große Werte annimmt. An der Wand mit $y = 0$ gilt die Haftbedingung. Infolgedessen bildet sich in unmittelbarer Nähe der Wand eine dünne Reibungsschicht (*viskose Unterschicht*) aus, in der näherungsweise $\partial\overline{u}/\partial y = \tau_\mathrm{w}/\mu$ mit der Wandschubspannung τ_w gilt.

Für die theoretische Behandlung wird eine glatte Wand und konstante Schubspannung $\overline{\tau} = \tau_\mathrm{w}$ vorausgesetzt, die zur Vereinfachung in x- und z-Richtung unendlich ausgedehnt ist. Es gilt dann:

$$\overline{\tau} = \tau_\mathrm{w} = \mu \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}y} - \rho \cdot \overline{u' \cdot v'}. \tag{3.37}$$

Die mittlere Geschwindigkeit hängt nur noch von y ab und wird vollständig durch τ_w, ρ und ν bestimmt. Man kann den Zusammenhang daher in dimensionsloser Form wiedergeben. Dabei wird die Schubspannungsgeschwindigkeit $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ eingeführt. Das Verhältnis ν/u_τ ist eine charakteristische Länge. Die gesamte Schubspannung in der wandnahen Schicht bestehend aus dem Mittelwert der Reibungsspannungen und den scheinbaren Schubspannungen der Turbulenz ergibt für positive Gradienten $\mathrm{d}\overline{u}/\mathrm{d}y$:

$$\tau_w = \mu \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}y} + \rho \cdot l^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}y}\right)^2. \tag{3.38}$$

Der erste Term der Gl. (3.38) gilt in der viskosen Unterschicht, der zweite Term in der darüber liegenden wandnahen Schicht.

Die Geschwindigkeitsverteilung lässt sich in der Form

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \mathrm{f}\left(\frac{y \cdot u_\tau}{\nu}\right) \tag{3.39}$$

ausdrücken, wobei f eine Funktion von $y \cdot u_\tau/\nu$ ist. Innerhalb der viskosen Unterschicht $y \cdot u_\tau/\nu \leq 1$ gilt $\mathrm{f}(y \cdot u_\tau/\nu) = y \cdot u_\tau/\nu$. Für große Wandabstände $y \cdot u_\tau/\nu > 50$ geht $\mu \cdot (\mathrm{d}\overline{u}/\mathrm{d}y)$ gegen Null und $-\overline{u' \cdot v'}$ wird näherungsweise u_τ^2. Die Strömung wird nur durch die Größen u_τ und y bestimmt. Mit der Annahme, dass $l = \kappa \cdot y$ ist, ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{u_\tau}{y}. \tag{3.40}$$

κ ist die *Kármánsche Konstante*. Aus Experimenten erhält man für κ näherungsweise einen Wert von 0.4. Die Integration der Gl. (3.40) ergibt:

$$\overline{u} = u_\tau \cdot \left(\frac{1}{\kappa} \cdot \ln(y) + \mathrm{C}\right) \tag{3.41}$$

oder unter Verwendung der Gl. (3.39):

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \mathrm{f}\left(\frac{y \cdot u_\tau}{\nu}\right) = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln\left(\frac{y \cdot u_\tau}{\nu}\right) + \mathrm{C}_1. \tag{3.42}$$

Die Gl. (3.42) wird als *logarithmisches Wandgesetz* bezeichnet. Nach Messungen von *J. Nikuradse* 1932 erhält man für glatte Rohre $\kappa = 0,4$ und für die Integrationskonstante $\mathrm{C}_1 = 5.5$.

Der Verlauf der experimentell ermittelten Geschwindigkeitsverteilungen ist in Abb. 3.19 dargestellt. Man erkennt das logarithmische Wandgesetz für Werte größer als $y \cdot u_\tau/\nu = 50$ (Kurve 2). Die Kurve 1 zeigt die Geschwindigkeitsverteilung $u/u_\tau = y \cdot u_\tau/\nu$ der viskosen Unterschicht.

Bei der turbulenten Strömung über eine *rauhe Wand* werden neben der zähen Schubspannung $\mu \cdot (\mathrm{d}\overline{u}/\mathrm{d}y)$ zusätzliche Kräfte auf die Wand übertragen, die durch

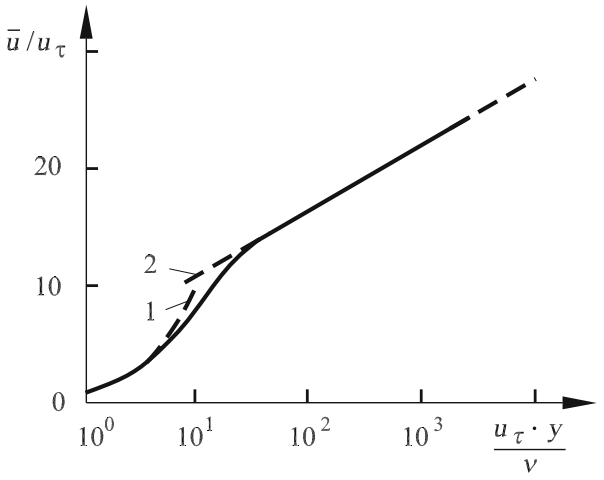


Abb. 3.19 Logarithmisches Wandgesetz und Geschwindigkeitsverteilung in der viskosen Unterschicht

die Rauhigkeitserhebungen verursacht werden. Diese werden zu einer resultierenden Reibungskraft zusammengefasst, deren Mittelwert jetzt als Wandschubspannung τ_w bezeichnet wird. Ein unmittelbarer Einfluss der Wandrauhigkeit macht sich in der viskosen Unterschicht bemerkbar, wenn deren Dicke von der Größenordnung der Rauhigkeitserhebungen ist. Damit ändert sich die Bestimmung der Integrationskonstanten C_1. Mit der räumlich gemittelten Rauhigkeitserhebung k kommt eine weitere charakteristische Länge hinzu. Maßgebend ist die mit der Rauhigkeit gebildete Reynolds-Zahl $Re_k = k \cdot u_\tau/\nu$. Wenn Re_k groß ist, kann ν/u_τ gegenüber k vernachlässigt werden. Man erhält aus Gl. (3.41) mit $C = C_2 - (1/\kappa) \cdot ln(k)$:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln\left(\frac{y}{k}\right) + C_2. \tag{3.43}$$

Für kleine Werte von Re_k tritt an Stelle von C_2 eine Funktion von $k \cdot u_\tau/\nu$, die für sehr kleine Werte von Re_k die Form $C_1 + (1/\kappa) \cdot ln(k \cdot u_\tau/\nu)$ annimmt, wodurch Gl. (3.43) in Gl. (3.42) übergeht. Eine Wand mit geringer Rauhigkeit ist demnach *hydraulisch glatt*.

5.5 Rohrströmungen

Für die turbulente Strömung durch Rohre mit gleichbleibendem Querschnitt ist die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ wiederum die charakteristische Geschwindigkeit:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{2 \cdot \rho} \cdot \frac{R}{l}}. \tag{3.44}$$

Im Inneren der Rohrströmung spielt die Zähigkeit keine Rolle. Damit ist der Rohrradius R die einzige charakteristische Länge. Es ergibt sich:

$$\overline{u}_{\max} - \overline{u}(y) = u_\tau \cdot \mathrm{F}\left(\frac{y}{R}\right), \tag{3.45}$$

mit der universellen Funktion F, der Maximalgeschwindigkeit $\overline{u}_{\max}$ in der Mitte des Rohres und dem Wandabstand $y = R - r$. Dieses Gesetz gilt in gleicher Weise für glatte und rauhe Rohre bei sehr großen Reynolds-Zahlen. Die Funktion F muss experimentell bestimmt werden. Für die mittlere Durchflussgeschwindigkeit w lässt sich aus Gl. (3.45) die Beziehung

$$w = \overline{u}_{\max} - 2 \cdot u_\tau \cdot \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{R}\right) \cdot F\left(\frac{y}{R}\right) \cdot \mathrm{d}\left(\frac{y}{R}\right) \tag{3.46}$$

ableiten.

Nähert man sich der Wand, so gilt außerhalb der viskosen Unterschicht wieder Gl. (3.41). Es wird $\mathrm{C} = (\overline{u}_{\max}/u_\tau) - (1/\kappa) \cdot \ln(R) + A$ gesetzt. Der Wert A ist eine weitere Kennzahl der turbulenten Rohrströmung. Mit $A = -0,6$ gilt für kleine Werte y/R:

$$\overline{u}_{\max} - \overline{u} = u_\tau \cdot \left(0,6 - 2,5 \cdot \ln\left(\frac{y}{R}\right)\right) \tag{3.47}$$

Die Gleichungen (3.44) und (3.47) reichen aus um mit den Gl. (3.42) und (3.43) des Wandgesetzes die Geschwindigkeitsverteilung und den Druckabfall in glatten und rauhen Rohren zu berechnen.

5.6 Grenzschichtströmungen

Turbulente Grenzschichten sind auf der einen Seite durch eine feste Wand begrenzt, auf der anderen Seite besitzen sie eine Grenze mit der reibungsfreien Außenströmung. Da die Dicke der Grenzschicht in Strömungsrichtung zunimmt, tritt kontinuierlich Flüssigkeit von der Außenströmung in die Grenzschicht ein und es bildet sich am Grenzschichtrand die freie Turbulenz aus. In der Nähe der Wand entsteht in Abhängigkeit der Oberflächenbeschaffenheit (glatt oder rauh) die bereits behandelte Wandströmung.

In der Plattengrenzschicht gilt das Wandgesetz Gl. (3.42) nur in der wandnahen Schicht. Im äußeren Teil der Plattengrenzschicht sind die Abweichungen vom Wandgesetz stets größer als im Rohr. Deshalb wird für die Plattengrenzschicht ein *Außengesetz* in der Form

$$\frac{U_\infty - \overline{u}}{u_\tau} = \mathrm{G}\left(\frac{y}{\delta}\right) \tag{3.48}$$

formuliert, mit der Funktion G, der Grenzschichtdicke δ und der Geschwindigkeit U_∞ in der Außenströmung. Für beliebige turbulente Grenzschichten gilt:

$$\frac{U_\infty - \overline{u}}{u_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{\pi(x)}{\kappa} \cdot \left(2 - \mathrm{w}\left(\frac{y}{\delta}\right)\right).$$

Diese Gleichung ist auch in der *Nachlaufströmung* gültig. Die Nachlauffunktion $\mathrm{w}(y/\delta)$ und der Parameter $\pi(x)$ sind empirisch zu ermitteln. Dabei soll nur der Parameter $\pi(x)$ vom Druckverlauf $p(x)$ und eventuell von der Turbulenz der Außenströmung abhängen.

Statt der Grenzschichtdicke wird besser die mit der Verdrängungsdicke δ_1 gebildete Bezugslänge $\delta_1 \cdot U_\infty/u_\tau$ verwendet. Damit ergibt sich Gl. (3.48) zu

$$U_\infty - \overline{u} = u_\tau \cdot \mathrm{F}\left(\frac{y \cdot u_\tau}{\delta_1 \cdot U_\infty}\right).$$

F ist eine dimensionslose Funktion, die wegen der Definition für δ_1 Gl. (3.19) die Bedingung

$$\int_0^\infty \mathrm{F}\left(\frac{y \cdot u_\tau}{\delta_1 \cdot U_\infty}\right) \cdot \mathrm{d}\left(\frac{y \cdot u_\tau}{\delta_1 \cdot U_\infty}\right) = 1$$

erfüllt. Die Abb. 3.20 zeigt das experimentell ermittelte Außengesetz der Plattengrenzschichtströmung.

Dieses Außengesetz gilt nicht mit gleicher Selbstverständlichkeit wie das entsprechende Gesetz Gl. (3.45) der Rohrströmung, da die Schubspannungsverteilung hier von der Geschwindigkeitsverteilung abhängt. Deshalb hängt F bei der Plattengrenzschicht vom örtlichen Reibungsbeiwert $c_\mathrm{f} = 2 \cdot (u_\tau/U_\infty)^2$ ab. Die

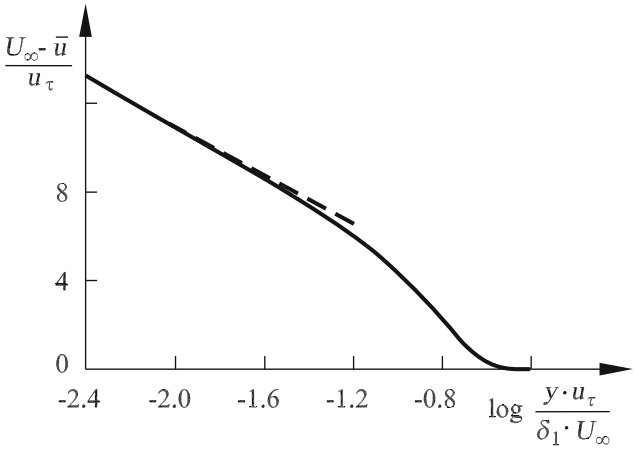


Abb. 3.20 Außengesetz der turbulenten Plattengrenzschicht

Geschwindigkeitsverteilung ist von der Turbulenz der Außenströmung abhängig. Nähert man sich der Wand, so geht die Geschwindigkeitsverteilung in das logarithmische Wandgesetz Gl. (3.41) über. Die Gleichung (3.49) nimmt bei entsprechender Festlegung der Integrationskonstanten C die Form

$$U_\infty - \overline{u} = u_\tau \cdot \left(-\frac{1}{\kappa} \cdot \ln \left(\frac{y \cdot u_\tau}{\delta_1 \cdot U_\infty} \right) + \mathrm{K} \right) \tag{3.49}$$

an. Die Konstante K hat ungefähr den Wert $-1,5$. Verknüpft man Gl. (3.49) mit dem logarithmischen Wandgesetz Gl. (3.42), erhält man eine Gleichung für den örtlichen Reibungsbeiwert c_f als Funktion der Reynolds-Zahl $Re_1 = U_\infty \cdot \delta_1 / \nu$:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{c_\mathrm{f}}{2}}} = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln \left(\frac{U_\infty \cdot \delta_1}{\nu} \right) + \mathrm{C}_1 + \mathrm{K}. \tag{3.50}$$

Nach dem Einsetzen der entsprechenden Zahlenwerte ergibt sich aus Messungen an glatten Platten:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{c_\mathrm{f}}{2}}} = 2.5 \cdot \ln \frac{U_\infty \cdot \delta_1}{\nu} + 3.7. \tag{3.51}$$

In gleicher Weise kann auch der Reibungsbeiwert für rauhe Oberflächen berechnet werden. Man führt die Größe

$$I = \int_0^\infty \mathrm{F}^2 \cdot \mathrm{d} \left(\frac{y \cdot u_\tau}{\delta \cdot U_\infty} \right)$$

ein. Aus der Funktion in Abb. 3.20 ergibt sich der Wert $I = 6.2$. Damit lässt sich die Beziehung

$$\delta_2 = \delta_1 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{c_\mathrm{f}}{2}} \cdot I \right) \tag{3.52}$$

zwischen der Impulsverlustdicke δ_2 (Gl. (3.20)) und der Verdrängungsdicke δ_1 herleiten. Mit den Gleichungen (3.51) und (3.52) lässt sich die Impulsgleichung der laminaren Grenzschicht integrieren und der Reibungswiderstand von Platten bei turbulenter Strömung berechnen.

Das Außengesetz kann man auch auf Grenzschichten mit *variablem Druck* anwenden. Es hat sich gezeigt, dass die bei verschiedenen Druckverläufen gemessenen Geschwindigkeitsprofile bei kleinen y-Werten sich näherungsweise wie eine einparametrige Kurvenschar entsprechend Gl. (3.49) verhalten. Nur die Konstante K ändert sich. Damit besteht ein fester Zusammenhang zwischen K und dem Integral I.

Da das Wandgesetz Gl. (3.42) auch bei verschiedenen Druckverteilungen anwendbar ist, gelten die Gl. (3.50) und (3.52) mit entsprechenden Zahlenwerten für K und U_∞ auch bei variierendem Druck längs der Wand. Der Reibungsbeiwert nimmt

in Grenzschichten mit Druckanstieg ab. *H. Ludwieg* und *W. Tillmann* haben 1949 aus ihren Messungen die Gleichung

$$c_\mathrm{f} = 0.246 \cdot 10^{(-0.678 \cdot H)} \cdot Re_2^{-0.268} \tag{3.53}$$

abgeleitet, mit $H = \delta_1/\delta_2$ und $Re_2 = U_\infty \cdot \delta_2/\nu$.

Die Geschwindigkeitsprofile der turbulenten Grenzschichten bei Druckänderung können näherungsweise durch den Formparameter $H = \delta_1/\delta_2$ gekennzeichnet werden. Es wird aber noch eine Beziehung zwischen dem Druckverlauf und dem Formparameter benötigt. Für die Änderung von H mit dem örtlichen Druckgradienten erhält man eine zweite Differentialgleichung:

$$\delta_2 \cdot \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{M} \cdot \frac{\delta_2}{U_\infty} \cdot \frac{\mathrm{d}U_\infty}{\mathrm{d}x} - \mathrm{N}. \tag{3.54}$$

Dabei sind M und N Funktionen von H und Re_2 (bei rauhen Oberflächen auch von k/δ_2), die experimentell bestimmt werden müssen.

6 Strömungsablösung und Wirbelbildung

Die an Körperoberflächen verzögerten Reibungsschichten können freie Trennflächen beziehungsweise Wirbel bilden (siehe Abschn. 4 des Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit). Wird die äußere Strömung durch eine Druckabnahme in der Bewegungsrichtung beschleunigt, erfahren auch die Flüssigkeitsteilchen in der Reibungsschicht eine Beschleunigung in die Bewegungsrichtung. Die Strömung wird daher ihre Richtung längs der Körperoberfläche in der gesamten Grenzschicht beibehalten. Nimmt dagegen der Druck entgegen der Strömungsrichtung ab, wird die äußere Strömung verzögert. Dadurch werden die langsameren Fluidelemente der Reibungsschicht noch stärker abgebremst. Ist die Verzögerung groß genug, löst die Strömung von der Wand ab und es tritt ein Rückströmgebiet auf. Die Abb. 3.21 verdeutlicht den stationären Ablösevorgang bei einem vorgegebenen Druckverlauf p. Die durch die Ablösung entstandene *Trennschicht* rollt sich zu einem bzw. mehreren Wirbeln auf. Infolge der Rückströmung in Wandnähe zeigt das Stromlinienbild der Grenzschichtströmung in der Nähe der Ablösestelle A eine sehr starke Aufdickung der Grenzschicht. Damit verbunden ist der Transport von Fluidmasse aus der Grenzschicht in die Außenströmung. An der Ablösestelle verlässt die Wandstromlinie unter einem bestimmten Winkel die Wand. Die Lage der Ablösestelle ist dadurch gegeben, dass an der Wand der Geschwindigkeitsgradient senkrecht zur Wand verschwindet d. h., dass die Wandschubspannung τ_w gleich Null wird:

$$\tau_\mathrm{w} = \mu \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_\mathrm{w} = 0 \qquad \text{(Ablösung)}. \tag{3.55}$$

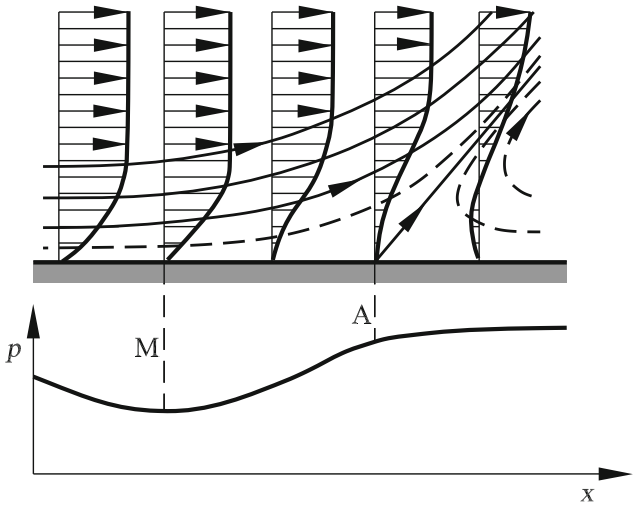


Abb. 3.21 Ablösevorgang (Geschwindigkeitsmaximum M, Ablösepunkt A)

Die Abb. 3.22 zeigt in einer Bildsequenz das Entstehen der Strömungsablösung an einem in einer Flüssigkeit in Bewegung gesetzten Kreiszylinder. Beim Beginn der Bewegung stellt sich die Potentialströmung ein. Zu einem späteren Zeitpunkt löst die Strömung am Zylinder ab. In der Nachlaufströmung bildet sich ein Rückströmgebiet mit ausgeprägten Wirbeln aus. Die Trennschicht in der Flüssigkeit ist durch eine Anhäufung von Aluminiumflittern deutlich zu erkennen. Analysiert man die in dem Abschn. 3 des Kap. 6 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik eingeführte Struktur der Momentaufnahmen der Zylinderumströmung, erkennt man die vier Halbsattel S' der Staupunkte und Ablösepunkte auf dem Zylinder sowie den Sattelpunkt S und die zwei Foki F der Nachlaufströmung. Die Bildfolge zeigt, dass die Wirbel des Rückströmgebietes mit fortschreitender Zeit anwachsen und schließlich instabil werden. Nach einer kritischen Anlaufzeit bildet sich die *Kármánsche Wirbelstraße* mit periodisch abschwimmenden Wirbeln aus, deren Struktur durch eine Abfolge von Foki F und Sattelpunkten S gekennzeichnet ist.

Der gleiche Ablösevorgang liegt auch bei der Strömung in einem sich in Strömungsrichtung erweiternden Kanal vor (Diffusor, siehe Abb. 3.27). Vor dem engsten Querschnitt nimmt der Druck in Strömungsrichtung ab. Hier liegt die Strömung an den Wänden an. Nach dem engsten Querschnitt erweitert sich der Kanal und der Druck nimmt in Strömungsrichtung zu. Dadurch löst die Grenzschicht von beiden Wänden unter Bildung eines Rückströmgebietes ab. Die eigentliche Strömung tritt nur noch im Kernbereich des Kanalquerschnittes auf.

Erfährt eine Strömung eine Umlenkung in einem Kanal, entsteht im gekrümmten Teil der Strömung ein Druckabfall quer zur Strömungsrichtung. Dadurch nimmt die Geschwindigkeit an der äußeren Wand ab und die Strömung löst, wie in Abb. 3.23 gezeigt, ab. Weiter stromab klingt der durch die Umlenkung verursachte Druckabfall

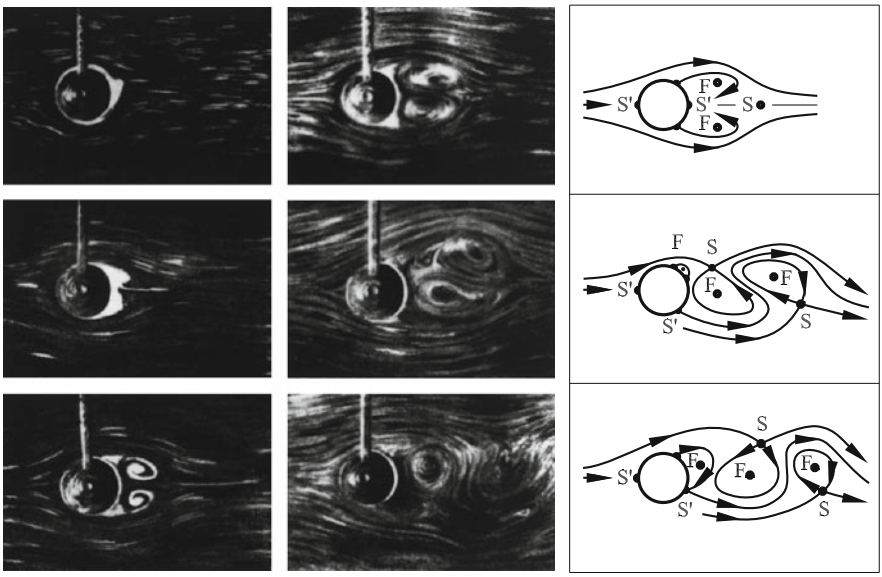
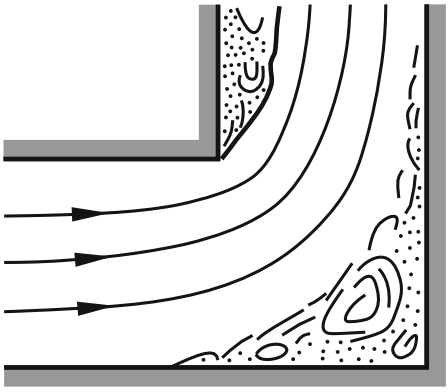


Abb. 3.22 Entwicklung des Wirbelsystems hinter einem nichtrotierenden Zylinder

Abb. 3.23 Strömung um eine Ecke



ab, die Geschwindigkeit an der äußeren Wand nimmt zu und die Strömung legt sich wieder an die Wand an.

Ähnliche Strömungsablösungen bilden sich beim Eintritt in einen Krümmer, sowie vor einer plötzlichen Verengung in einem Kanal. Auch vor einem vom Wind angeströmten Haus (siehe Abb. 3.24) oder einem im Fluss stehenden Pfeiler entsteht am Boden stromauf des Hindernisses sowie im Nachlauf Strömungsablösung. Die dabei gebildete Trennschicht ist instabil und es entstehen stromab laufende Wirbel.

In der Technik versucht man, trotz des Druckanstiegs eine Ablösung der Strömung zu vermeiden, um die Strömungsverluste klein zu halten. Dieses erreicht man, indem Kanäle nur allmählich erweitert werden, bzw. die Form der Körper genügend

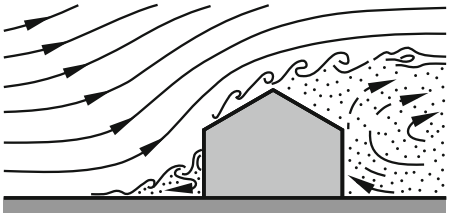


Abb. 3.24 Umströmung eines Hauses

schlank gestaltet wird, damit die Beschleunigung der äußeren Strömung gegenüber dem Druckanstieg überwiegt. Das gelingt in der Regel, wenn die Grenzschicht im verzögerten Teil turbulent ist.

In einer Strömung mit Druckanstieg kann die Strömung auf einem Körper bis zum Ablösepunkt laminar bleiben, wenn die Oberfläche sehr glatt und die ankommende Strömung turbulenzarm ist. Kurz vor der Ablösestelle weist das Grenzschichtprofil einen Wendepunkt auf. Dieses stellt ein hinreichendes Kriterium für das Einsetzen der Instabilität in der Grenzschicht dar. Der laminar-turbulente Übergang setzt ein, der bei entsprechend großer Reynolds-Zahl stromab zu einem Wiederanlegen der turbulenten Grenzschichtströmung führen kann. Das Wiederanlegen der turbulenten Grenzschichtströmung hängt zum einen von der mit dem Krümmungsradius gebildeten Reynolds-Zahl und zum anderen von der Änderung der Oberflächenkrümmung der Wand ab. Laminare Strömungsablösung mit turbulentem Wiederanlegen tritt häufig bei dünnen Flügelprofilen mit scharfer Nasenkrümmung und entsprechend großen Anstellwinkeln auf.

Die Abb. 3.25 zeigt den Übergang von der sich ablösenden Grenzschichtströmung bei geringen Reynolds-Zahlen zu der anliegenden Strömung bei größeren Reynolds-Zahlen. Den Bildern entsprechen Werte $2 \cdot 10^4$, $5 \cdot 10^4$ und $6 \cdot 10^4$ für die mit dem Krümmungsradius r gebildeten Reynolds-Zahl $U \cdot r/\nu$.

In einer turbulenten Strömung wird infolge der turbulenten Durchmischung der Ablösepunkt eines umströmten Körpers stromab verlagert. Dadurch wird das Rückströmgebiet im Nachlauf des Körpers wesentlich kleiner. Damit verbunden ist eine beträchtliche Abnahme des Druckwiderstandes, der als Sprung im Verlauf des Widerstandsbeiwertes $c_\mathrm{w} = \mathrm{f}(Re)$ in Erscheinung tritt. Dieses konnte *L. Prandtl* 1914 mit seinem berühmten Experiment zeigen, indem er auf eine Kugel einen dünnen Stolperdraht auflegte und die laminare Grenzschicht schon bei einer kleineren Reynolds-Zahl künstlich turbulent wurde. So erreichte er eine Reduzierung des Widerstands, die ohne Stolperdraht erst bei größerer Reynolds-Zahl auftritt.

6.1 Beeinflussung der Strömungsablösung

6.1.1 Rotation

Die Strömungsablösung ist meist unerwünscht, da sie Verluste mit sich bringt. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Grenzschichten künstlich derart zu beeinflussen, dass die Ablösung verhindert wird. Lässt man z. B. einen quer angeströmten

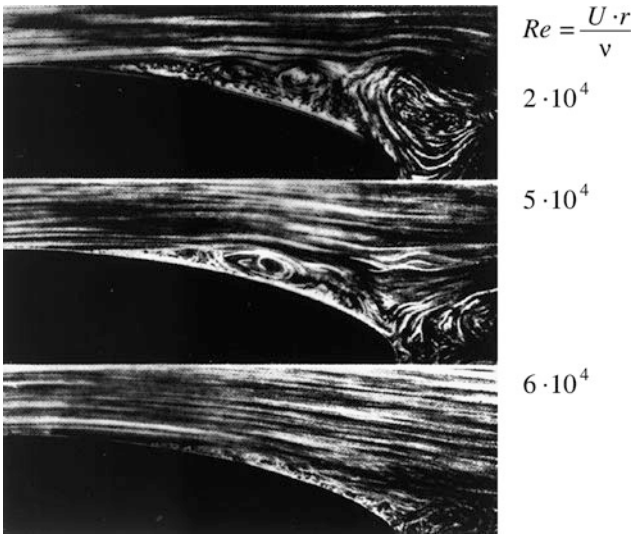


Abb. 3.25 Laminare Ablösung und turbulentes Wiederanlegen bei wachsender Reynolds-Zahl

Zylinder so *rotieren*, dass die Umfangsgeschwindigkeit gleich oder größer als die maximale Strömungsgeschwindigkeit am Zylinderumfang ist, erfolgt auf der Seite, an der die Flüssigkeit und die Wand sich gleichsinnig bewegen, eine Beschleunigung der Grenzschicht. Damit entsteht dort keine Ablösung. Auf der anderen Seite bewegt sich die Wand der Flüssigkeit entgegen und bremst die Grenzschicht ab, so dass hier erst eine Rückströmung und dann die Ablösung eines Wirbels zu beobachten ist. Am Zylinder verbleibt eine dem Wirbel gegenläufige Zirkulation. Die Wirbelbildung zu Beginn der Bewegung ist in den Aufnahmen der Abb. 3.26 dargestellt. Für die letzten drei Momentaufnahmen der Wirbelablösung ist die Strömungsstruktur skizziert.

6.1.2 Absaugung

Ein anderes sehr wirksames Mittel zur Vermeidung der Grenzschichtablösung ist die *Absaugung*. Hierbei wird durch schmale Schlitze oder durch Poren in der Körperwand im Bereich der Rückströmung das Fluid in der Grenzschicht in das Innere des Körpers abgesaugt. Ist die Absaugung stark genug, wird die Ansammlung verzögerten Fluids vermieden und die Grenzschichtablösung kann verhindert werden. Ein Beispiel für die Wirkung der Grenzschichtabsaugung ist in Abb. 3.27 gezeigt. Es wird die Strömung in einem stark divergenten Kanal betrachtet. Ohne Absaugung tritt Ablösung auf. Wird das Rückströmgebiet an beiden Seiten des Diffusors abgesaugt, füllt die Strömung den ganzen Kanalquerschnitt aus und die Strömungsablösung wird vermieden.

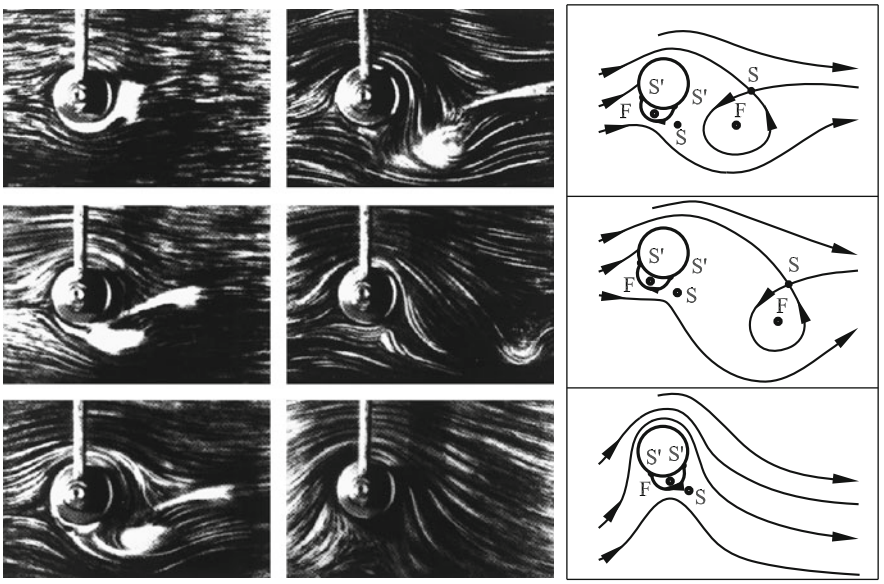
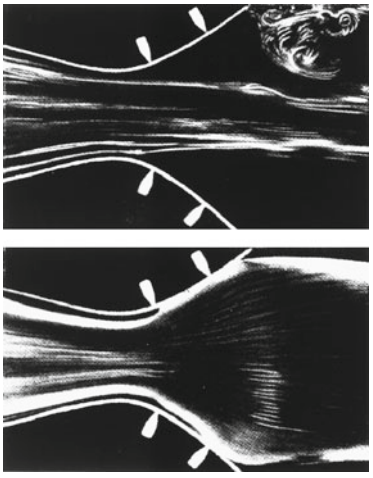


Abb. 3.26 Entwicklung der Strömung um einen rotierenden Zylinder



ohne Absaugung

mit Absaugung an den Wänden

Die weißen Marken zeigen die Lage der unsichtbaren Absaugeschlitze an

Abb. 3.27 Strömung in einem stark erweiterten Kanal

6.1.3 Tangentiales Einblasen

Die Ablösung der Grenzschicht kann auch durch *tangentiales Einblasen* in die Grenzschicht verhindert werden. Ein Wandstrahl, der durch einen Schlitz in der Kontur parallel zur Hauptströmungsrichtung in die Grenzschicht eingeblasen wird, kann der Grenzschicht genügend Impuls zuführen, um die Ablösung zu verhindern.

Abb. 3.28 Spaltflügel

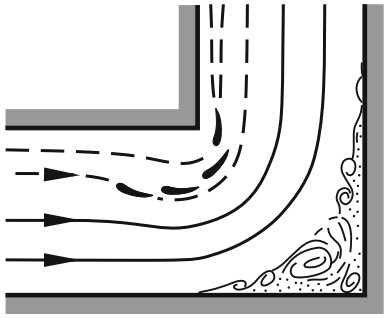


Abb. 3.29 Umlenkung durch Hilfsflügel

Nach diesem Prinzip kann z. B. der maximale Auftrieb eines Tragflügels erheblich gesteigert werden, allerdings auf Kosten eines größeren Widerstandes.

Die Anordnung des *Vorflügels* bei dem Tragflügel der Abb. 3.28 dient der Vermeidung der Ablösung. In diesem Fall ist der von der Grenzschicht des Tragflügels zu überwindende Druckanstieg kleiner als ohne Vorflügel. Damit wird die Ablösung bis zu wesentlich größeren Anstellwinkeln verhindert.

Eine gewisse Verwandtschaft zu dieser Anordnung weist die Anwendung von Hilfsflügeln zur Verbesserung von Strömungen in Rohrkrümmern auf. Ein Beispiel sind die in Windkanälen üblichen Umlenkschaufeln. Man verwendet auch bei anderen Strömungen Hilfsflügel, um scharfe Umlenkungen ohne große Verluste zu erzielen (Abb. 3.29). Dass keine Ablösung entsteht, lässt sich damit erklären, dass durch die Druckverteilung um die Hilfsflügel der Druck an der Wand, der die Hilfsflügel ihre Druckseite zukehren, größer ist als in der Strömung ohne Hilfsflügel. Deshalb ist der von der Grenzschicht zu überwindende Druckanstieg kleiner.

6.2 Anstrichbilder

Zur Visualisierung abgelöster Strömungen werden die Stromlinien in unmittelbarer Nähe der Wand mit *Anstrichbildern* sichtbar gemacht werden. Bei Wasserströmungen verwendet man hierfür einen Anstrich mit Ölfarbe, bei Luftströmungen eine Mischung von Farbstoffen und Petroleum. Lässt man die Strömung eine charakteristische Zeit (bei Wasser etwa 5 Minuten) auf den Anstrich der Wand einwirken, bildet sich ein Muster in der Richtung der mittleren Geschwindigkeit der wandnahen Reibungsschicht aus. Diese erlaubt Schlussfolgerungen über den

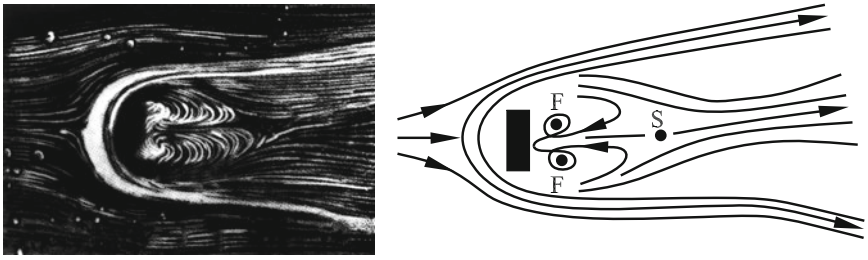


Abb. 3.30 Anstrichbild und Struktur einer durch eine senkrecht gestellte Platte gestörten Wandströmung (Hufeisenwirbel), *A. Hinderks*

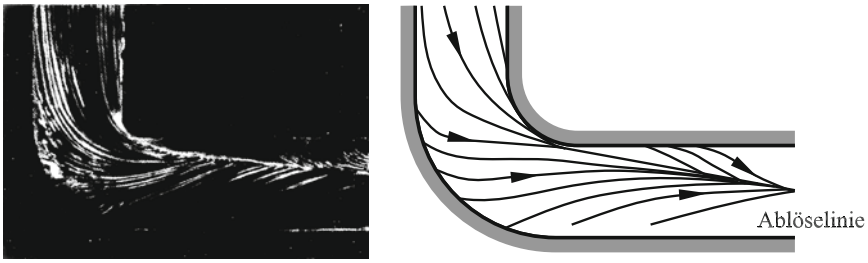


Abb. 3.31 Anstrichbild und Struktur der Strömung durch einen Krümmer, *A. Hinderks*

Strömungsverlauf, insbesondere über Ablösestellen. Solche Anstrichbilder zeigen nur die Stromlinien der wandnahen Schichten, nicht aber die der Kernströmung.

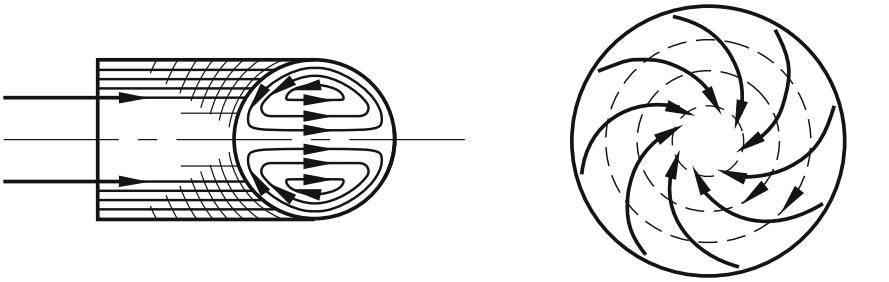
Die Abb. 3.30 und 3.31 zeigen zwei von *A. Hinderks* aufgenommene Anströmbilder von Wasserströmungen. Die Abb. 3.30 stellt die Strömung am Boden eines Gerinnes dar, in dem sich eine quer gestellte ebene Platte befindet. An dem breiten weißen Streifen, der sich um die Platte legt, erkennt man einen *Hufeisenwirbel*, der dem Überdruckgebiet vor der Platte ausweicht. Die beiden Fußpunkte der Wirbel (Foki) deuten auf eine hinter der Platte spiralförmig nach innen verlaufende Strömung hin, die zwei in die Kernströmung reichende Wirbel anzeigt.

Die Abb. 3.31 zeigt die Wandströmung in einem gekrümmten rechteckigen Kanal. Die Umlenkung der Wandschicht zur Innenseite der Krümmung ist deutlich zu erkennen. Die Konvergenz der Wandstromlinien stromab der Krümmung verdeutlicht die Ablösung an der Innenseite infolge des Druckanstiegs.

7 Sekundärströmungen

7.1 Krümmer

Betrachtet wird die Strömung eines Fluids entlang einer ebenen Wand. Sie wird durch einen seitlichen Druckgradienten parallel zur Wand abgelenkt. Die wandnahen Schichten werden wegen ihrer geringeren Geschwindigkeit stärker abgelenkt



im gekrümmten Rohr am Boden eines rotierenden Gefäßes

Abb. 3.32 Sekundärströmungen

als die äußere Strömung. Daraus resultiert eine *Sekundärströmung*, die der Hauptströmung im Rohr überlagert ist.

Die Gl. (9) des Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit ergibt bei reibungsfreier Strömung für das Verhältnis der Krümmungsradien $r_1/r_0 = w_1^2/w_0^2$. Tatsächlich ist die Strömung reibungsbehaftet. Die Reibung an der Wand in Verbindung mit dem seitlichen Druckgradienten verursacht eine Ablenkung der Grenzschicht in Richtung des geringeren Druckes. Die Ablenkung ist im laminaren Fall maximal 45° und im turbulenten Fall maximal 25° bis 30°. Strömt Flüssigkeit durch eine gekrümmte Rohrleitung, ist die Kernströmung bestrebt, wegen ihrer größeren Geschwindigkeit, möglichst geradeaus zu strömen. Die langsameren Randschichten werden dagegen stark abgelenkt und streben der Innenseite des Krümmerbogens zu. Damit überlagert sich der Hauptströmung (parallel zur Rohrmittellinie) in der gekrümmten Rohrstrecke eine dazu senkrechte Sekundärströmung. Diese verläuft in den Randschichten nach innen und im Kern nach außen. Im linken Bild von Abb. 3.32 ist die Sekundärströmung im Krümmer dargestellt. Sie hat zur Folge, dass der Ort maximaler Geschwindigkeit in Richtung des äußeren Krümmerbogens verlagert ist.

Auch bei natürlichen Flussläufen hat die Sekundärströmung in gekrümmten Verläufen die Wirkung, dass die Sinkstoffe (Sand, Kies), die mit der Bodenströmung wandern, von der äußeren Seite der Krümmung abtransportiert und auf der inneren Seite angehäuft werden. Dadurch wird das Flussbett außen vertieft und innen abgeflacht. Durch die größere Strömungsgeschwindigkeit am äußeren Ufer nimmt die Flusskrümmung immer stärker zu. Deshalb zeigen die natürlichen Flüsse überall dort, wo sich die Möglichkeit bietet, einen stark gekrümmten Lauf (*Mäanderbildung*).

7.2 Rotierende Strömung

Ein anderes Beispiel einer Sekundärströmung ist die rotierende Strömung, die am Boden eines runden Gefäßes entsteht (Abb. 3.32, rechts). Wegen der langsameren

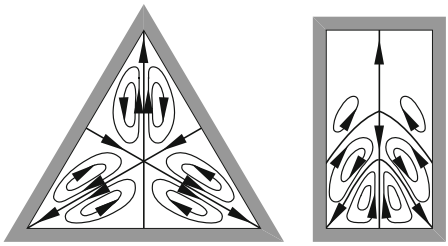


Abb. 3.33
Sekundärströmungen in Kanälen mit Dreieck- und Rechteckquerschnitt

Geschwindigkeit in der Bodenschicht ist dort die auf die Strömung wirkende *Zentrifugalkraft* geringer als diejenige in der Mitte des Gefäßes. Als Folge wird die Bodenströmung nach innen geführt. Eine alltägliche Beobachtung zeigt, dass kleine am Boden des Gefäßes befindliche Teilchen sich zur Mitte des Bodens bewegen und dort angehäuft werden. Dieses kann mit der diskutierten Bodenströmung erklärt werden.

7.3 Kanäle mit Rechteck- und Dreieckquerschnitt

Die Durchströmung gerader Kanäle nichtkreisförmigen Querschnitts verursacht ebenfalls Sekundärströmungen. Diese verursachen Querströmungen in den Ecken der Kanäle, die in Abb. 3.33 dargestellt sind. Das Entstehen der Sekundärströmungen lässt sich dadurch erklären, dass an Stellen größerer Wandschubspannung Flüssigkeit in das Kanalinnere befördert wird und dafür an den Stellen kleinerer Schubspannung, z. B. in den Ecken, Flüssigkeit aus dem Inneren zur Wand fließt. Damit wird an Stellen großer Wandschubspannung die Geschwindigkeit verringert und an Stellen geringer Wandschubspannung die Geschwindigkeit erhöht. Dieses führt zu einem Ausgleich der Wandschubspannung.

7.4 Schwingende Körper

Sekundärströmungen treten auch bei schwingenden Körpern auf. Ist $U(x)\cdot\cos(\omega\cdot t)$ die Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht, ergibt sich nach *H. Schlichting* 1932 eine Zusatzgeschwindigkeit u', die in Wandnähe außerhalb der Grenzschicht den Betrag

$$u' = \frac{3}{4}\cdot\frac{U}{\omega}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}$$

hat. Sie ist von den Stellen größerer Geschwindigkeit nach denen kleinerer Geschwindigkeit hin gerichtet. Abb. 3.34 zeigt eine Aufnahme der Wasserströmung um einen hin und her schwingenden Kreiszylinder. Die Kamera wird mit dem Zylinder mitbewegt. Die Metallflitter, die die Strömung sichtbar machen, erzeugen bei langer

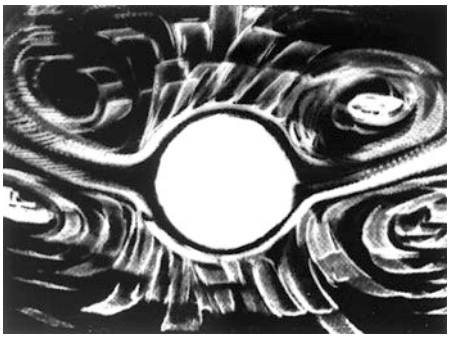


Abb. 3.34
Sekundärströmungen an einem schwingenden Körper, nach *H. Schlichting* 1932

Belichtungszeit breite Bänder. Die Strömung nähert sich von oben und unten dem Zylinder und entfernt sich nach beiden Seiten in der Schwingungsrichtung. Die Unsymmetrie des Bildes wird von einer schwachen Eigenbewegung des Wassers im Versuchsbehälter hervorgerufen.

8 Strömungen mit überwiegender Zähigkeit

Wie auch in Abschn. 2 diskutiert, können bei großer Zähigkeit und kleinen Reynolds-Zahlen die Trägheitskräfte gegenüber den Reibungskräften vernachlässigt werden. Diese *schleichenden Strömungen* zeichnen sich dadurch aus, dass die Strömungswiderstände proportional zur ersten Potenz der Geschwindigkeit sind. Die Grundwasserströmung und die Lagerschmierung werden in diesem und im folgenden Kapitel näher besprochen.

8.1 Grundwasserströmung

Ein Beispiel von Strömungen mit überwiegender Zähigkeit sind Grundwasserströmungen im Erdboden. Die Strömung zwischen den einzelnen Sandkörnern ist bei der schleichenden Bewegung in Analogie zum Hagen-Poiseuilleschen Gesetz der Rohrströmung proportional zu dem Druckgefälle und umgekehrt proportional zu der dynamischen Zähigkeit μ:

$$u = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad v = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \qquad w = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{3.56}$$

Die Durchlässigkeit k hat die Dimension einer Fläche und hängt nur vom porösen Medium ab. Mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ergibt sich

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \tag{3.57}$$

Für den Druck p gilt dieselbe Beziehung wie für das Geschwindigkeitspotential Φ der reibungsfreien Strömung. Die Grundwasserströmungen sind demnach Potentialströmungen wie sie in dem Abschn. 5 des Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit beschrieben werden. Dabei tritt als wesentlicher Unterschied auf, dass der Verlauf von p physikalisch eindeutig und stetig sein muss, während Φ an Trennflächen unstetig sein kann und bei Strömungen mit Zirkulation mehrdeutig ist.

Mit den Gl. (3.56) und (3.57) kann die Grundwasserströmung z. B. in der Umgebung eines Brunnens behandelt werden. Dabei wird auch die Wasserentnahme, d. h. neben der Geschwindigkeitsverteilung auch die Senkung des Grundwasserspiegels in der Nähe des Brunnens berücksichtigt.

Die vorausgesetzte Proportionalität zwischen der Geschwindigkeit und dem Druckgefälle gilt nur solange, wie die mit dem Korndurchmesser d gebildete Reynolds-Zahl klein genug bleibt. Die Grenze liegt bei $Re_d = u \cdot d/\nu \approx 10$.

8.2 Lagerschmierung

Ein weiteres Beispiel von Strömungen mit überwiegender Zähigkeit bilden die Strömungen in geschmierten Lagern und Führungen von Maschinen. Zwischen den gegeneinander bewegten Maschinenteilen (Zapfen und Lager bzw. Gleitschuh und Führung) ergeben sich Spaltströmungen dünner Ölschichten. Diese schützen die festen Körper vor gegenseitiger Berührung. Die Fähigkeit eines Zapfenlagers und einer Gleitschuhführung, große belastende Kräfte bei kleiner Reibung aufzunehmen, ist das Ergebnis des Strömungsvorgangs in der Ölschicht.

Als erstes Beispiel wird der Gleitschuh auf einer ebenen Führung betrachtet. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die gleitenden Flächen senkrecht zur Bewegungsrichtung weit ausgedehnt sind. Hieraus ergibt sich die Annahme einer ebenen Strömung. Es wird ein bezüglich des Gleitschuhs ruhendes Bezugssystem gewählt. Die Führung des Gleitschuhs soll sich mit der Geschwindigkeit v nach rechts bewegen. Damit kann eine stationäre Strömung vorausgesetzt werden.

Zunächst wird die Strömung durch einen Spalt der Höhe h mit einer ruhenden oberen Wand (Gleitschuh) und einer dazu parallelen, mit der Geschwindigkeit v bewegten unteren Wand (Führung) betrachtet. Die x-Achse zeigt in Bewegungsrichtung, die y-Achse steht senkrecht auf den Wänden. Der Druckanstieg $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ wird abgekürzt mit p' bezeichnet. p' ist dabei wegen der geringen Schichtdicke von h unabhängig. Die Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung ist u. Gemäß den Anmerkungen in Abschn. 1 gilt für die Spaltströmung bei Vernachlässigung der Trägheitskraft und Vernachlässigung von $\partial^2 u/\partial x^2$ gegenüber $\partial^2 u/\partial y^2$:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p'. \tag{3.58}$$

Durch Integration folgt daraus:

$$\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = p' \cdot y + \mathrm{C}_1,$$

$$\mu \cdot u = p' \cdot \frac{y^2}{2} + \mathrm{C}_1 \cdot y + \mathrm{C}_2. \tag{3.59}$$

Die Haftbedingung für $y = 0$, dass u gleich der Relativgeschwindigkeit U der Führung gegen den Gleitschuh ist, wird mit $\mathrm{C}_2 = \mu \cdot U$ erfüllt. Für $y = h$ muss $u = 0$ sein. Daraus ergibt sich für C_1:

$$\mathrm{C}_1 = -\left(\frac{\mu \cdot U}{h} + \frac{p' \cdot h}{2}\right).$$

Damit erhält man für die Geschwindigkeitsverteilung im Spalt:

$$u = \frac{p'}{2 \cdot \mu} \cdot (y^2 - h \cdot y) + \frac{U}{h} \cdot (h - y). \tag{3.60}$$

Die positive Reibungskraft pro Flächeneinheit ist an der unteren Wand:

$$\tau_0 = -\mu \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = -\mathrm{C}_1 = \frac{\mu \cdot U}{h} + \frac{p' \cdot h}{2} \tag{3.61}$$

und an der oberen Wand

$$\tau_h = -\mu \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h} = \frac{\mu \cdot U}{h} - \frac{p' \cdot h}{2}. \tag{3.62}$$

Bei der Diskussion dieser Ergebnisse ist zu beachten, dass einem Druckanstieg in Richtung der positiven x-Achse ein positives p' entspricht. Ein negatives p' bedeutet ein Druckgefälle.

Die Flüssigkeitsmenge pro Tiefeneinheit der Spaltströmung berechnet sich mit

$$Q = \int_0^h U \cdot \mathrm{d}y.$$

Damit ergibt sich:

$$Q = \frac{U \cdot h}{2} - \frac{p' \cdot h^3}{12 \cdot \mu}. \tag{3.63}$$

Nach dieser Vorbetrachtung soll nun der Lasten tragende Gleitschuh mit variierenden Druckgradienten p' in x-Richtung berechnet werden (siehe Abb. 3.35). Da v die konstante Geschwindigkeit des Gleitschuhes ist, erfordert dieses aufgrund der

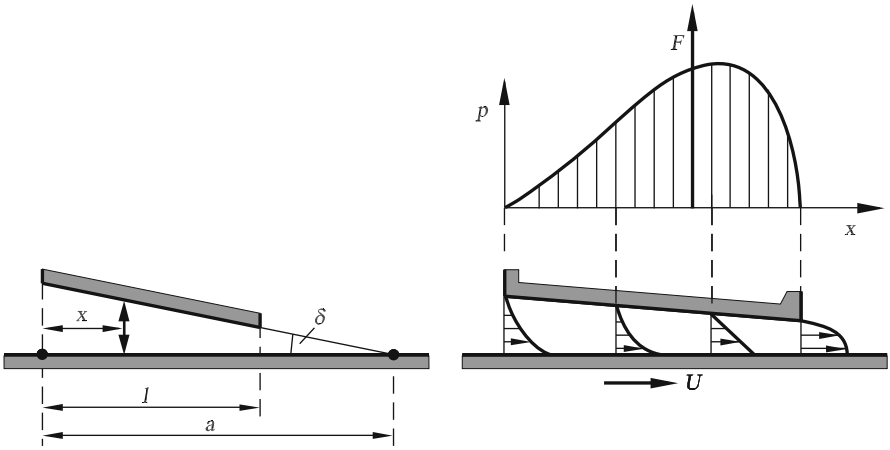


Abb. 3.35 Strömung im Spalt zwischen Gleitschuh und Führung

Kontinuität $Q = \text{konst.}$, dass sich die Spalthöhe mit x ändert. Ändert sich h in x-Richtung erhält man aus Gl. (3.62):

$$p' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 12 \cdot \mu \cdot \left(\frac{U}{2 \cdot h^2} - \frac{Q}{h^3} \right). \tag{3.64}$$

$p(x)$ ergibt sich durch Integration dieser Gleichung. Am Anfang und Ende des Gleitschuhes soll der Druck p gleich dem Umgebungsdruck p_0 sein. Daraus ergibt sich der noch unbekannte Wert für Q. Damit ist der Verlauf von p bekannt. Ist l die Länge des Spaltes, kann durch weitere Integration die resultierende Druckkraft der Strömung im Gleitschuh mit $\int_0^l p \cdot \mathrm{d}x$, sowie das Moment $\int_0^l p \cdot x \cdot \mathrm{d}x$ berechnet werden. Aus dem Verhältnis von Moment und Kraft folgt der Abstand des Angriffpunktes der Kraft von der Stelle $x = 0$. Die Reibungskraft wird unter Verwendung von Gl. (3.61) mit $\int_0^l \tau_0 \cdot \mathrm{d}x$ berechnet. Damit kann die resultierende Kraft auf den Gleitschuh nach Größe, Richtung und Lage für jeden gegebenen Verlauf der Spalthöhe h ermittelt werden. Häufig ist die resultierende Druckkraft gegeben, woraus eine Angabe über die Spalthöhe folgt.

Die Reibungskraft kann auch mit Hilfe von τ_h berechnet werden. Dabei muss man berücksichtigen, dass der Druck p, an der gegen die Bewegungsrichtung um $\tan\delta = \mathrm{d}h/\mathrm{d}x$ geneigten Fläche, eine Kraftkomponente in Bewegungsrichtung erzeugt. Da am Ende des Gleitschuhs der Druck p_0 herrscht, ist diese Kraftkomponente gleich $-\int_0^l (p - p_0) \cdot (\mathrm{d}h/\mathrm{d}x) \cdot \mathrm{d}x$. Durch partielle Integration ergibt sich mit $p = p_0$ für $x = 0$ und $x = l$ für die Kraftkomponente in $+\int_0^l p' \cdot h \cdot \mathrm{d}x$. Unter Berücksichtigung von Gl. (3.61) und (3.62) stimmt dieses mit der aus τ_0 berechneten Reibungskraft überein.

Der einfachste Fall einer veränderlichen Spalthöhe liegt vor, wenn der Gleitschuh und die Führungsfläche eben, aber um einen kleinen Winkel δ gegeneinander geneigt sind. Der Gleitschuh erstreckt sich von $x = 0$ bis $x = l$. Die Schnittkante

der beiden Ebenen im Abstand a von der Vorderkante des Gleitschuhs x gleich 0 liegt (Abb. 3.35). Die Höhe des Spaltes ist

$$h = (a - x) \cdot \delta.$$

Bei der Integration von Gl. (3.64) ergeben die beiden Integrale

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{h^3} = \frac{1}{2 \cdot \delta^3} \cdot \left(\frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{a^2} \right) = \frac{2 \cdot a \cdot x - x^2}{2 \cdot \delta^3 \cdot a^2 \cdot (a-x)^2}$$

und

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{h^2} = \frac{1}{\delta^2} \cdot \left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} \right) = \frac{x}{\delta^2 \cdot a \cdot (a-x)}.$$

Daraus erhält man für die Druckverteilung:

$$p = p_0 + \frac{6 \cdot \mu \cdot x}{\delta^2 \cdot a \cdot (a-x)} \cdot \left(v - \frac{Q \cdot (2 \cdot a - x)}{\delta \cdot a \cdot (a-x)} \right). \tag{3.65}$$

Nach Gl. (3.65) ist $p = p_0$ an der Stelle $x = 0$. Damit für $x = l$ auch $p = p_0$ wird, muss die Klammer in Gl. (3.65) verschwinden:

$$Q = \frac{U \cdot \delta \cdot a \cdot (a-l)}{2 \cdot a - l}. \tag{3.66}$$

Ersetzt man $\delta \cdot (a - x)$ wieder durch h ergibt sich:

$$p = p_0 + \frac{6 \cdot \mu \cdot U \cdot x \cdot (l-x)}{h^2 \cdot (2 \cdot a - l)}. \tag{3.67}$$

Zur Abschätzung des mittleren Drucks wird der Druck p_1 in der Mitte des Gleitschuhes ($x = l/2$) herangezogen. Dieser Druck entspricht nicht dem Druckmaximum, da h mit x variiert. Er gibt aber, wenn die Veränderung in x-Richtung nicht zu groß ist, die Größenordnung des Maximums richtig wieder. Nach Gl. (3.67) erhält man mit $h = \delta \cdot (a - l/2) = h_\mathrm{m}$:

$$p_1 - p_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu \cdot U \cdot l^2}{h_\mathrm{m}^2 \cdot (2 \cdot a - l)}.$$

Wird die Druckverteilung parabelförmig angenähert, ist der mittlere Überdruck p_m näherungsweise $(2/3) \cdot (p_1 - p_0)$, d. h.

$$p_\mathrm{m} = \frac{\mu \cdot U \cdot l^2}{h_\mathrm{m}^2 \cdot (2 \cdot a - l)}. \tag{3.68}$$

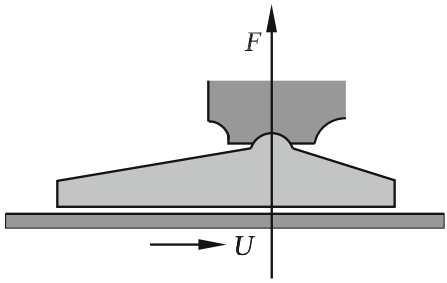


Abb. 3.36 Gleitschuh, *A. G. M. Michell* 1905

Diese Gleichung zeigt, dass auch bei verhältnismäßig kleinem μ durch sehr kleine mittlere Schichtdicken h_m sehr große Drücke auftreten können. Das Druckmaximum liegt nach Gl. (3.67) wegen der Abnahme von h in Strömungsrichtung hinter der Mitte. Deshalb liegt auch der Angriffspunkt der resultierenden Kraft hinter der Mitte. In Abb. 3.35 ist eine solche Verteilung entsprechend der Gl. (3.67) dargestellt. Darunter ist die zugehörige Geschwindigkeitsverteilung im Spalt skizziert, aus deren unterschiedlicher Krümmung die Druckunterschiede deutlich sichtbar werden.

Die Druckverteilung und die Lage der Druckkraft hängen von dem Verhältnis l/a ab. Deshalb hatte *A. G. M. Michell* 1905 die Idee den Gleitschuhen eine gelenkige Befestigung etwas hinter der Mitte der Gleitfläche (Abb. 3.36) zu geben. Damit stellt sich automatisch eine bestimmte Schräglage (genauer ein bestimmtes a) ein. Bei stärkerer Neigung liegt der Druckmittelpunkt weiter hinten und bei schwächerer Neigung weiter vorn. Dadurch ist die richtige Lage besonders stabil. *A. G. M. Mitchell* 1905 erreichte dadurch ein unter allen Belastungen gleichmäßig gutes Arbeiten des Gleitschuhs.

Tatsächlich strömt bei solchen Gleitschuhen von der an der Eintrittskante erfassten Ölmenge ein gewisser Anteil an den Seitenkanten aus. Dadurch erfährt der Druck im Innern eine Abschwächung. Qualitativ kann der Vorgang jedoch wie zuvor diskutiert beschrieben werden.

Die Schubspannungen am Gleitschuh sind infolge der Druckverteilung am Eintritt kleiner und am Austritt größer als die einfache Spaltreibung. Auf der Gleitbahn verhalten sie sich umgekehrt. Die entsprechenden Werte lassen sich aus den Gl. (3.61), (3.62), (3.64) und (3.66) ermitteln.

Im Folgenden wird die Reibungskraft abgeschätzt. Diese Abschätzung ist umso genauer, je größer das Verhältnis a/l gewählt wird. Die Verteilung der Schubspannung wird näherungsweise trapezförmig angenommen. Die mittlere Reibungskraft pro Flächeneinheit kann deshalb gleich der Reibungskraft in der Mitte gesetzt werden. Dort ist der Betrag von p' sehr klein und es ergibt sich mit Gl. (3.61):

$$\tau_\mathrm{m} \approx \frac{\mu \cdot U}{h_\mathrm{m}}.$$

Mit Gl. (3.68) wird die Schmierschichtdicke h_m eliminiert:

$$h_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{\mu \cdot U \cdot l^2}{p_\mathrm{m} \cdot (2 \cdot a - l)}}. \tag{3.69}$$

Damit erhält man

$$\tau_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{\mu \cdot U \cdot p_{\mathrm{m}}}{l}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot a - l}{l}}. \tag{3.70}$$

Der Ausdruck $\mu \cdot U/l$ stellt die sehr kleine Schubspannung dar, die bei einer Ölschicht der Dicke l auftritt. Der Größenordnung nach ist die tatsächliche Schubspannung das geometrische Mittel aus dieser kleinen Schubspannung und der mittleren Belastung des Gleitschuhs. Der Gleitwiderstand verändert sich bei festen Werten von l und a proportional zu den Wurzeln aus der Zähigkeit, der Belastung und der Geschwindigkeit. Diese Gesetzmäßigkeit gilt nicht nur für die betrachteten Mittelwerte, sondern ergibt sich auch bei einer genauen Berechnung.

Der *Reibungskoeffizient* ist durch

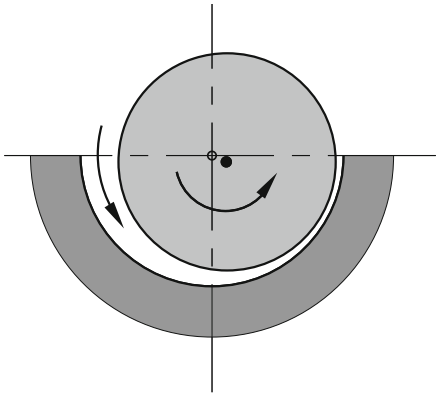
$$c_{\mathrm{f,g}} = \frac{\tau_{\mathrm{m}}}{p_{\mathrm{m}}}$$

gegeben. Er ist bei festen Werten von l und a, d. h. gegebenen Abmessungen des Gleitschuhs entsprechend der Abb. 3.35, proportional $\sqrt{\mu \cdot U/(p_{\mathrm{m}} \cdot l)}$.

Bei einem Zapfen in einem Lager sind die Verhältnisse komplizierter. Es tritt ein Lagerspiel auf. Durch Verschiebung des Lagermittelpunktes in waagerechter und senkrechter Richtung kommen zwei weitere Unbekannte hinzu. Im Wesentlichen wird auch hier ein keilförmiges Ölpolster gebildet, durch das das Öl von dem rotierenden Zapfen von der weiten Seite zur engen transportiert wird (Abb. 3.37). Die Berechnung vereinfacht sich mit der Annahme, dass die Zapfenexzentrizität e klein gegen das Lagerspiel s ist. Dieses gilt für in Öl schnell laufende und mäßig belastete Zapfen in vollständig umschlossenen Lagern. In diesem Fall ist

$$h = s + e \cdot \cos(\varphi + \alpha),$$

Abb. 3.37 Zapfen im Lager



mit dem Zentriwinkel φ und dem Winkel α zwischen der Kraftrichtung und der Richtung der Verbindungslinie von Zapfenmitte und Lagermitte. Der Winkel α beträgt ca. 90°. Der Punkt des kleinsten Abstandes zwischen Zapfen und Lager liegt dabei entgegen der Richtung des Zapfendrucks in der Drehrichtung voraus.

Die analog zum Gleitschuh durchgeführte Berechnung führt zu dem Ergebnis, dass e/s proportional der dimensionslosen Größe $L = (p_\mathrm{m} \cdot s^2/(\mu \cdot v \cdot r)$ ist. Dabei ist p_m der mittlere Lagerdruck, r der Zapfenradius und v die Umfangsgeschwindigkeit. Die Lagerzahl L lässt sich auch aus der Gl. (3.68) für den Gleitschuh ableiten:

$$\frac{l}{2 \cdot a - l} = \frac{p_\mathrm{m} \cdot h_\mathrm{m}^2}{\mu \cdot U \cdot l}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung entspricht e/s. Rechts tritt h_m statt s und l statt r auf.

Der Einfluss variierender Lagerbelastung, verschiedenen Lagerspiels unterschiedlicher Ölzähigkeit und Umfangsgeschwindigkeit ist in der Lagerzahl berücksichtigt. Der Reibungskoeffizient $c_\mathrm{f,L}$ eines Lagers (Umfangskraft zu Lagerlast) lässt sich ganz analog demjenigen für den Gleitschuh ausdrücken. Es gilt $c_\mathrm{f,g} \sim \sqrt{\mu \cdot U/(p_\mathrm{m} \cdot r)}$. *O. Walger* 1932 fand experimentell den Wert 2.4.

Bisher wurde davon ausgegangen, dass im Lager ein vollständig bedeckender Ölfilm vorhanden ist, der jede metallische Berührung verhindert. Aufgrund der Fertigungstoleranzen mit der sich Lager und Zapfen bzw. Gleitschuh und Führung herstellen lassen, kommt es bei zu kleiner Spaltweite h zu einer metallischen Berührung. Ebenso muss bei der Verwendung der abgeleiteten Gleichungen ausgeschlossen werden, dass im Ölfilm negative Drücke auftreten. In diesem Fall reißt der Ölfilm ab. Das Abreißen des Ölfilms ist bei schwerer belasteten Lagern die Regel. Dadurch ergeben sich ähnliche Verhältnisse wie bei einem den Zapfen nur teilweise umschliessenden Lager. Auf die erweiterte Theorie derartiger Lager wird jedoch nicht näher eingegangen.

Bei hohen Belastungen treten durch die Erwärmung des Öls erhebliche Abweichungen gegenüber den hergeleiteten Gleichungen auf. *G. Vogelpohl* 1938 hat gezeigt, dass diejenigen Öle, deren Zähigkeit mit steigender Temperatur weniger stark abnimmt sich für hochbelastete Lager besser eignen. Von ihm stammt auch der Hinweis, dass bei so genannter Mischreibung der größte Teil der Lagerlast hydrodynamisch aufgenommen wird, und zwar durch das zwischen den beiderseitigen Oberflächenrauhigkeiten enthaltene Öl. Nur ein sehr geringer Teil der Last wird durch die sich mechanisch berührenden Spitzen der Rauhigkeiten aufgenommen.

9 Strömungen durch Rohre und Kanäle

Der Mittelwert der Wandschubspannung τ_w für die turbulente Kanalströmung kann aus $\lambda' \cdot \rho \cdot w^2/2$ berechnet werden. Dabei ist λ' ein von der Wandrauhigkeit abhängiger Verlustkoeffizient und w die mittlere Geschwindigkeit. Der Druckabfall

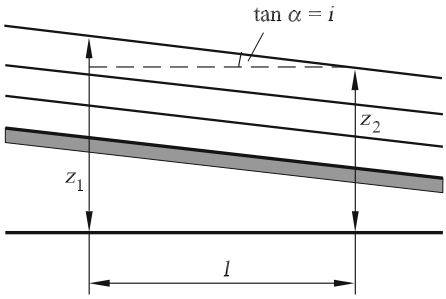


Abb. 3.38 Strömung in einem Gerinne

in einem Rohr oder Kanal der Länge l muss den Schubspannungen an der Wand das Gleichgewicht halten. Mit der Querschnittsfläche A und dem benetzten Querschnittsumfang U gilt:

$$(p_1 - p_2) \cdot A = \tau_w \cdot l \cdot U = \lambda' \cdot \rho \cdot \frac{w^2}{2} \cdot l \cdot U, \tag{3.71}$$

d. h.

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \lambda' \cdot \frac{U}{A} \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2}. \tag{3.72}$$

Bei einem offenen Gerinne (Fluss oder Kanal) gehört der freie Spiegel nicht zu dem benetzten Umfang. A/U wird als hydraulischer Radius r_h bezeichnet. Bei einem unter der Erdschwere fließenden Gewässer (z. B. einem Fluss) wird das Spiegelgefälle $i = (z_1 - z_2)/l$ angegeben (Abb. 3.38). Dieses hängt mit dem Druckgefälle längs einer waagerechten Linie durch die Beziehung $p_1 - p_2 = g \cdot \rho \cdot (z_1 - z_2) = g \cdot \rho \cdot l \cdot i$ zusammen. Damit ergibt sich aus Gl. (3.71):

$$\tau_w = g \cdot \rho \cdot r_h \cdot i \tag{3.73}$$

und aus Gl. (3.72):

$$i = \frac{1}{g \cdot \rho} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\lambda'}{r_h} \cdot \frac{w^2}{2 \cdot g}. \tag{3.74}$$

Hieraus erhält man

$$w = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{\lambda'} \cdot r_h \cdot i}.$$

Für Flüsse und Kanäle wird diese Gleichung in der Form

$$w = C \cdot \sqrt{r_h \cdot i} \tag{3.75}$$

geschrieben und als *Chézysche Gleichung* bezeichnet. Der Wert von C, der eine Funktion des hydraulischen Radius und der Wandrauhigkeit ist, schwankt bei

Wassertiefen von 0.5 m bis 3 m von 80 $m^{(1/2)} \cdot s^{-1}$ bei Kanälen aus glattem Holz oder glatt geputztem Mauerwerk bis zu $30 - 50\ m^{(1/2)} \cdot s^{-1}$ bei Erdwänden und $24 - 49\ m^{(1/2)} \cdot s^{-1}$ bei Geröllen.

9.1 Rohre mit Kreisquerschnitt

Bei Rohren mit dem Radius R gilt für den hydraulischen Radius r_h:

$$r_h = \frac{A}{U} = \frac{\pi \cdot R^2}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{R}{2} = \frac{d}{4}\,. \tag{3.76}$$

Führt man in Gl. (3.72) $4/d$ für U/A und λ für $4 \cdot \lambda'$ ein, ergibt sich:

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2}\,. \tag{3.77}$$

λ wird als Verlustbeiwert bezeichnet. Der Verlustbeiwert für laminare und turbulente Rohrströmungen ist in Abb. 3.39 als Funktion der Reynolds-Zahl Re_d dargestellt. Für die *laminare Rohrströmung* gilt das Hagen-Poiseuillesche Gesetz Gl. (3.4). Mit der Durchflussmenge Q ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit $w = Q/(\pi \cdot R^2)$. Daraus folgt für den Druckverlust im Rohr:

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{8 \cdot \mu \cdot w}{R^2} = 32 \cdot \mu \cdot \frac{w}{d^2}\,. \tag{3.78}$$

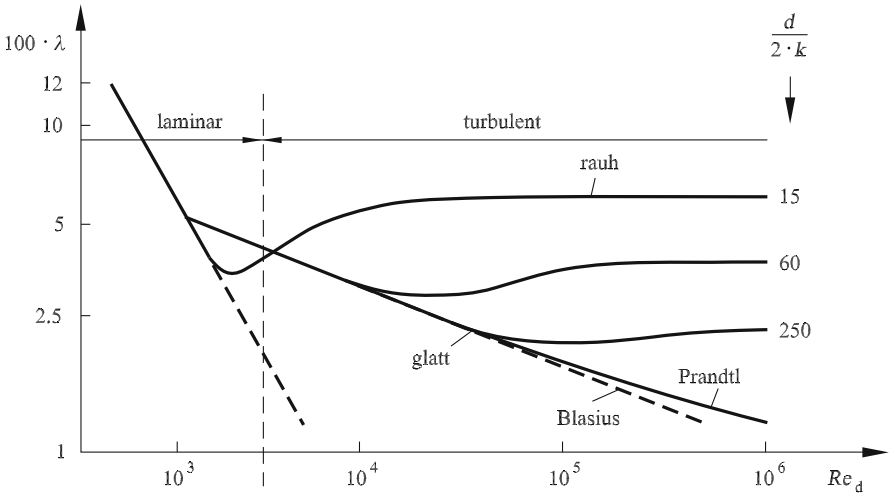


Abb. 3.39 *Nikuradse-Diagramm*: Verlustbeiwert λ für glatte und rauhe Rohre

Der Vergleich mit Gl. (3.77) ergibt für den Verlustbeiwert λ:

$$\lambda = \frac{64 \cdot \mu}{\rho \cdot w \cdot d} = \frac{64}{Re_d} . \tag{3.79}$$

Über das Verhalten *turbulenter Strömungen* in *glatten Rohren* liegen zahlreiche experimentelle Ergebnisse vor. Bis zu einer Reynolds-Zahl Re_d von ungefähr 80000 gilt das *Blasius-Gesetz*:

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{\frac{1}{4}}} . \tag{3.80}$$

Die Stabilitätstheorie für die Hagen-Poiseuillesche Rohrströmung (siehe Abschn. 4) zeigt, dass sich der laminar-turbulente Übergang bei der kritischen Reynolds-Zahl $Re_{krit} = 2300$ vollzieht, so dass in Abb. 3.39, Gl. (3.79) nach einem Übergangsbereich in Gl. (3.80) übergeht.

Eine implizite Gleichung für den Verlustbeiwert turbulent durchströmter, glatter Rohre hat *Prandtl* 1932 für Reynolds-Zahlen kleiner als 10^6 angegeben:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg(Re_d \cdot \sqrt{\lambda}) - 0.8 . \tag{3.81}$$

Dabei wird von den Gleichungen in Abschn. 5 unter Berücksichtigung des logarithmischen Wandgesetzes Gl. (3.42) ausgegangen.

Die Auswertung experimenteller Ergebnisse ergibt für *rauhe Rohre* bei ausgebildeter Strömung unter Verwendung von Gl. (3.43) die folgende Erweiterung der Gl. (3.81):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.74 - 2 \cdot \lg\left(\frac{18.7}{Re_d \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{2 \cdot k}{d}\right) . \tag{3.82}$$

Dabei ist die Rauhigkeit k der räumliche Mittelwert der Oberflächenrauhigkeit der Rohrwände. Für sehr große Reynolds-Zahlen wird der Verlustbeiwert unabhängig von der Reynolds-Zahl. Die viskose Unterschicht der turbulenten Rohrgrenzschicht überdeckt dann die Rauhigkeiten der Rohroberfläche.

Die ersten Messungen der Verluste in rauhen Rohren wurden von *J. Nikuradse* 1933 durchgeführt. Dabei wurden die Rohre auf der Innenseite mit ausgesiebtem Sand unterschiedlicher Korngröße beklebt. Diese von *J. Nikuradse* 1933 durchgeführten Experimente gaben der Abb. 3.39 den Namen.

9.2 Einlaufströmung

Die Gleichungen (3.78) bis (3.82) sowie die Abb. 3.39 gelten für *ausgebildete Rohrströmungen*. Dies gilt ungefähr ab einer Entfernung von etwa 60 Rohrdurch-

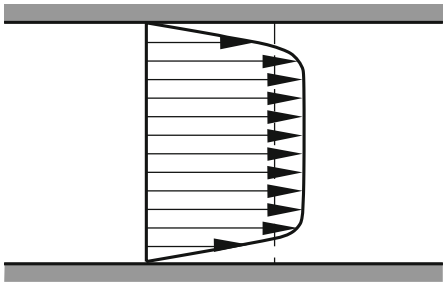


Abb. 3.40
Geschwindigkeitsverteilung der Einlaufströmung

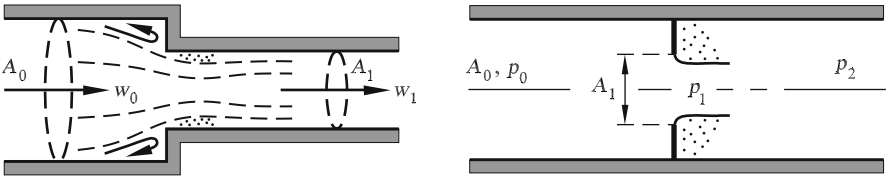


Abb. 3.41 Verengungen in einem Rohr

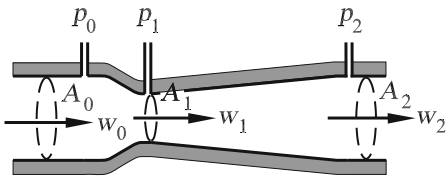
messern d vom *Einlauf* eines Rohres. Im Eintrittsquerschnitt des Rohres ist die Geschwindigkeit nahezu gleichförmig verteilt. Die durch die Reibung verursachte Verzögerung setzt von der Rohrwand her ein. In der zunächst laminaren Strömung bildet sich eine stromab wachsende Schicht verzögerter Flüssigkeit aus (Abb. 3.40). Die Geschwindigkeit muss dabei in der Kernströmung zunehmen, so dass durch jeden Querschnitt dieselbe Masse fließt. Dieser Beschleunigung der Kernströmung in der Einlaufstrecke des Rohres entspricht eine Druckabnahme längs der Rohrachse, die sich mit der Bernoulli-Gleichung berechnen lässt. Diese Druckabnahme ist größer als diejenige der Hagen-Poiseuille-Strömung. Weiter stromab erfasst die Reibungszone den gesamten Rohrquerschnitt. Es entsteht die bekannte ausgebildete Hagen-Poiseuille-Strömung. Dieses geschieht nach Beobachtungen von *L. Schiller* 1922 nach einer Lauflänge $l = 0.03 \cdot d \cdot Re_d$. Beim Überschreiten der kritischen Reynolds-Zahl $Re_{krit} = 2300$ setzt der laminar-turbulente Übergang ein und es bildet sich die turbulente ausgebildete Rohrströmung aus.

Ist die Strömung am Eintrittsquerschnitt des Rohres bereits turbulent, ist die Einlaufstrecke l bis zur Entstehung der ausgebildeten Rohrströmung wesentlich kürzer.

9.3 Rohrströmung mit Querschnittsänderung

Bei plötzlichen Verengungen in einem Rohr (Abb. 3.41) entstehen neben dem reibungsfreien Druckabfall reibungsbehaftete Druckverluste. Eine scharfkantige Verengung bzw. eine Drosselscheibe verursachen eine Kontraktion der Strömung. Die Kontraktionsziffer kann nach *J. L. Weisbach* 1845 über $\alpha = 0,63 + 0,37 \cdot (A_1/A_0)^3$ berechnet werden.

Abb. 3.42 Venturi-Düse



Folgt der Verengung eine plötzliche Erweiterung (Drosselscheibe), ergibt sich der entsprechende Druckverlust zu

$$p_0 - p_2 = \frac{\rho \cdot w_0^2}{2} \cdot \left(\frac{A_0}{\alpha \cdot A_1} - 1 \right)^2 .$$

Drosselscheiben der Abb. 3.41 oder *Venturi-Düsen* der Abb. 3.42 werden zur Volumenstrommessung verwendet. Der mit der Bernoulli-Gleichung berechnete reibungsfreie Druckverlust beträgt bei der Drosselscheibe

$$p_0 - p_1 = \frac{\rho \cdot w_0^2}{2} \cdot \left[\left(\frac{A_0}{\alpha \cdot A_1} \right)^2 - 1 \right] .$$

Wird der Differenzdruck $p_0 - p_1$ durch eine Anbohrung vor und hinter der Verengung gemessen, so lässt sich bei bekannter Kontraktionsziffer α, w_0 und damit der Volumenstrom $A_0 \cdot w_0$ berechnen. Experimentell ergibt sich für $A_1/A_0 < 0.7$ die Gleichung:

$$\alpha = 0.598 + 0.4 \cdot \left(\frac{A_1}{A_0} \right)^2 .$$

Bei der allmählichen Erweiterung in einer Venturi-Düse der Abb. 3.42 sind die Druckrückgewinne wesentlich größer als bei der plötzlichen Erweiterung der Lochblende. Der Druckverlust in der Düse kann mit

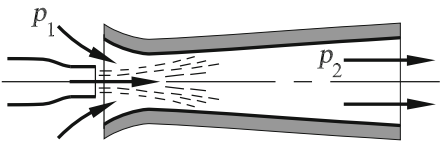
$$p_0 - p_2 = \xi \cdot \frac{\rho}{2} \cdot (w_1^2 - w_2^2)$$

beschrieben werden. ξ ist eine empirische, für jede Düse zu ermittelnde Widerstandsziffer. Die Werte für Venturi-Düsen liegen zwischen 0,15 und 0,2. Die Kontraktionsziffer α kann bei Vermeidung einer Strömungsablösung gleich 1 gesetzt werden.

Die Querschnittserweiterung in *Diffusoren* dient dem Druckrückgewinn. Unter der Voraussetzung reibungsfreier Strömung ist die Geschwindigkeit in allen Querschnitten konstant. Unter dem Einfluss der Reibung wird die Strömung in Wandnähe verzögert. Ist der Öffnungswinkel des Diffusors zu groß, kommt es zur Strömungsablösung.

Die Drucksteigerung $p_2 - p_1$ in einem plötzlich oder allmählich erweiterten Rohr wird in *Strahlpumpen* der Abb. 3.43 dazu verwendet, Flüssigkeiten anzusaugen. Um

Abb. 3.43 Strahlpumpe



bei einer Wasserstrahlluftpumpe einen Druckunterschied von 1 bar zu erreichen, muss die Strahlgeschwindigkeit w_1 etwa 20 m/s betragen. Ein weiteres Beispiel ist der *Bunsen-Brenner*, bei dem der aus einer Düse austretende Gasstrahl Luft ansaugt und sich mit ihr durchmischt.

10 Widerstand von Körpern in Flüssigkeiten

10.1 Newtonsches Widerstandsgesetz

Bereits *I. Newton* hat für den Widerstand eines in einer Flüssigkeit bewegten Körpers den Schluss gezogen, dass dieser proportional der Fläche A des Körpers, der Dichte ρ der Flüssigkeit und dem Quadrat der Geschwindigkeit v sein muss. Dieses Ergebnis lässt sich durch eine einfache Betrachtung nachvollziehen. Der Körper muss pro Sekunde die Flüssigkeitsmasse $M = \rho \cdot A \cdot v$ verdrängen. Dabei erhält jedes Massenelement eine Geschwindigkeit, die der Körpergeschwindigkeit proportional gesetzt ist. Der Widerstand ist damit proportional dem pro Sekunde erteilten Impuls

$$M \cdot v = \rho \cdot A \cdot v^2 \,.$$

Dabei geht die Newtonsche Theorie von der Voraussetzung aus, dass sich der Widerstand eines Körpers in einer Flüssigkeit nach den Gesetzen des Stoßes fester Körper behandeln lässt. Newton stellte sich das Medium aus ruhenden Masseteilchen vor, die durch den bewegten Körper weggestoßen werden. Der daraus resultierende Widerstand berücksichtigt jedoch die hydrodynamische Umströmung und die Nachlaufströmung des Körpers nicht.

Dieses soll am Beispiel der *Umströmung eines Diëders* (Abb. 3.44) erläutert werden. Die Umströmung eines Diëders muss anders verlaufen, als die Umströmung von zwei entfernt stehenden in dieselbe Richtung geneigten Platten. Im letzteren Fall kann die Flüssigkeit zwischen den beiden Platten durchströmen, beim Diëder dagegen nicht. Der Widerstand des umströmten Diëders ist nach Experimenten von *G. Eiffel* 1907 etwa 60 % des Widerstands der freistehenden Platten. Nach der Newtonschen Theorie müssten dagegen beide Objekte den gleichen Widerstand haben.

Ein anderes Beispiel ist die Umströmung einer Kreisscheibe und eines Kreiszylinders der Länge eines Durchmessers, bzw. des zweifachen Durchmessers. Es werden Widerstandsbeiwerte von 1.12, 0.91 und 0.85 gemessen. Dass der längere Zylinder weniger Widerstand hat als der kürzere, kann dadurch erklärt werden, dass die Strömung an der Mantelfläche des Zylinders sich wieder anlegt und das

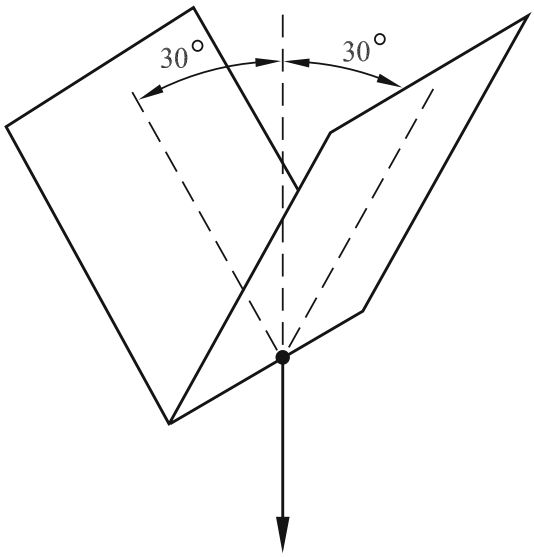


Abb. 3.44 Umströmung eines Diëders

Nachlaufgebiet kleiner wird. Damit ist die Saugwirkung der Nachlaufströmung auf die rückwärtige Fläche geringer als in den beiden anderen Fällen.

10.2 Druck- und Reibungswiderstand

Der hydrodynamische Widerstand setzt sich aus einem Druck- und einem Reibungsanteil zusammen. Damit gil für die zugehörigen Widerstandsbeiwerte:

$$c_{\mathrm{w}} = c_{\mathrm{d}} + c_{\mathrm{f}}\,. \tag{3.83}$$

Dabei ist der Gesamtwiderstandsbeiwert c_{w} durch

$$c_{\mathrm{w}} = \frac{W}{\frac{\rho}{2}\cdot v^2\cdot A}$$

definiert, mit der Widerstandskraft W, dem dynamischen Druck $(\rho/2)\cdot v^2$ und der Querschnittsfläche A. Für den Druckwiderstandsbeiwert c_{d} und den globalen Reibungswiderstandsbeiwert c_{f} ergibt sich:

$$c_{\mathrm{d}} = \frac{W_d}{\frac{\rho}{2}\cdot v^2\cdot A}\,, \qquad c_{\mathrm{f}} = \frac{W_f}{\frac{\rho}{2}\cdot v^2\cdot A}\,.$$

W_d ist die Druckkraft und W_f die Kraft durch die Reibung.

Der Widerstandsbeiwert c_{w} ist im Allgemeinen eine Funktion der Reynolds-Zahl $Re_l = v\cdot l/\nu$:

$$c_{\mathrm{w}} = \mathrm{f}(Re_l)\,. \tag{3.84}$$

Kann die Reibung vernachlässigt werden, wie zum Beispiel bei der quer angeströmten Platte, besteht für Reynolds-Zahlen größer als 10^3 keine Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl und der c_w-Wert ist konstant. Für die kreisförmige Platte beträgt der c_w-Wert 1.12. Für die längs angeströmte Platte dominiert dagegen der Reibungswiderstandsbeiwert c_f. Der Druckwiderstandsbeiwert c_d ist vernachlässigbar klein.

Der Gesamtwiderstand lässt sich immer in einen Druck- und Reibungsanteil zerlegen. Geht man von der Vorstellung aus, dass zwar der Druckwiderstand stark von der Form des Körpers abhängt, dass aber der Reibungswiderstand im Wesentlichen von der Größe der Körperoberfläche abhängt und nicht von der Form der Oberfläche, kann man den Widerstand auch in einen Formwiderstand und einen Oberflächenwiderstand zerlegen. Genau genommen hängt jedoch der Reibungswiderstand auch von der Form der Oberfläche ab, so dass diese Aufspaltung nur näherungsweise gilt.

Bei Körpern die sich an der freien Oberfläche einer Flüssigkeit bewegen, kommt eine besondere Art des Druckwiderstandes, der *Wellenwiderstand* hinzu. Dieser wird durch das vom Körper erzeugte Wellensystem verursacht. Da die Wellenbewegung unter dem Einfluss der Erdschwere steht (die Oberflächenkräfte werden nicht berücksichtigt), ist die charakteristische dimensionslose Kennzahl die *Froude-Zahl*. Sie wird mit der Geschwindigkeit v, der Länge l und der Erdschwere g gebildet:

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot l}} . \tag{3.85}$$

Das zu erwartende Wellensystem wird z. B. bei zwei verschieden großen Ausführungen einer Schiffsform (z. B. Modell und Schiff) geometrisch ähnlich ausfallen, wenn die Froude-Zahl denselben Wert annimmt.

Der Wellenwiderstand variiert bei kleinen Änderungen der Schiffsform und der Geschwindigkeit. Bei einer Verlängerung des Schiffskörpers kann er sowohl wachsen als auch abnehmen, je nachdem wie die Heck- und Bugwellen untereinander interferieren. Der Widerstand wird größer, wenn das Heck in einem Wellental des Bugwellensystems liegt, und kleiner, wenn es mit einem Berg des Bugsystems zusammenfällt.

10.3 Reibungswiderstand der Plattenumströmung

Der Reibungswiderstand der längs angeströmten Platte wird auf die gesamte Körperoberfläche A bezogen. Die Widerstandskraft ist:

$$W_f = \int_A \tau_w \cdot \sin(x, \boldsymbol{n}) \cdot \mathrm{d}A = c_f \cdot A \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} . \tag{3.86}$$

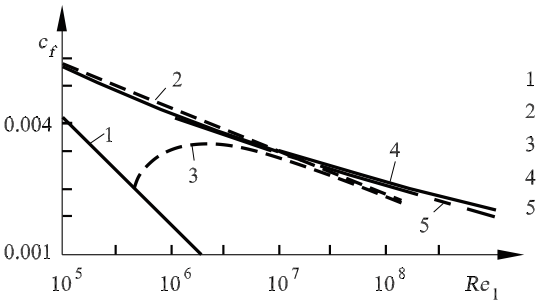


Abb. 3.45 Reibungswiderstand c_f von glatten Platten in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl Re_l

Dabei ist x die Anströmrichtung, $\boldsymbol{n}$ die örtliche Normale der Oberfläche und c_f der Reibungswiderstandsbeiwert. Bei einer längs angeströmten rechteckigen Platte der Breite b und der Länge l ist $A = 2 \cdot b \cdot l$.

Der Reibungswiderstand ist bei der laminaren *Plattengrenzschichtströmung* proportional $\sqrt{l}$. Bei turbulenter und glatter Oberfläche ist er für genügend große Reynolds-Zahlen etwa proportional $l^{0.8}$ bis $l^{0.85}$, bei rauher Oberfläche ist er proportional $l^{0.65}$ bis $l^{0.75}$. Führt man die mit l gebildete Reynolds-Zahl $Re_l = v \cdot l/\nu$ ein, so ergeben sich für glatte Oberflächen die in Abb. 3.45 dargestellten Verläufe. c_f und Re_l sind logarithmisch aufgetragen. Die ausgezogenen und gestrichelten Linien bedeuten dabei verschiedene Gleichungen für die Berechnung des Reibungswiderstandsbeiwertes.

Bei laminarer Strömung gilt die Kurve 1:

$$c_\mathrm{f} = \frac{1,33}{\sqrt{Re_l}} \,. \tag{3.87}$$

Ist die Plattengrenzschichtströmung von Beginn an turbulent, gilt die Kurve 2:

$$c_\mathrm{f} = \frac{0,074}{Re_l^{0.2}} \,. \tag{3.88}$$

Beginnt die Grenzschichtströmung laminar und geht bei der kritischen Reynolds-Zahl $5 \cdot 10^5$ in die turbulente Grenzschicht über, gilt die Kurve 3:

$$c_\mathrm{f} = \frac{0,074}{Re_l^{0.2}} - \frac{1700}{Re_l} \,. \tag{3.89}$$

Diese Gleichung kann für Reynolds-Zahlen bis $5 \cdot 10^6$ verwendet werden. Für Reynolds-Zahlen bis $5 \cdot 10^8$ hat *H. Schlichting* 1934 die folgende Interpolationsformel (Kurve 4) angegeben:

$$c_\mathrm{f} = \frac{0,455}{(\log(Re_l))^{2.58}} \,. \tag{3.90}$$

Die Kurve 5 ist die den Experimenten angepasste Interpolationsgleichung von *T. von Kármán und K. Schönherr* 1932:

$$\sqrt{c_\mathrm{f}} = \frac{0,242}{\lg(Re_l \cdot c_\mathrm{f})} \,. \tag{3.91}$$

Das in Abschn. 9 geschilderte Verhalten der turbulenten Strömung an rauhen Oberflächen lässt ebenfalls die Berechnung des Reibungswiderstandes von *rauhen Platten* zu. Es ist zu erwarten, dass bei voll ausgebildeter Strömung der Widerstand bei gegebener Länge der Platte und gegebener Rauhigkeitshöhe k proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist. Der Reibungswiderstandsbeiwert c_f ist um so größer, je größer das Verhältnis k/l ist. Da dieses Verhältnis bei festgehaltenem k mit wachsender Länge sinkt, nimmt c_f für wachsende Reynolds-Zahlen bei konstanter Geschwindigkeit ab.

Die Berechnung des Widerstandes rauher Platten wurde erstmals von *L. Prandtl und H. Schlichting* 1934 aufgrund der Messungen von *J. Nikuradse* 1922 an rauhen Rohren ausgeführt. Die Ergebnisse sind in Abb. 3.46 für glatte und rauhe Oberflächen dargestellt.

10.4 Zusammenhang des Widerstandes mit den Zuständen im Nachlauf

Die Abb. 3.47 zeigt das zeitlich gemittelte Nachlaufprofil eines mit U_∞ bewegten Körpers. Das Bezugssystem ist in Ruhe.

Die Nachlaufströmung enthält die durch den Körperwiderstand in Bewegung gesetzte Flüssigkeit. Vor dem Körper weicht die Flüssigkeit entsprechend einer Quellströmung (Abschn. 5 des Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit) nach allen Seiten aus. Die Quellstärke Q stimmt mit der Nachlaufstärke überein und steht in engem Zusammenhang mit dem Widerstand. Mit der Nachlaufgeschwindigkeit w, relativ zur ruhenden Flüssigkeit, ergibt sich für die Quellstärke in genügend großer Entfernung vom Körper:

$$Q = \int_N w \cdot \mathrm{d}A \,. \tag{3.92}$$

Die Integration erfolgt nur über die Nachlauffläche N. Durch Anwenden des Impulssatzes auf die Quell- und Nachlaufströmung ergibt sich:

$$W = \rho \cdot Q \cdot U_\infty \,. \tag{3.93}$$

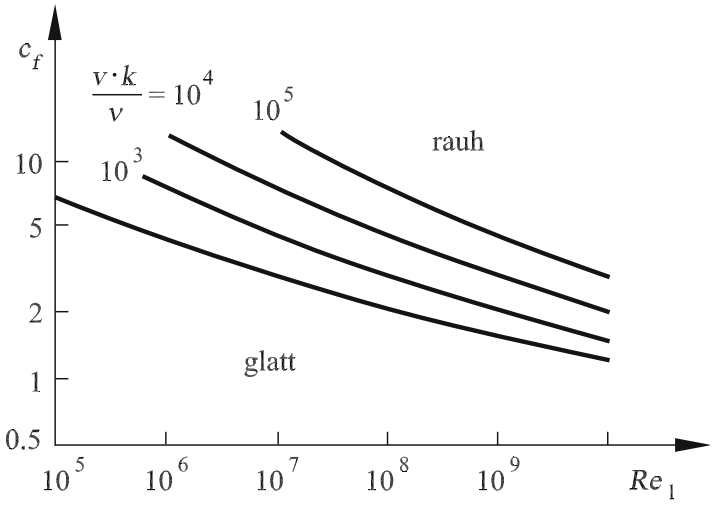
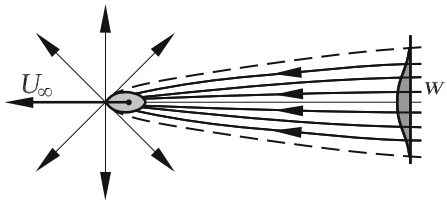


Abb. 3.46 Reibungswiderstand c_f von glatten und rauhen Platten in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl Re_l

Abb. 3.47
Nachlaufströmung eines bewegten Körpers, ruhendes Bezugssytem



An den Gl. (3.92) und (3.93) erkennt man, dass der Widerstand durch Messen des Nachlaufs bestimmt werden kann. *W. Betz* 1925 hat erstmals auf diese Möglichkeit der Widerstandsmessung hingewiesen.

Die Geschwindigkeit relativ zum Körper ist im Nachlauf $U_\infty - w$. Mit einem relativ zum Körper ruhenden Pitot-Rohr (siehe Abschn. 3 des Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit) misst man den Gesamtdruck $p_g = p + (\rho/2) \cdot (U_\infty - w)^2$. Ist p_{g_0} der ungestörte Gesamtdruck $p_0 + (\rho/2) \cdot U_\infty^2$, dann berechnet sich der Widerstand in genügend großer Entfernung hinter dem Körper entsprechend den Gl. (3.92) und (3.93) aus

$$W = \int_N (p_{g_0} - p_g) \cdot \mathrm{d}A \,. \tag{3.94}$$

Dabei wird der Term $(\rho/2) \cdot w^2$ vernachlässigt.

Diese reibungsfreie Betrachtung der Strömung um einen Körper mit Widerstand lässt auch eine wichtige Schlussfolgerung über das Druckfeld zu. Dieses wird durch die Quelle erzeugt. Die Radialgeschwindigkeit ist $w_\mathrm{r} = Q/(4 \cdot \pi \cdot r^2)$ für die

Punktquelle bzw. $Q_1/(2 \cdot \pi \cdot r)$ für die Linienquelle der ebenen Strömung mit der Quellstärke Q_1 pro Längeneinheit. Beschränkt man sich in der Genauigkeit auf die erste Ordnung, kommt bei der Bildung des Quadrats der resultierenden Geschwindigkeit in größerem Abstand von der Quelle nur die x-Komponente $u = w_r \cdot cos(\varphi)$ in Betracht. Der Ausdruck $(\rho/2)\cdot(U_\infty + u)^2 - U_\infty^2 = (\rho/2)\cdot(2\cdot U_\infty \cdot u + u^2)$ in der *Bernoulli-Gleichung* ergibt ohne den Term zweiter Ordnung:

$$p - p_0 = -\rho \cdot U_\infty \cdot u = -\rho \cdot \frac{Q \cdot U_\infty}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot cos(\varphi) \quad \text{bzw.} \quad -\rho \cdot \frac{Q_1 \cdot U_\infty}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot cos(\varphi)\,.$$

Mit Gl. (3.93) folgt daraus:

$$p - p_0 = -\frac{W \cdot cos(\varphi)}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{W_1 \cdot cos(\varphi)}{2 \cdot \pi \cdot r}\,.$$

Dabei ist W_1 der Widerstand pro Längeneinheit für die Linienquelle der ebenen Strömung. Die Beträge sind besonders für die Linienquelle auch in größerer Entfernung beträchtlich. Dieses ist bei Messungen zu beachten, wenn z. B. eine die Strömung störende Halterung des Messgerätes quer zur Strömungsrichtung steht. Vor dem Körper herrscht Überdruck, dahinter Unterdruck. Die Nachlaufströmung, in der als reibungsbehaftete Strömung nicht die *Bernoulli-Gleichung* gilt, liefert einen untergeordneten Beitrag zum Druckfeld.

Bezüglich der reibungsbehafteten Nachlaufströmung ist Folgendes anzumerken. Für Reynolds-Zahlen $Re_d < 1$ existieren die analytischen Lösungen von *C. W. Oseen* 1910 für die Kugel und von *H. Lamb* 1911 für den Zylinder. Die Lösungen sind in guter Übereinstimmung mit den in der Abb. 3.49 dargestellten Messungen. Mit wachsender Reynolds-Zahl bildet sich hinter dem Zylinder zunächst ein stationäres Rückströmgebiet (Abb. 3.48) und schließlich die laminare Kármánsche Wirbelstraße aus. Die Aussagen über den Widerstand gelten dann für das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofil im Nachlauf.

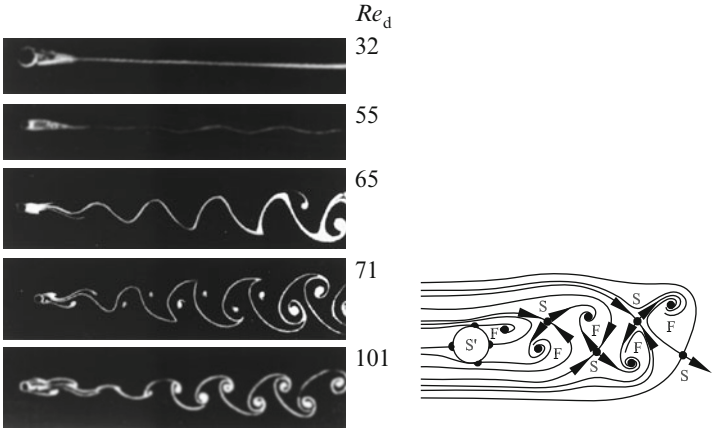


Abb. 3.48 Kármánsche Wirbelstraße hinter einem Kreiszylinder, *F. Homann* 1936

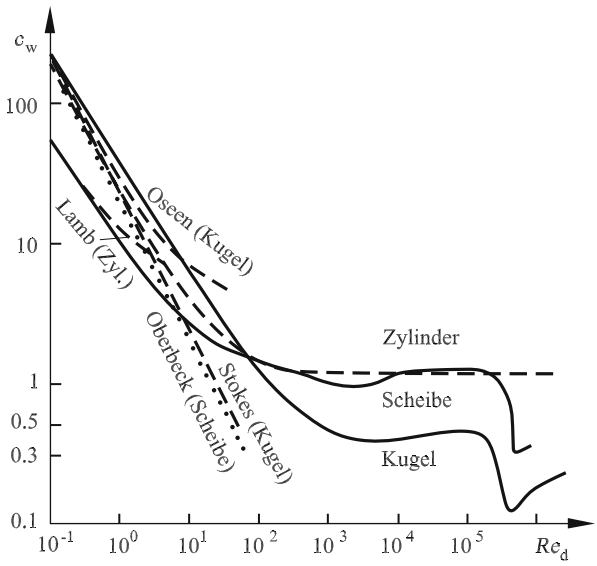


Abb. 3.49
Widerstandsbeiwert c_w von Kugel, Zylinder und Scheibe in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl Re_d

Die Widerstandsbeiwerte c_w als Funktion der mit dem Körperdurchmesser d gebildeten Reynolds-Zahl Re_d sind in Abb. 3.49 für Kugel, Zylinder und Scheibe dargestellt. Dabei wird der Widerstandsbeiwert durch die Lage der Ablösestelle auf dem Körper bestimmt. Entscheidend ist, ob die Grenzschichtströmung auf dem Körper laminar oder turbulent ist. Bei der turbulenten Grenzschichtablösung verschiebt sich die Ablösung stromab und der Widerstand nimmt dadurch erheblich ab (siehe Abschn. 6).

Dieses Verhalten wurde zuerst bei der Untersuchung des Widerstandes von *Kugeln* festgestellt. Dieser sinkt bei der Reynolds-Zahl $4 \cdot 10^5$ auf Werte von $c_w = 0,12$. Mit wachsender Reynolds-Zahl steigt der c_w-Wert wieder auf etwa $0,18$ an. Dass tatsächlich der Übergang zu einer turbulenten Grenzschicht für die Widerstandsverringerung verantwortlich ist, zeigte *L. Prandtl* mit seinem berühmten Stolperdraht-Experiment: Legt man um eine Kugel etwas stromauf von der Stelle, bei der bei laminarer Strömung die Ablösung stattfinden würde, einen dünnen Drahtreif (Drahtdicke in der Größenordnung der viskosen Unterschicht), so wird auch unterhalb der Reynolds-Zahl $4 \cdot 10^5$ der geringere Widerstand beobachtet. Die Ablösestelle verschiebt sich durch den Draht aufgrund der erzwungenen turbulenten Grenzschichtströmung von etwa 80° auf $111 - 120°$.

Für eine schleichende Strömung $Re_d < 1$ gilt bei der Kugelumströmung das *Stokes*sche Gesetz $c_w = 24/Re_d$.

Beim Kreiszylinder liegt der Übergang von den großen Widerstandswerten zu den kleinen bei ungefähr $Re_d = 5 \cdot 10^5$. Der Widerstand fällt von $c_w = 1.2$ auf $c_w = 0.3$ ab. Für die schleichende Strömung gilt hier statt der *Stokes*schen die *Lamb*sche Lösung:

$$c_w = \frac{8 \cdot \pi}{Re_d \cdot (2 - \ln(Re_d))} .$$

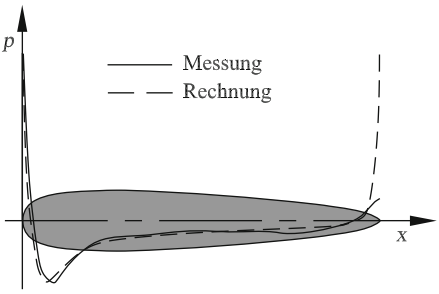


Abb. 3.50 Druckverteilung an einem Luftschiffmodell, *G. Fuhrmann* 1910

Bei der Kreisscheibe ist die Ablösestelle fixiert, so dass der laminar-turbulente Übergang in der Körpergrenzschicht keine Rolle spielt. Demzufolge bleibt der Widerstandsbeiwert auf einem Wert von $c_w = 1.18$.

10.5 Luftschiffe geringen Widerstands

In der Technik der Luftfahrzeuge haben Körper von kleinstem Luftwiderstand besondere Bedeutung. Dieses führt dazu Körperformen zu entwerfen, bei denen die Strömungsablösung vermieden wird. Das ergibt so genannte Stromlinienkörper. Für diese Stromlinienkörper stimmt die mit der Potentialgleichung berechnete Druckverteilung sehr gut mit der gemessenen Druckverteilung überein (siehe Abb. 3.50). Abweichungen muss es an der Hinterkante geben. Dort geht die Körpergrenzschicht in die Scherschicht der Nachlaufströmung über. Demzufolge fehlt in der gemessenen Druckverteilung der reibungsfreie Druckanstieg bis zum Staudruck. Der experimentell ermittelte Widerstandsbeiwert beträgt $c_w = 0,04$. Das ist nur der 28. Teil des Widerstands einer Kreisscheibe mit gleichem Durchmesser.

Neben der Vermeidung von Strömungsablösungen ist man bestrebt, den Reibungswiderstand klein zu halten. Das ist möglich, wenn auf einem großen Teil der Oberfläche die Strömung laminar bleibt. Dabei ist es hilfreich, dass eine beschleunigte Strömung leichter laminar gehalten werden kann als die verzögerte. Die Beschleunigung auf dem Körper muss derart erfolgen, dass das Geschwindigkeitsmaximum möglichst weit stromab liegt. Dieses wird erreicht, indem man die Stelle größter Profildicke soweit wie möglich stromab verlegt. Allerdings muss auch die Oberfläche völlig frei von Oberflächenrauhigkeiten sein, da sonst der laminar-turbulente Übergang vorzeitig verursacht wird.

11 Strömungen Nicht-Newtonscher Medien

In Abschn. 1 werden die nichtlinearen Fließeigenschaften Nicht-Newtonscher Fluide behandelt. Als Beispiel einer Nicht-Newtonschen Strömung wird im Folgenden eine ausgebildete *Kreisrohrströmung* betrachtet, deren Schubspannung das Potenzgesetz Gl. (3.9) erfüllen soll.

11.1 Rohrströmung

Die treibende Kraft der ausgebildeten Rohrströmung ist die konstante Druckdifferenz Δp. Wie bei der Strömung einer Newtonschen Flüssigkeit ist der Druckgradient längs des Rohres konstant $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = -\Delta p/l$. Zur Bestimmung der Lösung wird die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten (Abschn. 1 des Kap. 1 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.95}$$

und die Navier-Stokes-Gleichung für stationäre Strömungen ohne Schwerefeld (Abschn. 2 des Kap. 1 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik)

$$\rho \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \cdot \boldsymbol{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \tag{3.96}$$

verwendet. Dabei ist $\boldsymbol{\tau}$ der Tensor der Normal- und Schubspannungen. Mit dem Lösungsansatz in Zylinderkoordinaten

$$v_r = 0, \qquad v_\varphi = 0, \qquad v_z = u(r), \qquad p = p(z) \tag{3.97}$$

ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt und die linke Seite von Gl. (3.96) ist gleich Null. $\boldsymbol{\tau}$ hat nur zwei nicht verschwindende Komponenten. Für $\tau_{rz} = \tau_{zr}$ folgt mit Gl. (3.9):

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = K \cdot \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right|^{n-1} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}. \tag{3.98}$$

Damit liefert allein die z-Komponente der Gl. (3.96) einen Beitrag:

$$0 = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r \cdot \tau_{rz}). \tag{3.99}$$

Die r- und die φ-Komponente der Gl. (3.96) sind identisch erfüllt. Aus Gl. (3.99) erhält man durch Integration:

$$\tau_{rz} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{r}{2} + \frac{\mathrm{C}_1}{r}.$$

Die Schubspannung τ_{rz} hat für $r = 0$ einen endlichen Wert. Daraus folgt, dass die Integrationskonstante C_1 gleich Null sein muss. Mit dem Ansatz Gl. (3.98) ergibt sich:

$$K \cdot \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right|^{n-1} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{r}{2}.$$

Da der Druck in Richtung der z-Achse abnimmt, ist $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = -\Delta p/l$ negativ. Damit muss auch $\mathrm{d}u/\mathrm{d}r$ negativ sein:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -\left(\frac{\Delta p}{2 \cdot K \cdot l}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot r^{\frac{1}{n}}.$$

Durch Integration folgt:

$$u(r) = -\frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{\Delta p}{2 \cdot K \cdot l}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot r^{\frac{n+1}{n}} + \mathrm{C}_2.$$

C_2 bestimmt sich aus der Haftbedingung an der Wand $u(R) = 0$, mit dem Rohrradius R. Es ergibt sich:

$$u(r) = -\frac{n}{n+1} \cdot \left[\frac{R^{n+1}}{2 \cdot K} \cdot \frac{\Delta p}{l}\right]^{\frac{1}{n}} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]. \tag{3.100}$$

Für $n = 1$ stimmt Gl. (3.100) mit dem Geschwindigkeitsprofil einer Newtonschen Flüssigkeit überein. Für $n < 1$ ergibt sich an der Wand ein steilerer Geschwindigkeitsgradient, der in Abb. 3.51 dargestellt ist. Der Volumenstrom Q berechnet sich mit Gl. (3.100) zu:

$$Q = \int_0^{2\cdot\pi} \int_0^R u(r) \cdot r \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi = \frac{n}{3 \cdot n + 1} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot K} \cdot \frac{\Delta p}{l}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{3.101}$$

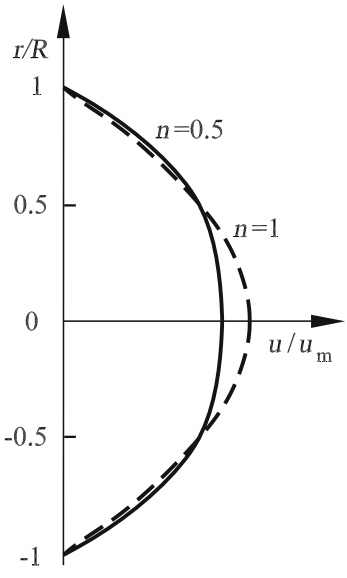


Abb. 3.51 Geschwindigkeitsverteilung einer Nicht-Newtonschen Flüssigkeit im Kreisrohr

Daraus erhält man für die mittlere Geschwindigkeit u_m:

$$u_\mathrm{m} = \frac{Q}{\pi \cdot R^2} = \frac{n}{3 \cdot n + 1} \cdot R \cdot \left(\frac{R}{2 \cdot K} \cdot \frac{\Delta p}{l} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Für $n = 1$ und $K = \mu$ ergibt sich das *Hagen-Poiseuillesche* Gesetz für die Rohrströmung einer Newtonschen Flüssigkeit.

11.2 Weissenberg-Effekt

Bei Scherströmungen hoch-molekularer Flüssigkeiten treten Nicht-Newtonsche Effekte auf, die den Normalspannungen zugeordnet werden können. Als Beispiel soll der *Weissenberg-Effekt* betrachtet werden. Ein Nicht-Newtonsches Fluid bewegt sich zwischen zwei konzentrischen Zylindern mit den Radien R_1 und R_2 (Abb. 3.52), von denen der Innere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Die Flüssigkeit hat eine freie Oberfläche, auf die der Umgebungsdruck wirkt. Die Höhe der Flüssigkeitssäule ist so groß, dass die Strömung am Boden des Zylinders keine Auswirkung auf die Form der freien Oberfläche hat.

Für Zylinder-Koordinaten ist allein die φ-Komponente der Geschwindigkeit $v_\varphi(r)$ von Null verschieden. Zwischen den beiden Zylindern liegt also eine Scherströmung vor. Der Druck ist nur von r abhängig. Der Spannungstensor des Nicht-Newtonschen Fluids soll die folgende Form haben:

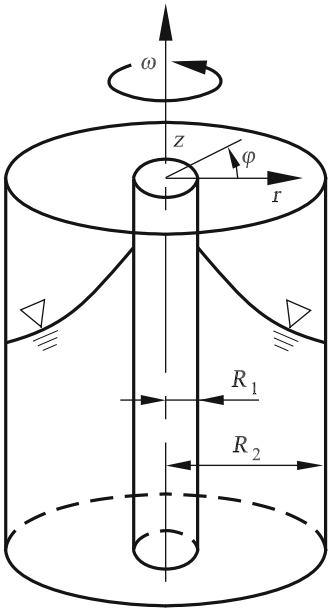


Abb. 3.52 Strömung zwischen zwei konzentrischen Zylindern, der innere Zylinder rotiert

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{r\varphi} & 0 \\ \tau_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.102}$$

$\sigma_{\varphi\varphi}$ und $\tau_{r\varphi}$ sind nur von r abhängig. Aus der Navier-Stokes-Gleichung für stationäre Strömungen Gl. (3.96) folgt für die r- und φ-Komponente:

$$-\rho \cdot \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r}, \tag{3.103}$$

$$0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r \cdot \tau_{r\varphi}) + \frac{\tau_{r\varphi}}{r} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 \cdot \tau_{r\varphi}). \tag{3.104}$$

Die z-Komponente der Gl. (3.96) ist identisch erfüllt. Unter Verwendung des Newtonschen Ansatzes in Zylinder-Koordinaten für die Schubspannung $\tau_{r\varphi} = \mu \cdot (\mathrm{d}v_\varphi/\mathrm{d}r - v_\varphi/r)$ ergibt sich aus Gl. (3.104):

$$0 = \mu \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r \cdot v_\varphi)\right). \tag{3.105}$$

Hieraus kann durch Integration die Geschwindigkeitsverteilung bestimmt werden. Diese ist identisch mit der entsprechenden Geschwindigkeitsverteilung einer Newtonschen Flüssigkeit:

$$v_\varphi(r) = \mathrm{A} \cdot r + \mathrm{B} \cdot \frac{1}{r}. \tag{3.106}$$

Mit den Randbedingungen $v_\varphi(r = R_1) = \omega \cdot R_1$ und $v_\varphi(r = R_2) = 0$ erhält man für die Konstanten:

$$\mathrm{A} = -\frac{\omega \cdot R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{B} = \frac{\omega \cdot R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Aus Gl. (3.103) folgt eine Gleichung für den Druck:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}(ln(r))}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}(ln(r))} = -\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho \cdot \frac{v_\varphi^2}{r}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}(ln(r))} = -\sigma_{\varphi\varphi} + \rho \cdot v_\varphi^2. \tag{3.107}$$

Formal kann $\sigma_{\varphi\varphi}$ durch die Normalspannungsdifferenz $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$ ersetzt werden. Voraussetzungsgemäß wirkt auf die freie Oberfläche der konstante Außendruck. Damit ist die Änderung der Flüssigkeitshöhe h proportional zum Druckgradienten:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{\rho \cdot g} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}. \tag{3.108}$$

Bei hoch-molekularen Flüssigkeiten ist $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} > 0$. Aus den Gl. (3.107) und (3.108) folgt für entsprechend große Werte der Differenz der Normalspannungen,

Abb. 3.53 Strahlaufweitung eines Flüssigkeitsstrahls

dass der Flüssigkeitsspiegel h am drehenden inneren Zylinder höher ist als am ruhenden äußeren Zylinder. Dieses Hochsteigen der Flüssigkeiten am rotierenden Innenzylinder wurde von *K. Weissenberg* 1947 als Normalspannungseffekt beschrieben und kann bei vielen viskoelastischen Flüssigkeiten beobachtet werden.

11.3 Strahlaufweitung

Ein anderer Normalspannungseffekt tritt auf, wenn eine viskoelastische Flüssigkeit als Freistrahl aus einer Düse oder der Mündung eines zylindrischen Rohres austritt. Der aus einem vertikalen Rohr (Abb. 3.53) nach unten austretende Strahl verbreitert sich im Fall einer Nicht-Newtonschen Flüssigkeit, bevor er sich aufgrund der Schwerkraft wieder zusammenschnürt. Geht man davon aus, dass am Mündungsquerschnitt eine ausgebildete Hagen-Poiseuille-Strömung vorliegt, reduziert sich die Navier-Stokes-Gleichung in radialer Richtung auf

$$\frac{\mathrm{d}(p-\sigma_{rr})}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{r}\cdot(\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{rr}). \tag{3.109}$$

Mit Gl. (3.109) in Verbindung mit einer Impulsbilanz im Mündungsbereich und den Normalspannungsfunktionen kann wie beim Weissenberg-Effekt die Strahlaufweitung mit den Normalspannungen des Nicht-Newtonschen Fluids in Zusammenhang gebracht werden. Die Strahlaufweitung ist dabei umso größer je kleiner der Rohrradius ist. Dies entspricht beim Weissenberg-Effekt dem Tatbestand, dass das Aufsteigen der Flüssigkeit am rotierenden Stab umso größer ist, je kleiner der Durchmesser des inneren Zylinders gewählt wird.

Weiterführende Literatur

Albring, W.: Angewandte Strömungslehre. Steinkopff, Dresden (1966)
Batchelor, G.K.: An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge (2000)
Becker, E.: Technische Strömungslehre. Teubner, Stuttgart (1993)
Betchov, R., Criminale, W.O., Jr.: Stability of parallel flows. Academic, New York (1967)
Cebeci, T., Cousteix, J.: Computation of boundary-layer flows. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (2005)

Chorin, A.J., Marsden, J.E.: A Mathematical introduction to fluid mechanics. Springer, New York (2000)
Durst, F.: Grundlagen der Strömungsmechanik. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (2006)
van Dyke, M.: An Album on Fluid Motion. Parabolic Press, Stanford (2005)
Faber, T.E.: Fluid dynamics for physicists. Cambridge University Press, Cambridge (1997)
Gersten, K.: Einführung in die Strömungsmechanik. Shaker, Aachen (2003)
Herwig, H., Bastian, S.: Strömungsmechanik. Springer, Berlin/Heidelberg (2015)
Hinze, J.O.: Turbulence. McGraw-Hill, New York (1987)
Kundu, P.K., Cohen, I.M., Hu, H.H.: Fluid mechanics. Elsevier/Academic, Amsterdam/Heidelberg (2015)
Lamb, H.: Hydrodynamics. Cambridge University Press, Cambridge (1994)
Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: Fluid mechanics. Pergamon Press, London (1959)
Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: Hydrodynamik, Lehrbuch der theoretischen Physik. Akademie-Verlag, Berlin (1974)
Oertel, H., jr.: Introduction to fluid mechanics. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 2001, Universitätsverlag, Karlsruhe (2005)
Oertel, H., jr. (Hrsg.): Prandtl – Führer durch die Strömungslehre, russische Übersetzung. Russian Institute of Dynamics, Izhevsk (2007)
Oertel, H., jr. (Hrsg.): Prandtl – Führer durch die Strömungslehre, chinesische Übersetzung. Science Press, Beijing (2008)
Oertel, H., jr. (Hrsg.): Prandtl – Essentials of Fluid Mechanics, 3rd edn. Springer, New York (2010)
Oertel, H., jr. (Hrsg.): Prandtl – Führer durch die Strömungslehre. Springer Vieweg, Wiesbaden (14) Auflage (2017)
Oertel, H., jr., Delfs, J.: Strömungsmechanische Instabilitäten. Springer, Berlin/Heidelberg 1996, Universitätsverlag, Karlsruhe (2005)
Oertel, H., jr., Böhle, M., Reviol, T.: Strömungsmechanik. Springer Vieweg, Wiesbaden (2015)
Pai, S.J.: Viscous flow theory. Van Nostrand, Princeton (1956, 1957)
Piquet, J.: Turbulent flows. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1999)
Rotta, J.C.: Turbulente Strömungen. Teubner, Stuttgart (1972)
Schlichting, H., Gersten, K.: Boundary Layer Theory. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (2003)
Schlichting, H., Gersten, K.: Grenzschicht-Theorie. Springer, Berlin/Heidelberg (2006)
Spurk, J.H.: Fluid Mechanics. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (2008)
Spurk, J.H.: Strömungslehre. Springer, Berlin/Heidelberg (2010)
White, F.M.: Viscous fluid flow. McGraw-Hill, New York (2005)
Wieghardt, K.: Theoretische Strömungslehre. Teubner, Stuttgart (1974)
Yih, C.: Fluid mechanics. McGraw-Hill, New York (1969)
Zierep, J., Bühler, K.: Grundzüge der Strömungslehre. Springer Vieweg, Wiesbaden (2013)

Dynamik der Gase

4

Herbert Oertel Jr.

Zusammenfassung

Das Kapitel Dynamik der Gase behandelt die Grundgleichungen der kompressiblen und reibungsfreien Strömung des Lehrbuches und Nachschlagewerkes H. Oertel Jr. (Hrsg.) Prandtl-Führer durch die Strömungslehre. Es werden die Grundgleichungen der eindimensionalen Stromfadentheorie abgeleitet und Anwendungsbeispiele der kompressiblen Strömung wie zum Beispiel der Fortpflanzung von Druckwellen, die Laval-Düsenströmung, Expansionswellen, Freistrahlen und der Verdichtungsstoß sowie die Profilumströmung behandelt. Ergänzend zur Masse- und Impulserhaltung der inkompressiblen Strömung wird in diesem Kapitel der Energiesatz eingeführt.

Erhebliche Dichte- oder Volumenänderungen treten bei Strömungen von Gasen und Dämpfen auf bei denen große Druckunterschiede vorkommen. Volumenänderungen und die dafür erforderlichen Druckänderungen kommen im Wesentlichen in folgenden Fällen vor:

Große Höhenerstreckung der von der Schwerkraft unterworfenen Gasmassen

Solche Strömungen treten in der freien Atmosphäre auf. Sie werden in dem Abschn. 2 des Kap. 11 ▸ Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean behandelt.

Diese entstehen beim Druckausgleich zwischen zwei Behältern unterschiedlicher Drücke oder wenn sich ein Körper in einem Gas mit sehr großer Geschwindigkeit bewegt. In der Praxis treten diese Strömungen z. B. in Dampf- und Gasturbinen und ähnlichen Strömungsmaschinen auf. Andererseits findet man sie auch beim Flug von Raketen und Flugzeugen, sowie bei Flugzeugpropellern und Strahltriebwerken. Die Strömungslehre kompressibler Medien wird auch als *Gasdynamik* bezeichnet.

Große Beschleunigung

Sie treten im ruhenden oder strömenden Gas auf, wenn Wandteile oder Körper stark beschleunigte Bewegungen ausführen. Dazu gehören z. B. Folgeerscheinun-

H. Oertel Jr. (✉)
Baden-Baden, Deutschland
E-Mail: herbert.oertel@t-online.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5_4

gen des raschen Öffnens und Schließens von Klappen und Ventilen oder die Ausbreitung von Explosionen.

Große Temperaturunterschiede

Diese können beim Wärmeübergang auch bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten entstehen. Derartige Strömungen mit Wärmeübertragung werden in dem Kap. 8 ▸ Konvektive Wärme- und Stoffübertragung behandelt.

1 Druckfortpflanzung, Schallgeschwindigkeit

Es wird ein ruhendes Gas in einem Rohr betrachtet. Durch einen bewegten Kolben wird eine Druckerhöhung erzeugt, die sich entsprechend der Abb. 4.1 in das ruhende Gas fortpflanzt. Dabei wird angenommen, dass sich die Druckverteilung und der gesamte Strömungszustand ohne Änderung der Gestalt mit der konstanten Geschwindigkeit c nach rechts bewegt. Da das Gas dabei komprimiert wird, hat es hinter dem Druckanstieg die Strömungsgeschwindigkeit w. Es wird vorausgesetzt, dass der Druckanstieg $p_1 - p_0$ klein gegen den Druck p_0 ist. Ebenso werden auch die Dichteänderung $\rho_1 - \rho_0$ und w als klein vorausgesetzt. Für die Massenzunahme in der Zeiteinheit im Rohr ergibt sich $A \cdot (\rho_1 - \rho_0) \cdot c$ und für die in der Zeiteinheit zufließende Masse $A \cdot \rho_1 \cdot w$. Aus der *Kontinuität* folgt

$$\rho_1 \cdot w = (\rho_1 - \rho_0) \cdot c \,. \tag{4.1}$$

Die *Bewegungsgleichung* führt mit dem in der Zeiteinheit zufließenden Impulsstrom $A \cdot w \cdot \rho_1 \cdot w$, der Impulszunahme in der Zeiteinheit $A \cdot w \cdot \rho_1 \cdot c$ und der resultierenden Kraft $A \cdot (p_1 - p_0)$ zu:

$$p_1 - p_0 + \rho_1 \cdot w^2 = \rho_1 \cdot w \cdot c \,. \tag{4.2}$$

Mit den getroffenen Voraussetzungen kann der quadratische Term $\rho_1 \cdot w^2$ vernachlässigt werden. Unter Verwendung von Gl. (4.1) erhält man aus Gl. (4.2):

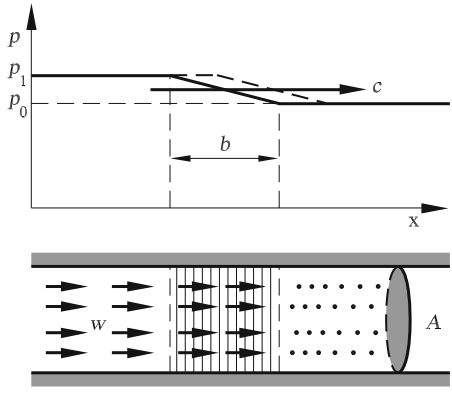


Abb. 4.1 Druckwelle im Rohr

$$c^2 = \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0} .$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hängt ausschließlich vom Kompressionsgesetz des Fluids ab. Mit der Voraussetzung kleiner Störungen kann er durch den Differentialquotienten $\partial p/\partial \rho$ ersetzt werden:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s . \tag{4.3}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c kleiner Druckstörungen ist damit unabhängig von der Größe der Druckänderung und von der Breite des Übergangsgebietes. Sie ist ausschließlich vom Kompressionsgesetz des Fluids abhängig. c wird als die *Schallgeschwindigkeit* kleiner Druckstörungen (Schallwellen) bezeichnet.

Für Gase gilt nach dem Isentropengesetz $p = \text{konst.} \cdot \rho^{\kappa}$, d. h.

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \kappa \cdot \text{konst.} \cdot \rho^{(\kappa-1)} = \kappa \cdot \frac{p}{\rho} . \tag{4.4}$$

Mit der Zustandsgleichung idealer Gase $p = R \cdot \rho \cdot T$ (R stoffspezifische Gaskonstante) ergibt sich:

$$c = \sqrt{\kappa \cdot \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T} .$$

Die Schallgeschwindigkeit ist damit bei einem Gas nur von der Temperatur abhängig. Für Luft bei $0° \; C$, d. h. $T = 273 \; K$ erhält man:

$$c = \sqrt{\kappa \cdot \frac{p_0}{\rho_0}} = 331 \frac{m}{s} .$$

1.1 Ausbreitung von Druckwellen

In einem mit dem strömenden Gas mitbewegten Bezugssystem breitet sich die Druckstörung relativ zum Gas mit der Schallgeschwindigkeit c aus. Relativ zu der Strömungsgeschwindigkeit w bewegt sich die Druckstörung stromab mit der Geschwindigkeit $c + w$ und stromauf mit der Geschwindigkeit $c - w$. Ist w größer als c pflanzen sich die Druckstörungen nicht stromauf fort.

Ist die Strömungsgeschwindigkeit w kleiner als die Schallgeschwindigkeit c, breiten sich die Störungen in Form einer Kugelwelle in alle Richtungen aus. Ist die Strömungsgeschwindigkeit größer als die Schallgeschwindigkeit, bewegen sich alle Kugelwellen innerhalb eines Kegels stromab der Stelle A, in der die Störung aufgetreten ist (Abb. 4.2). Bewegt sich eine Schallquelle A mit der Geschwindigkeit $w > c$ durch ein ruhendes Gas, ergibt sich ein analoges Bild. Die Störungen breiten sich innerhalb eines Kegels stromauf der Schallquelle aus. Der Öffnungswinkel

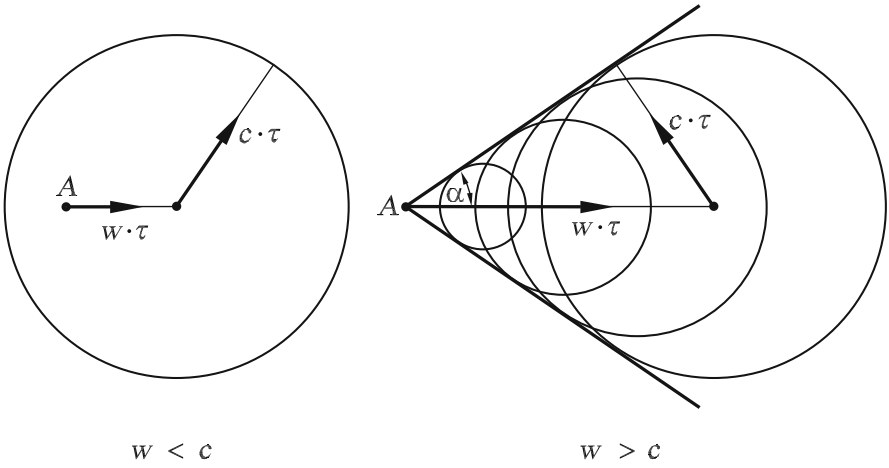


Abb. 4.2 Ausbreitung einer Druckwelle

dieses so genannten *Machschen Kegels* lässt sich wie folgt ermitteln. Innerhalb des Zeitintervalls τ ist eine punktförmige Störung zu einer Kugel vom Radius $c \cdot \tau$ angewachsen, deren Mittelpunkt sich um $w \cdot \tau$ entfernt hat. Der Kegel berührt die Kugel tangential, so dass gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{c \cdot \tau}{w \cdot \tau} = \frac{c}{w} = \frac{1}{M} . \tag{4.5}$$

Man nennt α den *Machschen Winkel* und M die *Mach-Zahl*. Bei $M < 1$ spricht man von Unterschallströmungen, bei $M \approx 1$ von schallnahen Strömungen und bei $M > 1$ von Überschallströmungen.

Dieselben Beziehungen lassen sich auch bei der Bewegung von Körpern in ruhender Luft anwenden. Bewegt sich der Körper mit Überschallgeschwindigkeit, breiten sich die durch den Körper hervorgerufenen Störungen innerhalb eines Machschen Kegels aus. Die Abb. 4.3 zeigt als Beispiel die Kopfwelle eines mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Geschosses. Dabei sind die Druckunterschiede so groß, dass die Näherung kleiner Störungen nicht mehr gilt und sich die Kopfwelle mit Überschallgeschwindigkeit fortpflanzt. Daher ist der Winkel der Kopfwelle größer als der Machsche Winkel α.

Die Kontinuität Gl. (4.1) und die Bewegungsgleichung (4.2) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenfront sind an die Voraussetzung unveränderlicher Wellenform geknüpft. Sie ist bei kleinen Störungen des Anströmzustandes oder auch bei den in Abschn. 4 behandelten Verdichtungsstößen erfüllt. Endliche stetige Druckänderungen ändern dagegen beim Fortschreiten ihre Wellenform. Dieses kann man erklären, indem man die endliche Druckänderung als Folge von vielen kleinen Änderungen auffasst. Jede Störung bewegt sich dann in dem durch die vorauslaufende Welle geänderten Zustand. Ist w_0 die Strömungsgeschwindigkeit

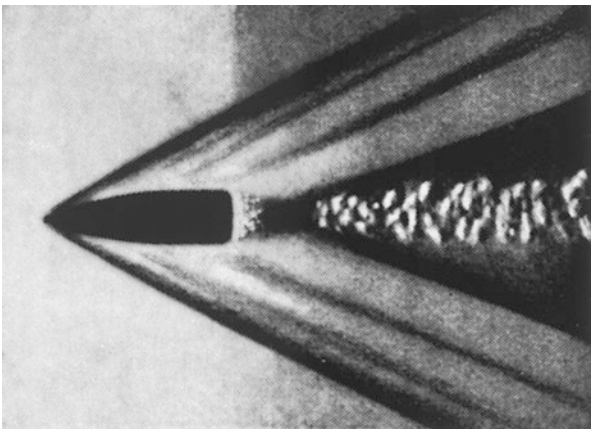


Abb. 4.3 Schlierenbild eines Geschosses, *C. Cranz* 1926

vor der Welle, dann berechnet sich die Änderung der Strömungsgeschwindigkeit mit Gl. (4.1) zu:

$$w_1 - w_0 = \frac{c \cdot (\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1} \,. \tag{4.6}$$

Die Dichteänderung $\mathrm{d}\rho = \rho_1 - \rho_0$ ist mit der Druckänderung $\mathrm{d}p$ und der Schallgeschwindigkeitsänderung $\mathrm{d}c$ verbunden. Mit Gl. (4.4) folgt für $\mathrm{d}c$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot c \cdot \mathrm{d}c &= 2 \cdot c \cdot (c_1 - c_0) = \kappa \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\rho} - \kappa \cdot \frac{p}{\rho^2} \cdot \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \cdot (\kappa - 1) \cdot \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{c^2 \cdot (\kappa - 1) \cdot (\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1} \,. \end{aligned}$$

Damit ist die Dichteänderung $\rho_1 - \rho_0$ auf die Änderung der Schallgeschwindigkeit $c_1 - c_0$ zurückgeführt und man erhält mit Gl. (4.6):

$$w_1 - w_0 = \frac{2}{\kappa - 1} \cdot (c_1 - c_0) \,. \tag{4.7}$$

Die Strömungsgeschwindigkeit ändert sich in einer ebenen Schallwelle um den $2/(\kappa - 1)$-fachen (bei Luft dem fünffachen) Betrag der Schallgeschwindigkeitsänderung. Dieses Ergebnis gilt auch für starke Störungen.

Für die Verdichtungswelle in Abb. 4.4 ist die Schallgeschwindigkeit in der Welle größer als die Schallgeschwindigkeit vor der Welle. Damit ist nach Gl. (4.7) auch die Strömungsgeschwindigkeit größer. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit jedes Wellenanteils ist gleich der Summe der lokalen Schallgeschwindigkeit und der lokalen Strömungsgeschwindigkeit $c + w$. Die Störung läuft demzufolge mit zunehmender Wellentiefe immer schneller. Die Welle steilt sich also mit der Zeit

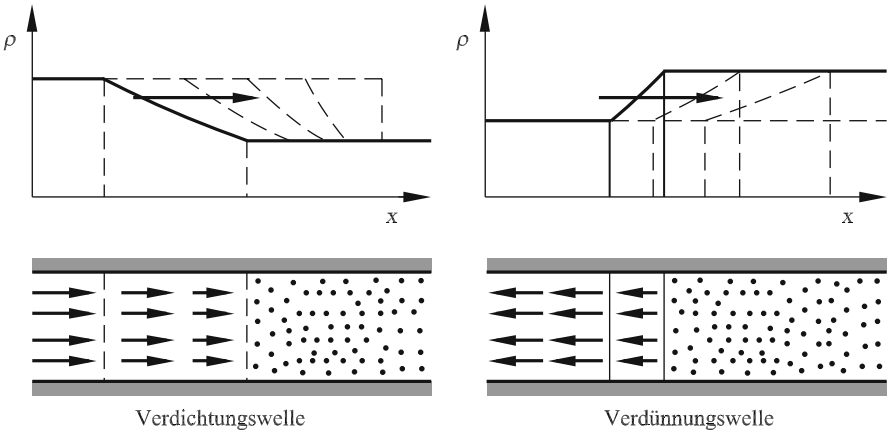


Abb. 4.4 Ausbreitung von Verdichtungs- und Verdünnungswellen

auf und bildet einen senkrechten Sprung, den *Verdichtungsstoß*, der in Abschn. 4 behandelt wird.

Läuft dagegen wie in Abb. 4.4 eine Verdünnungswelle nach rechts in ein ruhendes Medium $w_0 = 0$, dann strömt in der Welle das Gas nach links. Entsprechend Gl. (4.7) wird w_1 wegen $c_1 < c_0$ negativ. Hinter der Front laufen die Störungen um so langsamer, je kleiner der Druck wird. Eine solche Verdünnungswelle verflacht mit der Zeit.

2 Stationäre kompressible Strömungen

In einer kompressiblen und reibungsfreien Strömung gilt für einen Stromfaden die verallgemeinerte Bernoulli-Gleichung (Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit, Gl. (4)). Unter Vernachlässigung der Erdschwere lautet diese:

$$\mathrm{F} + \frac{w^2}{2} = \mathrm{F}_0 = \text{konst.}\,, \tag{4.8}$$

mit der Druckfunktion $\mathrm{F}(p) = \int (\mathrm{d}p/\rho)$. Für isentrope Zustandsänderungen

$$\rho = \rho_0 \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

ergibt die Auswertung des Integrals:

$$\mathrm{F} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\,. \tag{4.9}$$

Ist p_0 der Ruhedruck bei $w_0 = 0$, z. B. der Ruhedruck im Kessel bei Ausflussvorgängen, so wird

$$w = \sqrt{2 \cdot (\mathrm{F}_0 - \mathrm{F})} = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}. \tag{4.10}$$

Expandiert man das Gas bis ins Vakuum ($p = 0$) ergibt sich aus Gl. (4.10) die Maximalgeschwindigkeit zu:

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} \cdot c_0 \,. \tag{4.11}$$

Für Luft bei 0° C erhält man für die Expansion die maximale Geschwindigkeit

$$w_{\max} = 740 \, \frac{m}{s} \,.$$

Dabei handelt es sich um einen hypothetischen Grenzwert. Aufgrund der Nichterreichbarkeit des absoluten Nullpunkts der Temperatur und der Kondensation der beteiligten Gase kann er nicht erreicht werden. In mit Luft betriebenen Hyperschallwindkanälen wird ein Grenzwert erzielt der etwa 10 % kleiner ist als der theoretische Wert Gl. (4.11).

Der Zusammenhang von w und p ist in Abb. 4.5 dargestellt. Die Abbildung enthält ergänzend die Abhängigkeit des spezifischen Volumens $v = 1/\rho$ vom Druck entsprechend der Isentropengleichung. Die schraffierte Fläche $\int_p^{p_0} v \cdot \mathrm{d}p$ veranschaulicht die Differenz $\mathrm{F}_0 - \mathrm{F}$. Die Kontinuitätsgleichung liefert für die stationäre und kompressible Strömung (siehe Abschn. 1 des Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit) die Aussage, dass durch alle Querschnitte eines Stromfadens in der Zeiteinheit dieselbe Masse strömt. Es gilt längs des Stromfadens:

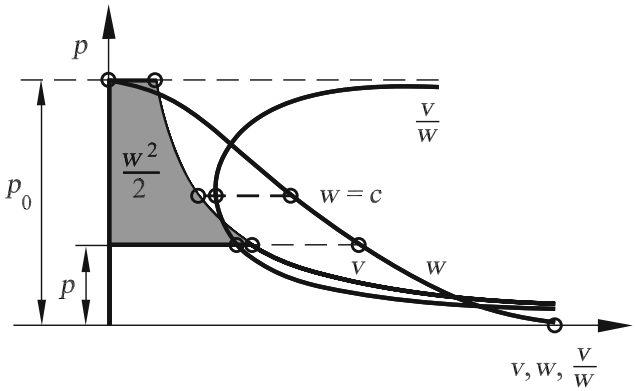


Abb. 4.5 Spezifisches Volumen v, Geschwindigkeit w und v/w in Abhängigkeit vom Druck p

$$A \cdot \rho \cdot w = \text{konst.}\,. \tag{4.12}$$

Der Verlauf des Stromfadenquerschnitts A mit dem Druck p ist durch den Verlauf der Funktion $1/(\rho \cdot w) = v/w$ gegeben. Er lässt sich mit den Gl. (4.10) und (4.12) wie folgt erklären. Bei $p = p_0$ ist $w = 0$ und daher $A = \infty$. Wird p abgesenkt, wächst w allmählich an, ohne dass sich ρ zunächst wesentlich ändert. Deshalb muss A abnehmen. Ist p sehr klein und wird weiter abgesenkt, nähert sich w dem Wert $w_{\max}$ und ändert sich nur noch geringfügig. ρ nimmt jedoch mit unbegrenzt abnehmendem p ebenfalls unbegrenzt ab, d. h. A muss zunehmen und gegen ∞ streben.

Zwischen dem Bereich in dem A abnimmt und dem der Zunahme des Stromfadenquerschnitts muss offenbar ein Minimum von A existieren. Es befindet sich dort, wo die verhältnismäßige Zunahme der Geschwindigkeit $\mathrm{d}w/w$ gerade so groß ist wie die verhältnismäßige Abnahme der Dichte $-\mathrm{d}\rho/\rho$. Das ist an der Stelle der Fall, an der die Strömungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit ist. Wegen der erfolgten Abkühlung ist diese Schallgeschwindigkeit nicht die des Anfangszustandes. Sie ist entsprechend der abgesenkten Temperatur kleiner (bei Luft von 20° C im Ruhezustand etwa 343 m/s). Nach dem Überschreiten des Minimums ist die Geschwindigkeit größer als die Schallgeschwindigkeit. In einer Überschallströmung nimmt bei einer Absenkung des ruckes (Geschwindigkeitszunahme) der Querschnitt zu. Bei einer Zunahme des Druckes (Geschwindigkeitsabnahme) nimmt der Querschnitt ab. Eine kontinuierliche Beschleunigung des Gases vom Unterschall in den Überschall erfordert zunächst eine Kontraktion und nach dem Schalldurchgang eine Erweiterung der Stromröhre. Eine solche Anordnung wird *Laval-Düse* genannt.

Bei einer einfachen Öffnung ohne Erweiterung stellt sich, sobald der Gegendruck klein genug ist, in der Öffnung Schallgeschwindigkeit ein. In Luft beträgt das kritische Druckverhältnis von Gegendruck zu Ruhedruck etwa 0, 53. Allgemein gilt für das kritische Druckverhältnis eines idealen Gases:

$$\frac{p'}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}\,.$$

Die zugehörige Geschwindigkeit beträgt

$$w' = c' = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}}\,.$$

Die Ausflussmenge ist dann von dem Gegendruck unabhängig. Außerhalb der Mündung erweitert sich der Querschnitt des Gasstrahles aufgrund der Trägheit der Gasströmung so stark, dass in seinem Innern ein Unterdruck entsteht. Infolge des Unterdruckes wird die Strömung wieder konvergent und verdichtet sich wieder auf einen Druck der ungefähr dem Mündungsdruck entspricht. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch (Abb. 4.6).

Der Mündungsdruck p_m kann durch eine Anbohrung der Düse im Bereich des Austritts gemessen werden (vgl. Abb. 4.7). Er ist für Außendrücke p_2, die kleiner sind als der *kritische Druck* p' konstant und gleich dem kritischen Druck. Für höhere Gegendrücke p_2 stimmt er mit p_2 überein. Wird p_2 vom Wert p_0 allmählich abgesenkt, steigt die Ausflussmenge

$$Q = A \cdot \rho_m \cdot w_m = A \cdot \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot p_0 \cdot \rho_0 \cdot \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)} \quad (4.13)$$

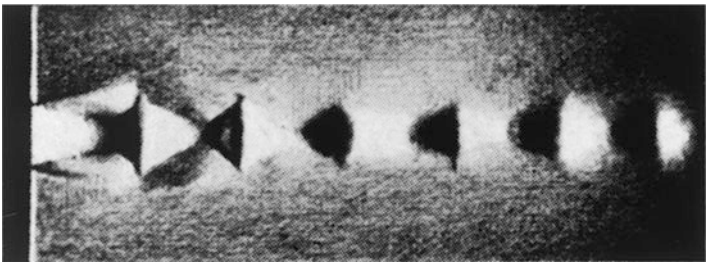


Abb. 4.6 Überschallfreistrahl, *L. Mach* 1897

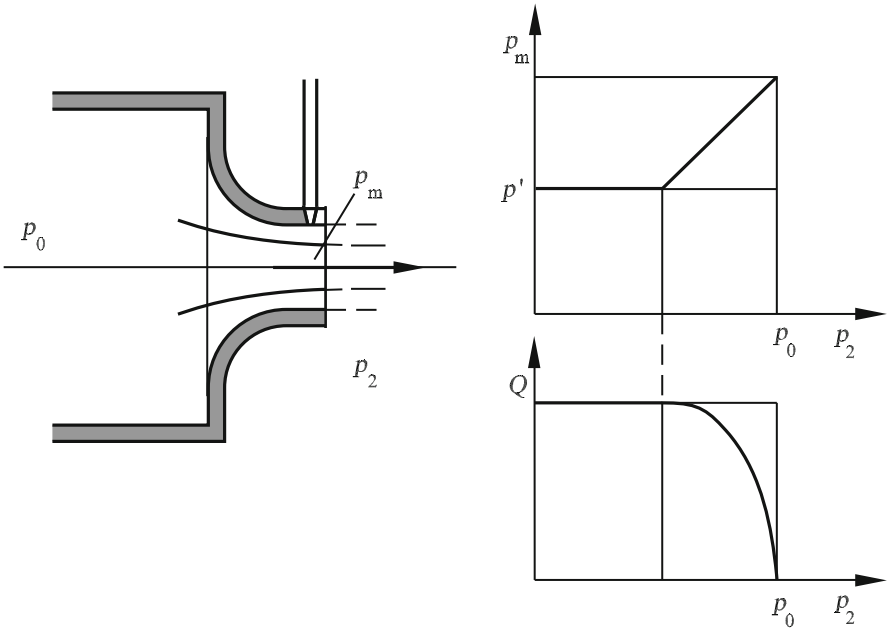
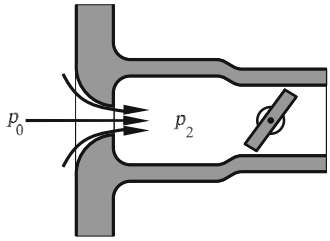


Abb. 4.7 Ausflussmenge und Mündungsdruck in Abhängigkeit von p_2, Messung des Mündungsdruckes

Abb. 4.8 Drossel



allmählich bis zu einem Maximum beim kritischen Druck an:

$$Q_{\max} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \cdot A \cdot \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot p_0 \cdot \rho_0}\,. \tag{4.14}$$

Bei weiterer Absenkung von p_2 bleibt dann $Q = Q_{\max} = \text{konst.}$. Der Verlauf von p_m und Q in Abhängigkeit von p_2 ist in Abb. 4.7 dargestellt. Dieses Verhalten lässt sich auch mit der in Abschn. 1 behandelten Druckausbreitung verstehen. Am Austrittsende der Düse soll sich eine Kammer anschließen, in der der Druck durch eine Drossel geregelt werden kann (Abb. 4.8). Der Druck in der Kammer p_2 sei größer als der kritische Druck p'. Wird p_2 durch weiteres Öffnen der Drossel erniedrigt, läuft eine Verdünnungswelle in die Düse und stellt den neuen Strömungszustand her. Bei weiterem Absenken von p_2 wird in der Mündung schließlich Schallgeschwindigkeit erreicht. Wird der Druck p_2 weiter reduziert können sich die Störungen die sich mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten nicht stromauf in die Mündung fortpflanzen. Der Zustand bleibt dort konstant.

2.1 Laval-Düsenströmung

Um bei überkritischen Druckverhältnissen eine geregelte Expansion zu erhalten, hat der schwedische Ingenieur *G. de Laval* 1883 bei der Konstruktion seiner Dampfturbine Ausflussdüsen der in Abb. 4.9 gezeigten Form verwendet. Ist der Druck vor der Düse p_0 vorgegeben, lassen sich die zu jedem niedrigeren Druck p zugehörigen Werte von w und v/w entsprechend der Abb. 4.5 für die reibungsfreie Strömung bestimmen. Mit der Beziehung $Q = A \cdot \rho \cdot w = A \cdot w/v$ für die Durchflussmenge, lässt sich für jeden gegebenen Wert von Q der zu jedem Querschnitt A gehörende Wert von v/w bestimmen. Aus Abb. 4.5 kann der zugehörige Druck ermittelt werden. Bei der Strömung durch die Laval-Düse fällt das Minimum des Stromfadenquerschnitts mit dem Querschnittsminimum der Düse zusammen. Die Ausflussmenge hat dort ein Maximum und wird wie bei einer einfachen Mündung aus Gl. (4.14) berechnet. Der Druckverlauf in der Düse folgt der fett gezeichneten Linie in Abb. 4.9 zum unteren Enddruck p_{u}. Da zu einem Wert von v/w entsprechend der Abb. 4.5 immer zwei Drücke gehören, ergibt sich von der engsten Stelle an noch ein zweiter möglicher Druckverlauf, der zu dem oberen Enddruck p_{o} als Außendruck p_2 führt.

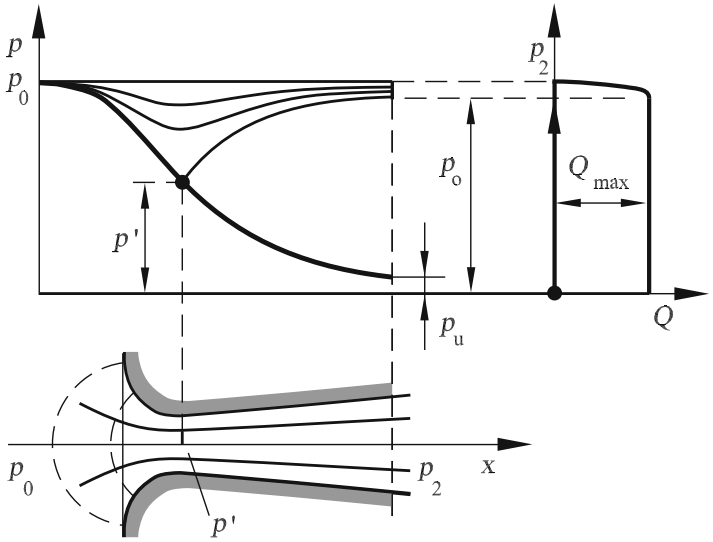


Abb. 4.9 Strömung durch eine Laval-Düse

Bestimmt man den zu kleineren Ausflussmengen gehörenden Druckverlauf, erhält man die Linien oberhalb p_o. Der Verlauf der Ausflussmenge Q in Abhängigkeit des Druckes p_2 am Düsenende ist im rechten Diagramm der Abb. 4.9 dargestellt. Die Ausflussmenge wächst von Null bis Q_{max}. Vom Druck p_o ab wird im engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit erreicht, und die Ausflussmenge bleibt bei einer weiteren Druckabsenkung konstant.

Es zeigt sich, dass die Strömung für Außendrücke zwischen p_o und p_u nicht verlustfrei erfolgt. Beobachtungen von *A. Stodola* führten zu der Erkenntnis, dass in diesem Bereich unstetige Verdichtungen (Verdichtungsstöße) auftreten, die in Abschn. 4 behandelt werden. Für deren Berechnung wird neben der Kontinuitäts- und Bernoulli-Gleichung der *Energiesatz* benötigt.

3 Energiesatz

Strömungen können in vielfacher Weise mit Verlusten mechanischer Energie verbunden sein. Die Verluste können durch Reibung, Turbulenz oder unstetige Vorgänge wie Verdichtungsstöße verursacht werden. Die dabei vernichtete mechanische Energie wird in Wärmeenergie umgewandelt, die bei Gasen durch weitere Expansion wieder nutzbringend verwendet werden kann.

Der zur Beschreibung der Verluste erforderliche Energiesatz wird analog der Herleitung des Impulssatzes in dem Abschn. 7 des Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit für eindimensionale reibungsfreie Strömungen abgeleitet.

Es wird die Energieänderung in einem abgegrenzten Teil einer stationären Gasströmung betrachtet. Hierfür wird ein Stück eines Stromfadens (Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit, Abb. 33) verwendet. Die Änderung im abgegrenzten Gasvolumen in der Zeit dt besteht darin, dass bei A_1 das Massenteilchen $\mathrm{d}m = \rho_1 \cdot A_1 \cdot w_1 \cdot \mathrm{d}t$ verschwindet und bei A_2 ein Massenteilchen $\mathrm{d}m' = \rho_2 \cdot A_2 \cdot w_2 \cdot \mathrm{d}t$ hinzukommt. Aus der Kontinuität folgt $\mathrm{d}m = \mathrm{d}m'$. Bei der Verschiebung der Gasmasse tritt eine Änderung des Energieinhaltes auf, der gleich der im Zeitintervall dt von außen zugeführten Energie sein muss. Der Energieinhalt eines Massenteilchens besteht aus seiner *kinetischen Energie*, seiner *potentiellen Energie* und seiner *Wärmeenergie*, der so genannten *inneren Energie* e. Wird die potentielle Energie nur durch die Erdschwere erzeugt, ist der Energieinhalt der Masse dm gleich $\mathrm{d}m \cdot (w^2/2 + g \cdot z + e)$. Die Energiezufuhr an die im Stromfaden enthaltene Masse besteht aus der Druckarbeit an den Endflächen und der Wärmezufuhr durch die Seitenflächen. Die Reibungsarbeit wird vernachlässigt. Die Druckarbeit an der Fläche A_1 ist $A_1 \cdot p_1 \cdot w_1 \cdot \mathrm{d}t$. Mit dem spezifischen Volumen v_1 und $\mathrm{d}m = \rho_1 \cdot A_1 \cdot w_1 \cdot \mathrm{d}t = A_1 \cdot w_1 \cdot \mathrm{d}t / v_1$ ergibt sich hieraus $\mathrm{d}m \cdot p_1 \cdot v_1$ und für die Druckarbeit an der Fläche A_2 entsprechend $\mathrm{d}m \cdot p_2 \cdot v_2$. Die Wärmezufuhr zwischen A_1 und A_2 wird mit $q_{1,2} \cdot \mathrm{d}m$ bezeichnet. Damit erhält man für die Änderung des Energieinhaltes:

$$\mathrm{d}m \cdot \left(\frac{w_2^2}{2} + g \cdot z_2 + e_2\right) - \mathrm{d}m \cdot \left(\frac{w_1^2}{2} + g \cdot z_1 + e_1\right) = \mathrm{d}m \cdot (p_1 \cdot v_1 - p_2 \cdot v_2 + q_{1,2}) \,.$$

Daraus folgt:

$$\frac{w_2^2}{2} + g \cdot z_2 + e_2 + p_2 \cdot v_2 = \frac{w_1^2}{2} + g \cdot z_1 + e_1 + p_1 \cdot v_1 + q_{1,2}$$

oder bei beliebigem Ort des Endquerschnittes:

$$\frac{w^2}{2} + g \cdot z + e + p \cdot v = \text{konst.} + q \,. \tag{4.15}$$

In differentieller Form ergibt sich die Gleichung:

$$w \cdot \mathrm{d}w + g \cdot \mathrm{d}z + \mathrm{d}e + \mathrm{d}(p \cdot v) = \mathrm{d}q \,. \tag{4.16}$$

$e + p \cdot v$ ist die *Enthalpie* h. Für ideale Gase konstanter spezifischer Wärme gilt:

$$e = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot p \cdot v = c_v \cdot T \,,$$

$$h = e + p \cdot v = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot p \cdot v = c_p \cdot T.$$

c_v und c_p sind die spezifischen Wärmen bei konstantem Volumen bzw. Druck. Bei einer stationären Strömung ohne Wärmeübergang bleibt die Gesamtentalpie konstant, weil vorhandene Reibungsarbeit vollständig in innere Energie umgewandelt wird. Für Schichtenströmungen kann die Schwerkraft vernachlässigt werden, so dass die Energiegleichung die folgende Form annimmt:

$$h + \frac{w^2}{2} = \text{konst.}\,. \tag{4.17}$$

Nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik gilt für jedes Massenelement des Gases, dass die durch Wärmeleitung zugeführte Wärme und die in Wärme umgewandelte Reibungsarbeit dazu verwendet werden, die innere Energie zu erhöhen und Expansionsarbeit zu leisten. Mit der an einem Massenelement geleisteten Reibungsarbeit $\mathrm{d}W_R$ folgt:

$$\mathrm{d}q + \mathrm{d}W_R = \mathrm{d}e + p \cdot \mathrm{d}v\,. \tag{4.18}$$

Addiert man Gl. (4.18) zu Gl. (4.16) ergibt sich mit $\mathrm{d}(p \cdot v) = p \cdot \mathrm{d}v + v \cdot \mathrm{d}p$:

$$w \cdot \mathrm{d}w + g \cdot \mathrm{d}z + v \cdot \mathrm{d}p + \mathrm{d}W_R = 0\,. \tag{4.19}$$

Durch Integration erhält man die um den Reibungsterm W_R ergänzte Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{w^2}{2} + g \cdot z + \int v \cdot \mathrm{d}p + W_R = \text{konst.}\,. \tag{4.20}$$

4 Theorie des senkrechten Verdichtungsstoßes

In einer Parallelströmung der Geschwindigkeit w_1 und dem Druck p_1 wird das spezifische Volumen v_1 durch einen stationären *senkrechten Verdichtungsstoß* in der Ebene AA (Abb. 4.10) unter Verringerung der Geschwindigkeit auf w_2 und Erhöhung des Druckes auf p_2 unstetig auf das kleinere spezifische Volumen v_2 verdichtet. Für die Änderung der Zustandsgrößen und der Geschwindigkeit über den senkrechten Verdichtungsstoß gelten die folgenden Gleichungen:

Kontinuitätsgleichung:

$$m = \frac{w_1}{v_1} = \frac{w_2}{v_2}\,, \tag{4.21}$$

Impulsgleichung:

$$m \cdot (w_1 - w_2) = p_2 - p_1\,, \tag{4.22}$$

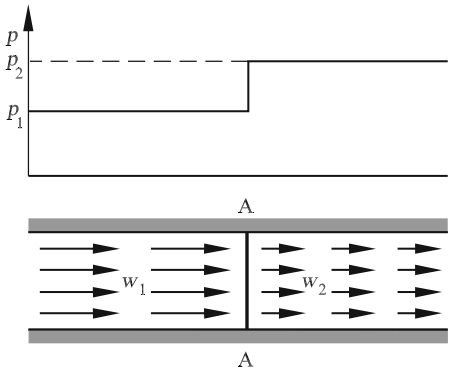


Abb. 4.10 Senkrechter Verdichtungsstoß

Energiegleichung (ohne Wärmezu- oder abfuhr q):

$$\frac{w_1^2}{2} + h_1 = \frac{w_2^2}{2} + h_2\,, \tag{4.23}$$

m ist der auf die Flächeneinheit bezogene Massenstrom. Die Enthalpie h ist eine Funktion von p und v. Mit der Gl. (4.21) lassen sich w_1 und w_2 in Gl. (4.22) eliminieren. Man erhält $p_2 - p_1 = (v_1 - v_2) \cdot m^2$. Daraus ergibt sich mit der Energiegleichung (4.23):

$$(p_2 - p_1) \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} = h_2 - h_1\,.$$

Die hieraus erhaltene Beziehung p_2 in Abhängigkeit von v_2 für gegebenes p_1 und v_1 wird *Hugoniot-Kurve* genannt.

Sind drei Zustandsgrößen, z. B. p_1, v_1 und p_2 gegeben, lässt sich die vierte, hier v_2, ermitteln. Daraus ergibt sich m und damit auch die Geschwindigkeiten w_1 und w_2. Für den senkrechten Verdichtungsstoß gilt:

$$w_1 \cdot w_2 = c'^2\,,$$

mit der kritischen Schallgeschwindigkeit c' der Zuströmung. Von den Geschwindigkeiten w_1 und w_2 ist die eine größer und die andere kleiner als die Schallgeschwindigkeit c'. Theoretisch ist sowohl der Verdichtungsstoß als auch die unstetige Verdünnung möglich. Da nur beim Verdichtungsstoß die Entropie zunimmt, ist nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik nur dieser physikalisch möglich.

Die Gl. (4.21), (4.22) und (4.23) des stationären Verdichtungsstoßes lassen sich durch eine Änderung des Bezugssystems auch auf eine instationäre Verdichtungswelle anwenden. Überlagert man dem strömenden Fluid der Abb. 4.10 die Geschwindigkeit w_1, wird die Geschwindigkeit vor der Stoßebene Null. Der Stoß bewegt sich mit der Geschwindigkeit $U = w_1$ nach links und die Gasmasse hinter dem Stoß strömt mit der Geschwindigkeit $w = w_1 - w_2$ nach.

Die Impulsgleichung ergibt für die instationäre Stoßbewegung $p_2 - p_1 = \rho \cdot U \cdot w$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit U des Stoßes ist immer größer als die Schallgeschwindigkeit und kann für beliebig große Druckunterschiede auch beliebig groß werden. Solch große Fortpflanzungsgeschwindigkeiten können bei Explosionen beobachtet werden.

Beim Verdichtungsstoß führt der in $h_1 - h_2$ enthaltene Betrag $(w_1^2 - w_2^2)/2$ zur Vergrößerung des Wärmeinhalts. Beim gekrümmten Verdichtungsstoß, z. B. der Kopfwelle der Abb. 4.3, erfahren die verschiedenen Stromfäden eine unterschiedliche Erwärmung, so dass die Homogenität der Gasmasse und deshalb auch die Drehungsfreiheit der Strömung hinter dem Stoß verloren geht.

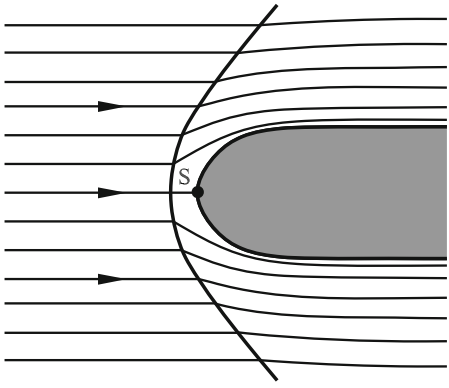
4.1 Kopfwelle

Bei der Überschallumströmung stumpfer Körper stellt sich vor dem Körper eine stationäre Kopfwelle (Abb. 4.11) ein. Sie kann in der Umgebung der Staustromlinie mit den Gleichungen des senkrechten Verdichtungsstoßes berechnet werden. Der Drucksprung über die Kopfwelle setzt sich seitlich als schräger Verdichtungsstoß fort. Mit zunehmender Entfernung vom Körper nimmt der Druckanstieg in der Kopfwelle ab und der schiefe Verdichtungsstoß geht in eine normale Kegelwelle über. Die Kopfwelle liegt bei großen Geschwindigkeiten eng am Körper an, bei geringeren Anströmgeschwindigkeiten wird der Stoßabstand größer.

Für den mit Überschallgeschwindigkeit bewegten Körper sieht das Strömungsbild entsprechend aus. Die Kopfwelle hört man z. B. beim Überschallflugzeug bzw. dem Geschoss in Abb. 4.3 als Überschallknall. Die Druckerhöhung im Staupunkt S ist wie bei kleinen Geschwindigkeiten auch bei großen Geschwindigkeiten proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit:

$$p_s - p_\infty = \frac{\rho_\infty \cdot w_\infty^2}{2} \cdot c_p \,.$$

Abb. 4.11 Kopfwelle



Kopfwelle

Der Druckbeiwert c_p ist eine Funktion der Mach-Zahl. Die Druckerhöhung besteht aus zwei Anteilen, einem stetigen Anteil hinter der Kopfwelle und einem unstetigen Anteil über die Kopfwelle (Stoßanteil). Zum Vergleich wird der Druckbeiwert c_{p0} einer gedachten isentropen (verlustfreien) Verzögerung der Strömung bis zum Staupunkt betrachtet. Die Werte von c_p, dem Stoßanteil und von c_{p0} in Abhängigkeit der Mach-Zahl können der nachfolgenden Tabelle entnommen werden.

$M = w/c$	0	0,5	1,0	1,5	2	3	∞
c_p	1	1,065	1,275	1,53	1,655	1,75	1,85
Stoßanteil	-	-	0	0,92	1,25	1,48	1,65
c_{p0}	1	1,065	1,275	1,69	2,48	4,85	∞

Durch einen Analogieschluss lässt sich aus dem Verhalten des Staudruckes folgern, dass auch der Widerstand bei sehr großen Geschwindigkeiten wieder proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist.

4.2 Senkrechter Verdichtungsstoß in der Laval-Düse

Liegt am Düsenende der Laval-Düse (Abb. 4.9) der Außendruck p_2 zwischen p_o und p_u, tritt in der Düse ein senkrechter Verdichtungsstoß auf. Dieser führt von der Überschall- zur Unterschallströmung. Damit können die Druckverläufe der Abb. 4.9 bei demselben Massenstrom und derselben Gesamtenergie ergänzt werden. Abb. 4.12 zeigt die entsprechenden Druckverläufe. Der Übergang vom normalen Druckverlauf von p_1 nach p_u zu den vom Außendruck p_2 abhängenden Druckverteilungen wird durch den Verdichtungsstoß hergestellt. Dessen Lage wird durch die Impulsgleichung eindeutig festgelegt.

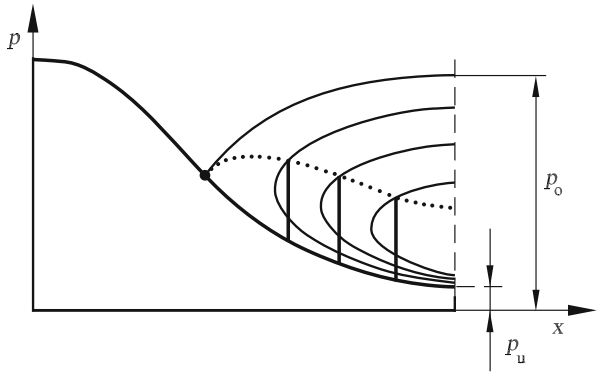


Abb. 4.12 Druckverlauf in der Laval-Düse mit Verdichtungsstößen

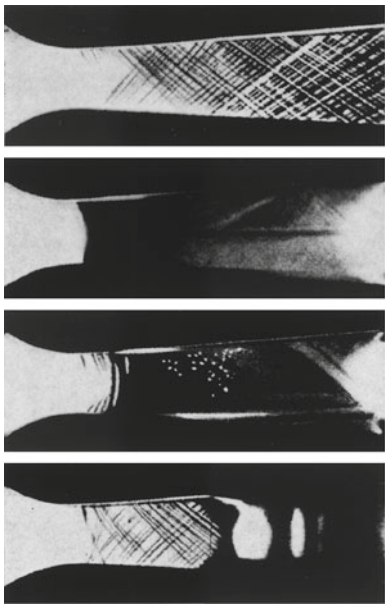


Abb. 4.13 Schlierenaufnahmen von Laval-Düsenströmungen, *L. Prandtl* 1907

Tatsächlich sind die Vorgänge innerhalb der Laval-Düse komplizierter. An Stelle des senkrechten Verdichtungsstoßes kann auch eine Stoßverzweigung mit schiefen Verdichtungsstößen auftreten. Die Wechselwirkung der Verdichtungsstöße mit der Wandgrenzschicht kann aufgrund des plötzlichen Druckanstiegs zur Strömungsablösung führen.

Die Abb. 4.13 zeigt Schlierenaufnahmen von *L. Prandtl* 1907 bei unterschiedlichen Druckverhältnissen am Düsenende. Im ersten Bild ist die ungestörte Beschleunigung von Druckluft von einem Anfangsdruck $p_0 = 7\ bar$ auf Atmosphärendruck gezeigt. Die Düsenwände wurden aufgeraut, so dass die sich kreuzenden Störungen (Charakteristiken) von stationären Schallwellen im Überschallteil der Düse sichtbar werden. Das zweite Bild veranschaulicht den Dichteverlauf ohne Erreichen der Schallgeschwindigkeit. Die Dichte fällt bis zum engsten Querschnitt ab und steigt dann wieder an. Auch bei aufgerauter Wand zeigen sich keine Störungen im Strömungsfeld. Das dritte Bild zeigt einen Verdichtungsstoß stromab des engsten Querschnitts der Düse. Man erkennt die stationären Schallwellen im Überschallteil vor dem Stoß und die kontinuierliche Dichtezunahme der verzögerten Unterschallströmung stromab des senkrechten Verdichtungsstoßes. Wird der Außendruck p_2 weiter abgesenkt, wandert der Verdichtungsstoß in Richtung Düsenende. Aufgrund der Wechselwirkung mit der Wandgrenzschicht kommt es zur Stoßverzweigung und zur Ablösung der Grenzschicht, die im vierten Bild der Abb. 4.13 zu sehen ist.

5 Strömungen um Ecken, Freistrahlen

5.1 Überschallströmung um eine Ecke

Es wird zunächst eine Überschallströmung betrachtet, bei der im Punkt A der Wand (Abb. 4.14) unstetig eine kleine Druckabsenkung eintritt. Diese Druckerniedrigung pflanzt sich unter dem Machschen Winkel α fort und führt zu einer Beschleunigung der Strömung in der Richtung senkrecht zu dem Drucksprung. Dadurch erhöht sich die Strömungsgeschwindigkeit und die Strömung wird gleichzeitig abgelenkt. Tritt im Punkt A eine weitere stetige Druckerniedrigung ein, pflanzt sich diese in der abgeänderten Strömung unter einem anderen Machschen Winkel $\alpha' < \alpha$ fort und bewirkt weitere Vergrößerung und Ablenkung der Geschwindigkeit.

Diese *Prandtl-Meyer-Expansion*, die in Wirklichkeit stetig verläuft, lässt sich als Potentialströmung theoretisch behandeln. Längs eines jeden vom Punkte A ausgehenden Strahls (Charakteristik) sind der Druck sowie die Größe und Richtung der Geschwindigkeit konstant. Jede Charakteristik bildet mit der Strömungsrichtung den Machschen Winkel. Die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Charakteristik ist gleich der entsprechenden Schallgeschwindigkeit des auf ihr vorliegenden Strömungszustandes.

Der Strömungsverlauf der Expansion von der Schallgeschwindigkeit bis zur Maximalgeschwindigkeit (Expansion ins Vakuum) ist in Abb. 4.15 dargestellt. Die

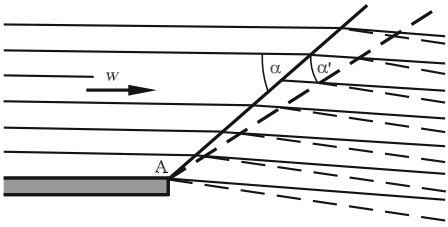


Abb. 4.14 Überschallströmung mit Druckabsenkung

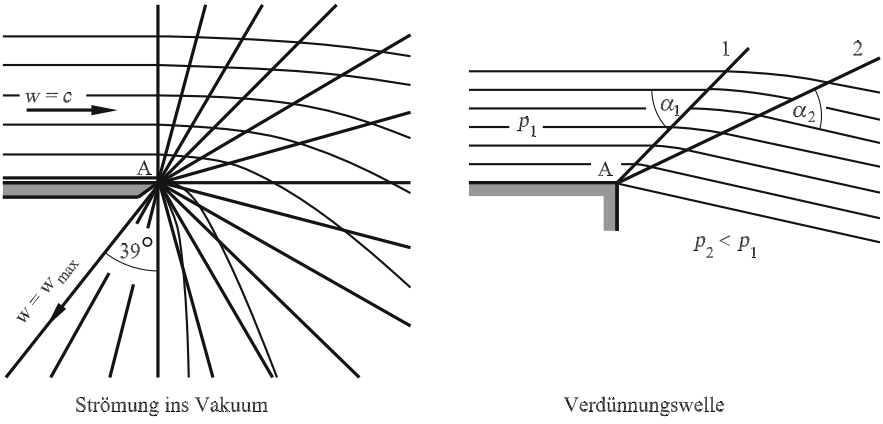


Abb. 4.15 Prandtl-Meyer-Eckenströmungen

Strahlumlenkung beträgt 129°. Da die Charakteristiken Strahlen sind, entlang denen der Druck und die Geschwindigkeit konstant sind, lassen sich von zwei charakteristischen Fahrstrahlen eingeschlossene Stücke mit geradlinigen Strömungen kombinieren. Wenn z. B. eine Überschallströmung mit der Geschwindigkeit w_1 parallel zu einer Wand strömt und hinter dem Ende der Wand (A im rechten Bild der Abb. 4.15) ein kleinerer Druck p_2 als in der Parallelströmung mit dem Druck p_1 herrscht, setzt sich die Strömung bis zur Charakteristik 1, die den Machschen Winkel α_1 mit der Strömungsrichtung bildet ($\sin(\alpha_1) = c_1/w_1$), unverändert fort. Stromab der Charakteristik führt eine Expansion zwischen den Charakteristiken 1 und 2 vom Druck p_1 auf p_2. Nach Erreichen des Druckes p_2 auf der Charakteristik 2 setzt sich die Strömung in der neuen Richtung geradlinig und gleichförmig fort. Die Strömungsrichtung bildet mit der Charakteristik 2 den Winkel α_2, der zu w_2 gehört.

Ist eine Wand mit einer oder mehreren konvexen Ecken vorhanden, so erfolgt die Strömung auch hier in einer Kombination von geradlinigen Strömungen und Expansionsgebieten, die immer unter dem Machschen Winkel aneinander grenzen. Auch die Strömung längs einer stetig gekrümmten Wand lässt sich durch Zusammensetzen aus einzelnen Elementen darstellen. Die Wand kann für diese Vorgehensweise auch konkav gekrümmt sein. Die Lösung der Potentialgleichung bleibt in diesem Fall allerdings nur richtig, solange sich die mit den jeweiligen Machschen Winkeln gebildeten Strahlen nicht schneiden (Abb. 4.16). Tritt dieses doch auf, wird die Strömung an dieser Stelle unstetig und es stellt sich ein Verdichtungsstoß ein.

Bei einer konkaven Ecke, die einem Druckanstieg entspricht sowie beim Ausströmen in einen Raum mit höherem Druck, wird die Strömung immer unstetig. Es bilden sich *schiefe Verdichtungsstöße* (Abb. 4.17) aus. Die Charakteristik 2 in der

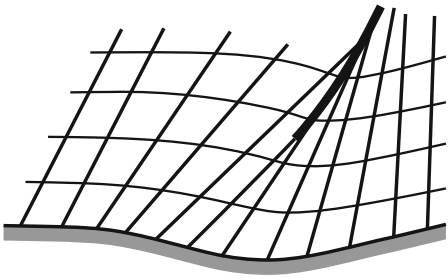


Abb. 4.16 Strömung längs einer gekrümmten Wand

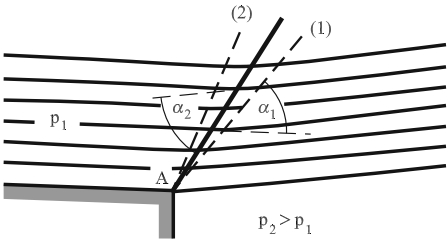


Abb. 4.17 Schiefer Verdichtungsstoß

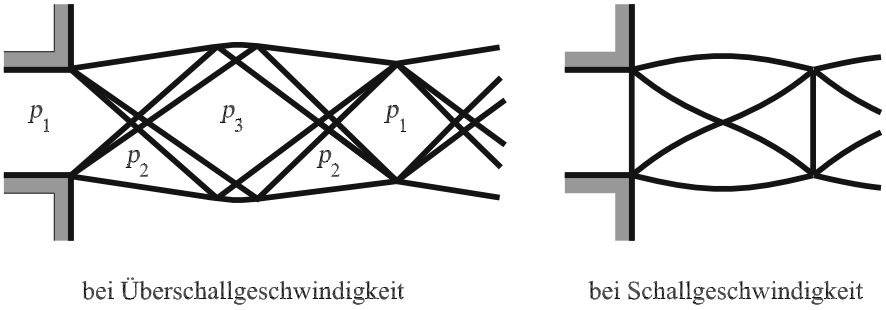


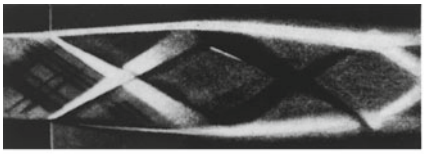
Abb. 4.18 Wellenfiguren von Freistrahlen

Abb. 4.17 würde stromauf der Charakteristik 1 liegen, was unmöglich ist. Stattdessen ergibt sich eine unstetige Verdichtung, wobei die Stoßebene zwischen den Richtungen 1 und 2 liegt. Die Gleichungen für die senkrecht zur Stoßebene liegenden Geschwindigkeitskomponenten sind dieselben, wie für den senkrechten Verdichtungsstoß in Abschn. 4. Es überlagert sich einfach die beim Stoß unverändert bleibende transversale Geschwindigkeitskomponente. Die drei oberen Schlierenbilder der Abb. 4.19 sind Beispiele dieser theoretischen Überlegungen für die Eckenströmung mit Expansion bzw. mit schiefen Verdichtungsstößen am Austritt einer Düse.

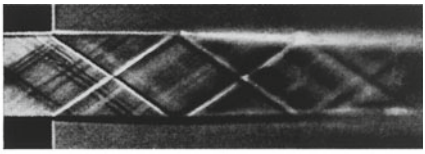
5.2 Freistrahlen

In einem Überschallfreistrahl bildet sich eine periodische Struktur von Verdichtungsstößen und Expansionswellen. Die schiefen Verdünnungs- und Verdichtungswellen durchdringen sich ohne gegenseitige Störung. Sie werden an freien Strahlgrenzen total reflektiert und zwar derart, dass eine Expansionswelle als Verdichtungswelle reflektiert wird und umgekehrt. Für einen parallelen Überschallstrahl bei dem am Austritt ein geringerer Druck als im Strahl herrscht entsteht entsprechend dem linken Bild der Abb. 4.18 an jeder Austrittskante eine Expansionswelle. Diese durchkreuzen sich und werden an der gegenüberliegenden Strahlgrenze als Verdichtungsstöße reflektiert. Sie pflanzen sich stromab fort und werden am gegenüberliegenden Strahlrand als Expansionswellen reflektiert. Dieser Verlauf wiederholt sich periodisch. Der Druck p_3 im Mittelfeld der Welle ist niedriger als der Außendruck p_2, in ähnlichem Maß wie p_1 größer ist als p_2.

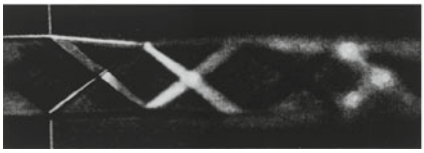
Ist der Außendruck größer als der Druck im Strahl, so entstehen zunächst schiefe Verdichtungsstöße (Abb. 4.18). Diese werden am Strahlrand als Expansionswellen reflektiert, die sich dann entsprechend dem ersten Bild der Abb. 4.19 fortsetzen. Ist die Anfangsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit, ist am Austritt der Machsche Winkel $\alpha = 90°$ und es ergibt sich die charakteristische Knoten-



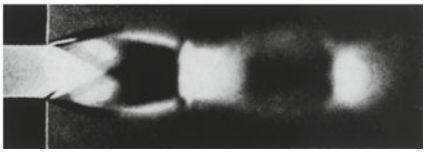
Überschallströmung bei Überdruck



Überschallströmung bei Gleichdruck



Überschallströmung bei Unterdruck



Strömung bei Schallgeschwindigkeit

Abb. 4.19 Freistrahlstrukturen bei unterschiedlichen Ausströmbedingungen in der Mündung, *L. Prandtl* 1907

struktur des rechten Bildes der Abb. 4.18 mit senkrechten Verdichtungsstößen. Die Schlierenbilder der Abb. 4.19 zeigen die Freistrahlstrukturen bei Überdruck, bei Gleichdruck und bei Unterdruck am Austritt. Die Mündungsgeschwindigkeit ist bei den ersten drei Aufnahmen dieselbe. Das vierte Bild zeigt ein Beispiel für den Fall, dass die Mündungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit ist. Bei den gezeigten Schlierenbildern bedeuten helle Bereiche Verdünnung und dunkle Gebiete Verdichtung. Verlässt der Strahl die Mündung nicht als Parallelstrahl, werden die Wellenbilder komplexer. Die Wellenlänge bleibt nahezu konstant. Sie ist für die ebene Bewegung unter Berücksichtigung der Gl. (4.5):

$$\lambda = 2 \cdot d_m \cdot \cot(\alpha_m) = 2 \cdot d_m \cdot \sqrt{\left(\frac{w}{c}\right)_m^2 - 1}\,.$$

Dabei ist d_m der mittlere Strahldurchmesser, α_m und $(w/c)_m$ sind Mittelwerte von α und w/c.

Die Knotenstruktur bei runden Freistrahlen, deren Verhältnisse wegen der kegelförmigen Durchkreuzung der Wellen komplizierter ist, zeigt Abb. 4.6. Die Wellenlänge in diesen Freistrahlen, bei denen die Mündungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit ist, wurde für Druckluft von *R. Emden* 1899 experimentell zu

$$\lambda = 0.89 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{p_0 - 1.9 \cdot p_2}{p_2}}$$

bestimmt. d bedeutet dabei den Mündungsdurchmesser, p_0 den Ruhedruck und p_2 den Austrittsdruck.

6 Strömungen mit schwachen Störungen

In diesem Kapitel werden reibungsfreie stationäre Strömungen behandelt, bei denen die Geschwindigkeit sowohl nach Größe wie nach Richtung nur wenig von einer gegebenen Geschwindigkeit u_0 abweicht. Dabei kann u_0 eine Unterschall- oder Überschallgeschwindigkeit sein. Die kleinen Abweichungen der Geschwindigkeit von u_0 werden mit u und v bezeichnet. Alle Herleitungen werden nur bis zur ersten Ordnung in u und v durchgeführt. Die Strömung hat den Geschwindigkeitsbetrag $w = \sqrt{(u_0 + u)^2 + v^2}$.

Es gilt die verallgemeinerte *Bernoulli*-Gleichung (4.8)

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \text{konst.}$$

oder in differentieller Form:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} + w \cdot \mathrm{d}w = 0\,.$$

Mit $\mathrm{d}p/\rho = (\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho) \cdot \mathrm{d}\rho/\rho = c^2 \cdot \mathrm{d}\rho/\rho$ folgt hieraus die Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\frac{w^2}{c^2} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{w} = -M^2 \cdot \frac{\mathrm{d}w}{w}\,, \tag{4.24}$$

die für alle Strömungen mit einheitlicher *Bernoulli*-Konstante gilt, d. h. für drehungsfreie Strömungen. Die relative Änderung der Dichte $\mathrm{d}\rho/\rho$ verschwindet bei kleinen *Mach*-Zahlen. Deshalb kann für *Mach*-Zahlen die kleiner als 0,2 sind inkompressibel gerechnet werden. Bei $M = 1$ ist die relative Änderung der Dichte gerade entgegengesetzt der relativen Geschwindigkeitsänderung. Das bedeutet ein konstantes $\rho \cdot w$ oder einen konstanten Stromfadenquerschnitt.

Die Kontinuitätsgleichung ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot (u_0 + u)) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) = 0\,.$$

Da die Geschwindigkeitsstörung wegen $w^2 = (u_0 + u)^2 + v^2$ in erster Näherung durch die u-Störung gegeben ist, erhält man aus der Kontinuitätsbedingung mit Gl. (4.24) und durch Linearisierung in erster Näherung:

$$(1 - M_0^2) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,. \tag{4.25}$$

Dies ist die *lineare gasdynamische Gleichung* mit der Mach-Zahl $M_0 = u_0/c_0$. Diese Gleichung gilt nicht für den transsonischen Bereich $M \approx 1$, in dem die Störungen nicht mehr klein sind und in dem eine Linearisierung nicht möglich ist. Setzt man

unter Einführung eines Störpotentials φ (siehe Abschn. 5 des Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit)

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{und} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,,$$

ergibt sich aus Gl. (4.25):

$$(1 - M_0^2) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0\,. \tag{4.26}$$

Der Vorfaktor von $\partial^2\varphi/\partial x^2$ wechselt sein Vorzeichen bei $M_0 = 1$. Für Unterschall-Mach-Zahlen $M_0 < 1$ ist die Differentialgleichung entsprechend der Potentialgleichung vom *elliptischen* Typ. Für Überschall-Mach-Zahlen ist sie vom Typ der Schwingungsdifferentialgleichung, d. h. vom *hyperbolischen* Typ. Für $M_0 > 1$ ist jede stetige und zweimal differenzierbare Funktion F mit dem Argument $(y \pm x \cdot \tan(\overline{\alpha}))$ eine Lösung der Gl. (4.26), wenn $\overline{\alpha}$ passend bestimmt wird. Man erhält:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \mathrm{F}'' \cdot \tan^2(\overline{\alpha}) \quad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \mathrm{F}''\,.$$

Um Gl. (4.26) zu erfüllen muss

$$(M_0^2 - 1) \cdot \tan^2(\overline{\alpha}) = 1$$

gelten, d. h.

$$\tan(\overline{\alpha}) = \pm \frac{1}{\sqrt{M_0^2 - 1}}\,.$$

Daraus folgt:

$$\sin(\overline{\alpha}) = \frac{\tan(\overline{\alpha})}{\sqrt{1 + \tan^2(\overline{\alpha})}} = \pm \frac{1}{M_0}\,.$$

Die Lösung stellt Wellen von beliebiger Wellenform dar, deren gerade Fronten ($y = \pm x \cdot \tan(\overline{\alpha}) + \text{konst.}$) im ganzen Strömungsfeld mit dem konstanten Mach-Winkel $\overline{\alpha}$ gegen die x-Achse nach links oder rechts geneigt sind.

Für *Unterschallströmungen* ergeben sich charakteristische Lösungen der folgenden Form: Die kompressible Strömung mit schwachen Störungen soll mit der entsprechenden inkompressiblen Strömung unter den gleichen Voraussetzungen verglichen werden. Dabei werden die kleinen Abweichungen der Geschwindigkeit von u_0 der inkompressiblen Strömung mit U und V bezeichnet und die zugehörigen Koordinaten mit X und Y. Die inkompressible Strömung muss nach Abschn. 5 des

Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit mit dem zugehörigen Potential Φ die Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = 0 \tag{4.27}$$

erfüllen. Der Vergleich mit der kompressiblen Strömung erfolgt derart, dass die Potentiale φ und Φ einander proportional gesetzt werden:

$$\varphi(x, y) = \mathrm{a} \cdot \Phi(X, Y)\,. \tag{4.28}$$

a ist ein Zahlenfaktor.

Damit sowohl φ die Differentialgleichung (4.26) als auch Φ die Gl. (4.27) erfüllt, muss die Zuordnung der Koordinaten von x zu X und von y zu Y mit verschiedenen Maßstäben erfolgen. Wird $Y/y = \mathrm{b} \cdot X/x$ mit dem Koordinaten-Maßstabsfaktor b gesetzt, kann durch geeignete Wahl von b die Zuordnung der Potentiale gemäß Gl. (4.28) erreicht werden. Zur Vereinfachung wird willkürlich $x = X$ gesetzt, wodurch sich $Y = \mathrm{b} \cdot y$ ergibt. Mit dieser Beziehung und mit der Gl. (4.28) folgt aus Gl. (4.26):

$$\mathrm{a} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \cdot (1 - M_0^2) + \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = 0\,. \tag{4.29}$$

Diese Gleichung wird mit Gl. (4.27) identisch, wenn $\mathrm{b}^2 = 1 - M_0^2$ gesetzt wird.

Der Winkel δ, den eine Stromlinie mit der x-Achse bildet ist

$$\tan(\delta) = \frac{v}{u_0 + u}\,.$$

Hierfür gilt in erster Näherung auch $\tan(\delta) = v/u_0 = (1/u_0) \cdot \partial\varphi/\partial y$. Entsprechend erhält man für die inkompressible Strömung mit dem Winkel Δ zwischen der Stromlinie und der X-Achse:

$$\tan(\Delta) = \frac{V}{u_0} = \frac{1}{u_0} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Y}\,.$$

Wird in beiden Strömungen ein und derselbe Körper umströmt, muss auf den Begrenzungsstromlinien $\tan(\delta) = \tan(\Delta)$ erfüllt sein. Hieraus folgt $\partial\varphi/\partial y = \partial\Phi/\partial Y$. Mit Gl. (4.28) und $Y = \mathrm{b} \cdot y$ ergibt sich $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = 1$, d. h. die Bedingung

$$\mathrm{a} = \frac{1}{\mathrm{b}} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_0^2}}\,. \tag{4.30}$$

Für den Vergleich der Druckverteilungen beider Strömungen reicht es aus, den Druckgradienten in x-Richtung zu betrachten. Die endlichen Druckunterschiede in den beiden Strömungen verhalten sich wie deren Gradienten. Aus dem nichtlinearen

Term der Euler-Gleichung $\rho \cdot (u_0 + u) \cdot \partial u/\partial x$ folgt in erster Näherung $\rho \cdot u_0 \cdot \partial u/\partial x = \rho \cdot u_0 \cdot \partial^2 \varphi/\partial x^2$. Der Term ist zu vergleichen mit dem Term $\rho \cdot u_0 \cdot \partial^2 \Phi/\partial X^2$ der inkompressiblen Strömung. Das Verhältnis ist a. Aus der Euler-Gleichung ergibt sich in erster Näherung $\partial p/\partial x = -\rho \cdot u_0 \cdot \partial u/\partial x$. Hieraus folgt, dass die Druckunterschiede der kompressiblen Strömung in erster Näherung um das $1/\sqrt{1 - M_0^2}$-fache größer sind als bei der inkompressiblen Vergleichsströmung.

6.1 Profilumströmung

Diese Beziehung kann näherungsweise für schlanke und schwach angestellte Tragflügel angewendet werden, sofern auf dem Flügel die Schallgeschwindigkeit nicht erreicht wird (Abb. 4.20). Der Auftrieb erhöht sich für die kompressible Tragflügelströmung im Vergleich mit der inkompressiblen Strömung ebenfalls mit dem in Gl. (4.30) angegebenen Verhältnis (*Prandtlsche Regel*).

Die Frage nach dem Wert von a in Gl. (4.28) kann auch anders formuliert werden. Wie muss ein Körper geformt sein, damit die Druckunterschiede in der kompressiblen Strömung und in der inkompressiblen Vergleichsströmung gleich groß sind. Diese Frage ist für den Fall von Bedeutung, dass der Druckverlauf bei der inkompressiblen Vergleichsströmung an der Grenze zur Strömungsablösung liegt. In diesem Fall muss $a = 1$ gewählt werden. Dann gilt $\tan(\delta) = b \cdot \tan(\Delta)$. Der Körper muss in der kompressiblen Strömung um so schlanker sein, je mehr sich u_0 der Schallgeschwindigkeit nähert, wenn eine Ablösung der Strömung vermieden werden soll.

6.2 Wellige Wand

Eine Strömung mit der mittleren Geschwindigkeit u_0 fließt entlang einer leicht gewellten Wand. Die Kontur der Wand ist durch die Gleichung

$$y_1 = a \cdot \sin(\mu \cdot x)\,, \text{mit} \qquad \mu = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$$

gegeben. Dabei ist λ die Wellenlänge. Aus $v/u_0 = \mathrm{d}y_1/\mathrm{d}x$ erhält man in der Nähe von $y = 0$:

$$v_0 = u_0 \cdot a \cdot \mu \cdot \cos(\mu \cdot x)\,.$$

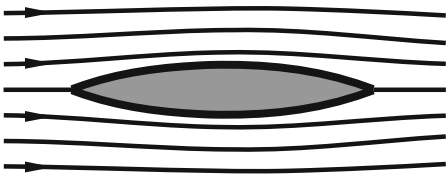


Abb. 4.20 Umströmung eines schlanken Profils

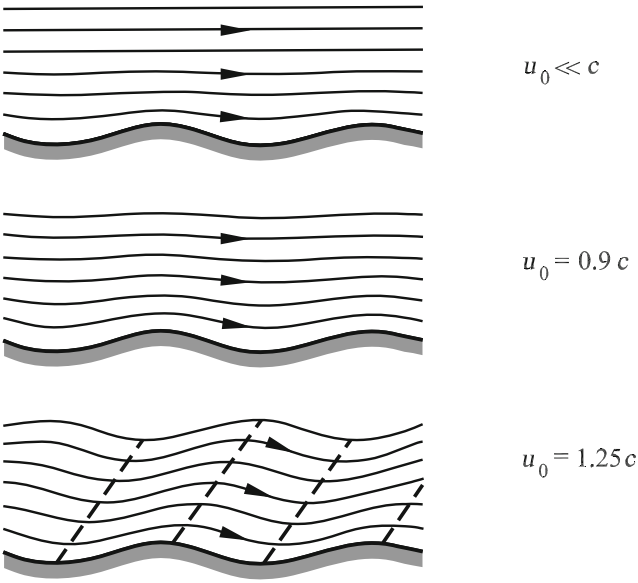


Abb. 4.21 Strömung über wellige Wand

In der inkompressiblen Vergleichsflüssigkeit ist $V_0 = v_0$ bei $Y = 0$. Das zugehörige Potential ist

$$\Phi = -u_0 \cdot a \cdot \cos(\mu \cdot X) \cdot e^{-\mu \cdot Y} .$$

Dem entspricht im kompressiblen Fluid das Potential:

$$\varphi = -A \cdot \cos(\mu \cdot x) \cdot e^{-\mu \cdot y \cdot \sqrt{1-M_0^2}} . \tag{4.31}$$

Für $y = 0$ ergibt sich daraus $v_0 = \partial\varphi/\partial y = A \cdot \mu \cdot \sqrt{1 - M_0^2} \cdot \cos(\mu \cdot x)$. Der Vergleich mit der inkompressiblen Strömung führt zu $A = u_0 \cdot a / \sqrt{1 - M_0^2}$. In der Abb. 4.21 ist die Strömung über eine wellige Wand für die inkompressible Strömung ($u_0 \ll c$) und die kompressible Strömung im Unterschall ($u_0 = 0,9 \cdot c$) und im Überschall ($u_0 = 1,25 \cdot c$) dargestellt.

7 Profilumströmungen

7.1 Überschallströmung

Bei genügend spitzen und schlanken Profilen lässt sich die Charakteristiken-Methode auch auf die zweidimensionale *Überschallumströmung von Profilen* anwenden. Der Druck auf jedes Oberflächenelement des Profils ist durch die An-

strömgeschwindigkeit und die Neigung des Oberflächenelements gegeben, wenn von kleinen Verlusten des vorderen Verdichtungsstoßes abgesehen wird. Bei dem umströmten Profil in Abb. 4.22 entsteht an der Profilspitze ein schräger Verdichtungsstoß (*Kopfwelle*) der einen Überdruck erzeugt. Durch die konvexe Krümmung der Profiloberfläche werden Verdünnungswellen gebildet, durch die der Überdruck abgebaut wird bis im hinteren Bereich des Profils Unterdruck entsteht. An der Hinterkante des Profils treffen die beiden Strömungen der Ober- und Unterseite unter ähnlichen Winkeln zusammen. Dies führt zu einem weiteren Verdichtungsstoß (*Schwanzwelle*). Dahinter ist der Druck wieder ungefähr gleich dem ungestörten Druck der Anströmung. Die Verdünnungswellen verlaufen divergenten. Die vom Vorderteil des Profils ausgehenden Wellen treffen dabei auf den vorderen Verdichtungsstoß, die vom Hinterteil ausgehenden auf die Schwanzwelle. Die Stärke dieser Verdichtungsstöße wird deshalb im Strömungsfeld allmählich schwächer. Das auf diese Weise theoretisch entworfene Bild wird durch das Schlierenbild der Abb. 4.22 bestätigt. Dabei wurde die Schlierenblende so positioniert, dass Aufhellung Dichtezunahme und Abdunkelung Dichteabnahme bedeutet.

Um den Einfluss der Anstellungsunabhängigkeit von der Dicke des Profils untersuchen zu können, wird zunächst die angestellte dünne Platte der Abb. 4.23 betrachtet.

Auf der Druckseite entsteht ein Verdichtungsstoß, auf der Saugseite eine Verdünnungswelle. Beide lenken die Strömungsrichtung um den Winkel α ab, den

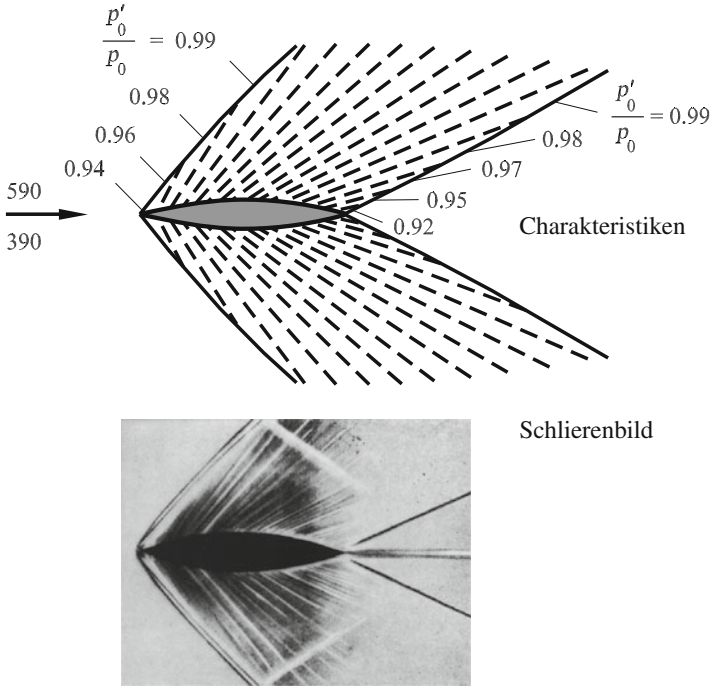


Abb. 4.22 Überschallströmung an einem schlanken Profil, p_0 Ruhedruck, p_0' Ruhedruck nach dem Verdichtungsstoß

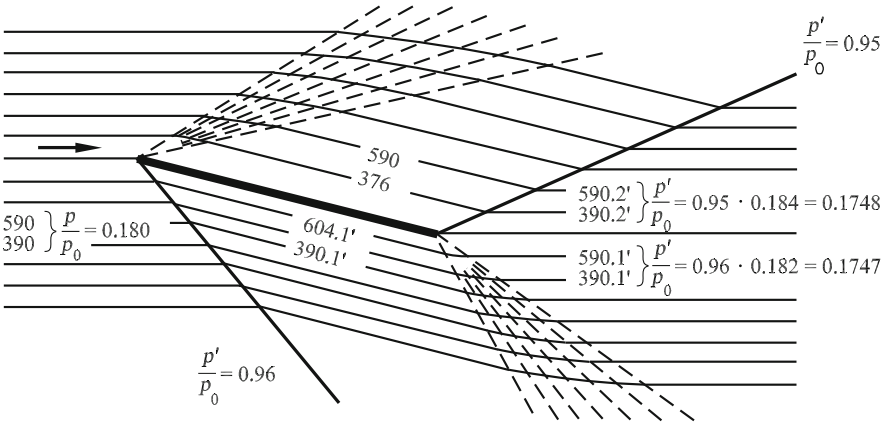


Abb. 4.23 Überschallströmung an einer angestellten Platte, Feldzahlen von *A. Busemann* 1929

Neigungswinkel der Platte gegen die Ausströmungsrichtung. Solange die Richtung der Strömung konstant bleibt, ändern sich Druck und Geschwindigkeit nicht. Die resultierende Kraft greift deshalb in der Mitte der Platte an. An der Hinterkante findet ein Druckausgleich statt, der auf der Saugseite einen Verdichtungsstoß und auf der Druckseite eine Verdünnungswelle zur Folge hat. Die resultierende Kraft ist bei kleinen Anstellwinkeln ungefähr proportional dem Anstellwinkel α und steht, bei reibungsfreier Strömung genau senkrecht auf der Platte. Das Äquivalent des Auftriebs ist durch die erzeugten Quergeschwindigkeiten in den beiden Wellen enthalten. Die Quergeschwindigkeit wird von einer gewissen Entfernung an durch das Einmünden der Verdünnungswellen in die Verdichtungsstöße geringer. In demselben Maße wächst aber deren Ausdehnung in der Breite, so dass hinter der Platte in jedem Querschnitt senkrecht zur Strömungsrichtung der Auftrieb als Impuls weiter übertragen wird.

Die dünne, vorne und hinten spitze Platte, gegebenenfalls mit schwach gewölbter Saugseite, ist das günstigste Profil für Überschallströmungen. Die üblichen vorne dicken Flügelprofile sind bei Überschallströmungen wegen des großen Widerstandes nicht geeignet. Das beste Verhältnis von Widerstand zu Auftrieb W/A ist deshalb im Gegensatz zu den Unterschallströmungen niemals kleiner als $\tan(\alpha)$.

Mit der Differentialgleichung (4.26) lassen sich Näherungslösungen der Überschallumströmung von Profilen der Abb. 4.22 und 4.23 ermitteln. Jedes Potential $\varphi = \mathrm{F}(x - y \cdot \cot(\alpha'))$ ergibt eine mögliche Störströmung zu der Grundströmung u_0. Dabei ist α' der Mach-Winkel der Anströmung.

Ist F' die Ableitung des Potentials nach dem Argument $x - y \cdot \cot(\alpha')$, erhält man für die Störkomponenten $u = \varphi_x = \mathrm{F}'$ und $v = \varphi_y = -\mathrm{F}' \cdot \cot(\alpha')$ oder

$$u = -\frac{v}{\cot(\alpha')} \,. \tag{4.32}$$

Da der Strömungswinkel näherungsweise durch $\tan(\delta) = v/u_0$ gegeben ist und die Druckunterschiede proportional zu u sind, ergibt sich für den Druckkoeffizienten c_p:

$$c_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot u_0^2} = 2 \cdot \tan(\delta) \cdot \tan(\alpha') \,. \tag{4.33}$$

Bei positiv angestellten Profilen entsteht ein Überdruck, bei negativ angestellten Profilen ein Unterdruck. Damit hat ein Flügel auch in einer reibungsfreien Überschallströmung einen Widerstand.

Um dimensionslose Beiwerte der Kräfte zu erhalten, werden die Kräfte durch das Produkt von Druck und Fläche dividiert. Dabei wird als Druck der Staudruck $\rho_0 \cdot u_0^2/2$ verwendet. Bei höheren *Mach*-Zahlen bedeutet der Staudruck $\rho_0 \cdot u_0^2/2$ den halben anströmenden Impuls, der mit der Druckerhöhung in der Kopfwelle verbunden ist. Als Fläche A wählt man die größte Projektionsfläche des Profils. Man setzt also

$$F_A = c_a \cdot A \cdot \frac{\rho_0 \cdot u_0^2}{2} \,, \qquad W = c_w \cdot A \cdot \frac{\rho_0 \cdot u_0^2}{2} \,. \tag{4.34}$$

Die schräg angestellte Platte in Abb. 4.23 hat in der Überschallströmung an der Oberseite einen konstanten Unterdruck und an der Unterseite einen konstanten Überdruck. Auf der Druck- und der Saugseite ergibt sich für c_a jeweils ein Anteil entsprechend Gl. (4.33), wenn der Strömungswinkel δ durch den Anstellwinkel α ersetzt wird:

$$c_a = \frac{4 \cdot \alpha}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \,. \tag{4.35}$$

Da die Tangentialkraft im Überschall ($M_0 > 1$) verschwindet, bedeutet das für den Widerstandsbeiwert:

$$c_w = c_a \cdot \tan(\alpha) = \frac{4 \cdot \alpha^2}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \,. \tag{4.36}$$

Die Gl. (4.35) und (4.36) wurden erstmals von *J. Ackeret* 1925 angegeben.

7.2 Transsonische Strömung

Aus dem Energiesatz Gl. (4.17) lässt sich für ideale Gase konstanter spezifischer Wärme nach Einführen der Schallgeschwindigkeit anstatt der Temperatur in der Enthalpie folgende exakte Beziehung herleiten:

$$\frac{1}{M^2} - 1 = \frac{\kappa + 1}{2} \cdot \left(\frac{c'^2}{w^2} - 1 \right). \tag{4.37}$$

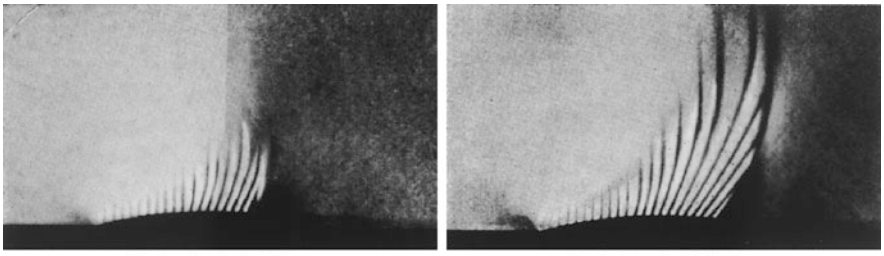
Dabei ist c' die kritische Schallgeschwindigkeit. Wenn sich w nur wenig von c' unterscheidet, wie das bei schallnaher Strömung $M \approx 1$ zutrifft, ergibt sich mit u als Störkomponente näherungsweise:

$$1 - M^2 = (\kappa + 1) \cdot \left(\frac{c'}{u_0 + u} - 1 \right) + \ldots = (\kappa + 1) \cdot \left(1 - \frac{u_0 + u}{c'} \right) + \ldots \tag{4.38}$$

Die Differenz $1 - M^2$ ist demnach proportional zu $c' - (u_0 + u)$.

Nähert man sich dem Wert $M_0 = 1$ von einer Überschallanströmgeschwindigkeit, löst sich die Kopfwelle von der Profilspitze ab und bewegt sich stromauf vom Körper weg. Die Schwanzwelle bleibt dagegen im Überschallgebiet am Ende des Profils erhalten. Je näher M_0 an 1 liegt, umso schwächer ist die Kopfwelle, bis sie bei $M_0 = 1$ schließlich ganz verschwindet. Es entsteht eine Druckverteilung, die im Staugebiet an der Profilnase Unterschallcharakter und im Unterdruckgebiet am Körper Überschallcharakter mit einer Schwanzwelle hat. Diese Schwanzwelle bleibt auch bei $M_0 < 1$ erhalten. Die lokalen Überschallgebiete, die bei transsonischer Unterschallanströmung auf den Profilen entstehen, zeigt die Abb. 4.24. Dort sind die Überschallcharakteristiken in den lokalen Überschallgebieten durch Störungen auf der Profiloberfläche sichtbar gemacht. Durch die stromab verschobene Saugspitze und den abschließenden Verdichtungsstoß wird ein Strömungswiderstand erzeugt.

In der Nähe der Schallanströmung ergibt sich vor allem am Vorderteil des Profils eine von M_0 nahezu unabhängige *Mach*-Zahlverteilung. Das lässt sich dadurch erklären, dass die Kopfwelle bei geringer Überschallanströmung weit vor dem Profil als nahezu senkrechter Stoß steht, der eine näherungsweise parallele Unterschallströmung erzeugt. Deshalb unterscheiden sich die Mach-Zahlverteilungen auf einem Profil nur geringfügig, wenn es mit $M_0 = 0.90$ oder mit $M_0 = 1.10$ angeströmt wird. Man bezeichnet diesen Effekt als *Einfrieren* der *Mach-Zahlverteilung*.



Ruhedruck 1.6 *bar* Ruhedruck 1.89 *bar*

Abb. 4.24 Lokale Überschallgebiete

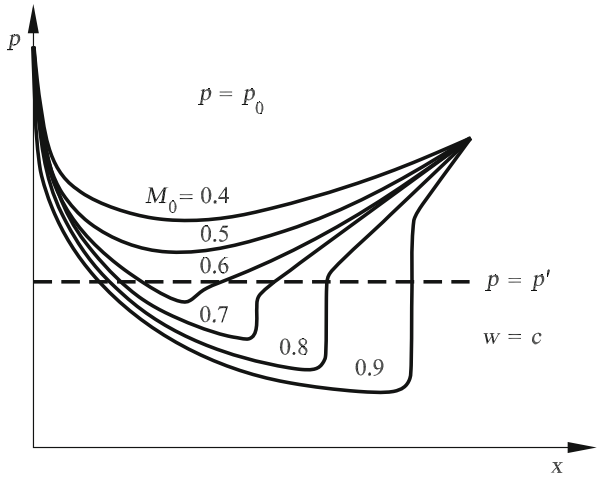


Abb. 4.25 Druckverlauf auf Profilen bei Unterschallanströmung

Mit Gl. 4.38 erhält man für den Druckkoeffizienten in erster Näherung:

$$c_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot u_0^2} = -2 \cdot \frac{u}{u_0} = -2 \cdot \left(\frac{u_0 + u}{c'} - 1 \right) = -\frac{2}{\kappa + 1} \cdot (M^2 - M_0^2) \quad (4.39)$$

Daraus ergibt sich für die Änderung von c_p mit M_0 bei $M_0 = 1$:

$$\left. \frac{\mathrm{d}c_p}{\mathrm{d}M_0} \right|_{M_0=1} = \frac{4}{\kappa + 1} \,. \quad (4.40)$$

Damit lässt sich die Widerstandsänderung bei $M_0 = 1$ angeben.

Die Druckverteilungen auf dem Profil für Anströmungen im linearen und transsonischen Unterschall sind in Abb. 4.25 dargestellt. Durch das Auftreten von Verdichtungsstößen, die die lokalen Überschallgebiete stromab abschließen, nimmt der Druckwiderstand zu.

Die Umströmung transsonischer Tragflügel wird eingehend in Abschn. 5 des Kap. 5 ▸ Aerodynamik behandelt.

Weiterführende Literatur

Becker, E.: Technische Strömungslehre. Teubner, Stuttgart (1993)
Courant, R., Friedrichs, K.O.: Supersonic flow and shock waves. Springer, New York (1976)
Krause, E.: Strömungslehre. Vieweg+Teubner, Wiesbaden (2003)
Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: Hydrodynamik, Lehrbuch der theoretischen Physik. Akademie-Verlag, Berlin (1974)

Liepmann, H.W., Roshko, A.: Elements of gasdynamics. Wiley, New York (1957)
von Mises, R.: Mathematical theory of compressible fluid flow. Academic, New York (1966)
Oertel, H., Jr.: Aerothermodynamik. Springer, Berlin/Heidelberg (1994). Universitätsverlag, Karlsruhe, (2005)
Oertel, H., Jr. (Hrsg.): Prandtl – Führer durch die Strömungslehre, russische Übersetzung. Russian Institute of Dynamics, Izhevsk (2007)
Oertel, H., Jr. (Hrsg.): Prandtl – Führer durch die Strömungslehre, chinesische Übersetzung. Science Press, Beijing (2008)
Oertel, H., Jr. (Hrsg.): Prandtl – Essentials of Fluid Mechanics, 3. Aufl. Springer, New York (2010)
Oertel, H., Jr. (Hrsg.): Prandtl – Führer durch die Strömungslehre. Springer Vieweg, Wiesbaden, 14. Aufl. (2017)
Oertel, H., Jr., Böhle, M., Reviol, T.: Strömungsmechanik. Springer Vieweg, Wiesbaden (2015)
Oswatitsch, K.: Grundlagen der Gasdynamik. Springer, Berlin/Heidelberg/New York/Wien (1967)
Shapiro, A.H.: The Dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. Ronald Press, New York (1953)
Tietjens, O.: Strömungslehre. Springer, Berlin/Heidelberg (1970)
Vincenti, W.G., Kruger, C.H.: Introduction to physical gas dynamics. Huntington, New York (1967)
Zierep, J., Bühler, K.: Grundzüge der Strömungslehre. Springer Vieweg, Wiesbaden (2013)

Aerodynamik

5

Herbert Oertel Jr.

Zusammenfassung

Das Kapitel Aerodynamik führt in die Theorie und aerodynamischen Grundlagen der Profile und Tragflügel von Verkehrsflugzeugen ein. Es ist Teil des Lehrbuches und Nachschlagewerkes H. Oertel jr. (Hrsg.) Prandtl-Führer durch die Strömungslehre und behandelt die reibungsfreie Profil- und Tragflügeltheorie, die analytische und numerische Tragflügelberechnung sowie das aerodynamische Versuchswesen.

Die transsonische Aerodynamik der Verkehrsflugzeuge führt zum Pfeilflügel mit den Grundlagen des laminar-turbulenten Übergangs in dreidimensionalen kompressiblen Grenzschichten, der Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkung auf dem Flügel, der Strömungsablösung und Strömungskontrolle. Das Kapitel endet mit der Überschallaerodynamik von Deltaflügeln.

Ziel der Aerodynamik ist es, die Kräfte und Momente umströmter Körper wie z. B. von Profilen, Tragflügeln, Flugzeugrümpfen, Triebwerkzellen oder des gesamten Flugzeugs vorherzusagen. Zur Aerodynamik gehört auch die Vorhersage der Windkräfte auf Gebäude, Kraftfahrzeuge und Schiffe sowie die Vorhersage der aerodynamischen Aufheizung von Wiedereintrittskapseln bei deren Eintritt in die Erdatmosphäre oder in Planetenatmosphären. Ein weiteres Ziel ist die Berechnung der Verluste und Wärmeübergänge in Flugzeugtriebwerken, Raketenmotoren oder Pipelines.

In diesem Kapitel beschränken wir uns auf die Grundlagen der Aerodynamik des Flugzeugs und insbesondere auf die *Aerodynamik des Tragflügels*. Diese ist entscheidend durch die Mach-Zahl der ungestörten Anströmung M_∞ bestimmt.

Nach der Vision von *D. Küchemann* 1987 ist jeder Ort der Erde innerhalb der gleichen Flugzeit erreichbar, sofern sich die Flügelform der dafür erforderlichen Flug-Mach-Zahl M_∞ anpasst. Abb. 5.1 zeigt die unterschiedlichen Flugzeugtypen

H. Oertel Jr. (✉)
Baden-Baden, Deutschland
E-Mail: herbert.oertel@t-online.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5_5

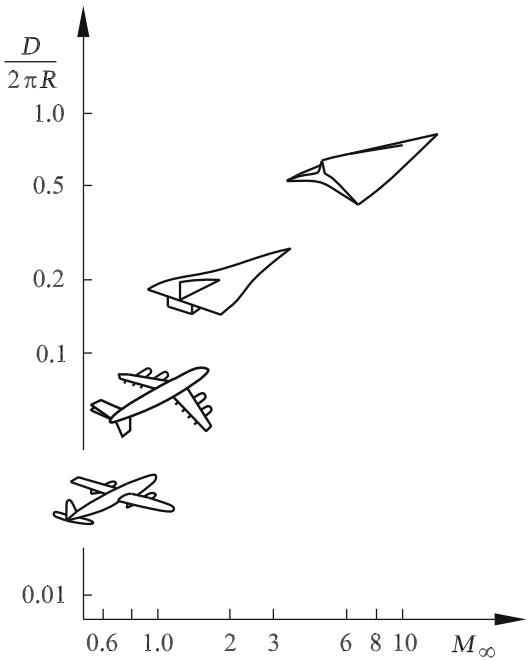


Abb. 5.1 Flugzeugformen in Abhängigkeit der Flug-Mach-Zahl M_∞

für die auf den Erdumfang bezogenen Reichweiten D in Abhängigkeit von M_∞. Für Kurzstrecken kommen ungepfeilte Tragflügel bei Unterschall-Mach-Zahlen zum Einsatz. Mittlere Strecken werden mit gepfeilten transsonischen Tragflügeln bewältigt. Für Langstrecken bietet sich der Überschallflug an. Die Vision des Hyperschallflugs könnte mit Wellenreitern realisiert werden.

Letztendlich hat sich für Verkehrsflugzeuge der gepfeilte Flügel bei transsonischen Flug-Mach-Zahlen ($M_\infty = 0.8$) durchgesetzt. Damit lassen sich in Großraumflugzeugen eine große Anzahl von Passagieren bei Flugzeiten bis zu 16 Stunden über eine Entfernung von 14000 km transportieren. Beim Überschallflug ($M_\infty = 2$), der aufgrund des Überschallknalls durch die Kopf- und Schwanzwelle des Flugzeugs nur über dem Meer bzw. über Wüstengebieten möglich ist, halbiert sich die Flugzeit.

1 Vogelflug

Die Evolution hat das Fliegen innerhalb der vergangenen 10^8 Jahre in unterschiedlicher Weise bei den Insekten, Fledermäusen, Sauriern und Vögeln entwickelt. Da die Rotation um eine Achse biologisch nicht möglich ist, wird der zum Fliegen erforderliche Auftrieb und Vortrieb durch die Hin- und Herbewegung eines Flügelschlages erreicht (siehe Abschn. 2 des Kap. 13 ▸ Bioströmungsmechanik). Der Vortrieb entsteht dadurch, dass der Abwärtsschlag mit großer Kraft und der Aufwärtsschlag bei möglichst geringem Widerstand ausgeführt wird. Den größten

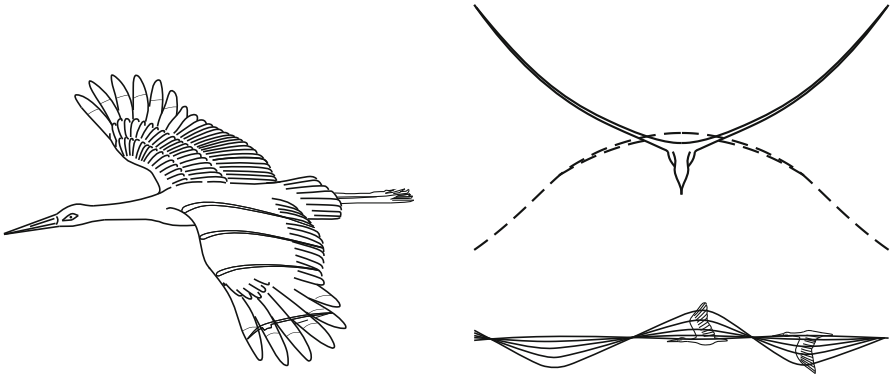


Abb. 5.2 Profilschnitte und Bahnlinien des Vogelfluges

Teil des Vortriebs liefern beim Vogel die äußeren Teile des Flügels, die entsprechend der Abb. 5.2 den größten Teil der Vertikalbewegung zurücklegen. Dabei wird die Anstellung verschiedener Profilschnitte des Flügels im Verlauf einer Schwingperiode durch die Deformierung des Flügels verändert. Der innere Teil des Flügels erzeugt im Wesentlichen den Auftrieb. Damit sind die Funktionen des Tragflügels und Antriebpropellers eines Flugzeuges im Vogelflügel integriert. Allerdings wird dies damit erkauft, dass sich Auftrieb und Vortrieb im Verlauf einer Schwingung ändern.

Den damit verbundenen Stabilitätsproblemen wird durch aerodynamische Kräfte der Schwanzflächen entgegengewirkt, die als horizontales Steuerruder die Schwingbewegung ausgleichen. Der größte Wandervogel Albatros erreicht eine Spannweite von 3.8 m, Spitzengeschwindigkeiten bis zu 110 km/h und eine Gleitzahl 20 (Auftrieb zu Widerstand).

Die qualitative dimensionslose Druckverteilung $-c_p$ Gl. (5.3) eines charakteristischen Profilschnittes eines Vogelflügels ist in Abb. 5.3 im Segelflug gezeigt. Die Strömung wird aufgrund der unterschiedlichen Wölbungen auf der Unter- und Oberseite des Flügels verschieden stark beschleunigt, was zu einem größeren Druckabfall auf der oberen Saugseite des Flügels führt. Die Verzögerung der Strömung stromab der Saugspitze ist mit einem entsprechenden Druckanstieg verbunden.

Die erste erfolgreiche technische Umsetzung des Vogelflugs gelang *Otto Lilienthal* 1891 mit seinem manntragenden Gleitflugzeug. Die Abb. 5.4 zeigt die vogelähnliche Form des starren Flügels mit integrierten vertikalen und horizontalen Flächen, die für die Stabilität sorgten. Die Flugkontrolle des Hanggleiters erfolgte durch Gewichtsverlagerung des Körpers unter dem Gleiter.

Vorausgegangen war 1889 Lilienthals Buchveröffentlichung mit dem Titel *Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst*, die alle aerodynamischen Daten der damaligen Zeit enthielt. Auch bei den modernen Verkehrsflugzeugen ist es 100 Jahre später bei den starren Flügeln geblieben (siehe Abb. 5.5). Der Flügelschlag des Vogels wurde durch Fan-Triebwerke ersetzt, die aufgrund ihrer Größe unter den

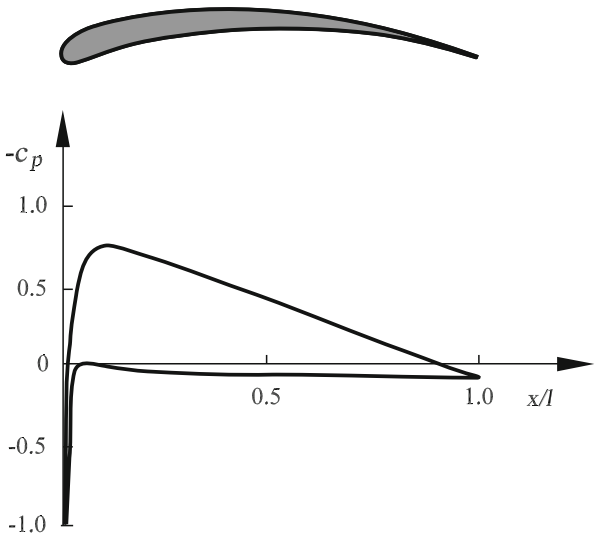


Abb. 5.3 Profil und Druckverteilung des Vogelflügels

Abb. 5.4 Hanggleiter von Lilienthal

Tragflächen angebracht sind. Der Rumpf nimmt die Passagiere auf und die Seiten- und Höhenleitwerke sorgen für die Flugstabilität. Geändert hat sich gegenüber dem Vogelflug die Fluggeschwindigkeit. Das Bestreben, möglichst schnell, komfortabel und wirtschaftlich von einem Ort zum anderen fliegen zu wollen, führt zu den transsonischen Fluggeschwindigkeiten von 950 km/h bei der Flug-Mach-Zahl 0.8 in 10 km Höhe. Die Strömungsverluste werden bei den transsonischen Strömungs-Mach-Zahlen mit gepfeilten Tragflügeln verringert, die in Abschn. 5 behandelt werden. Die Winglets der Flügelenden sind den Flügelspitzen der Vögel nachemp-

Abb. 5.5 Verkehrsflugzeug

funden um die Wirbelstärke des Randwirbels und damit den Flügelwiderstand zu reduzieren.

2 Profil und Tragflügel

Bewegt man ein Flugzeug mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}_\infty$, so erfährt es die resultierende Luftkraft R (Abb. 5.6). Die Komponente dieser Kraft in Anströmrichtung ist der Widerstand W, die Komponente senkrecht dazu der Auftrieb A. Die Neigung der Resultierenden R zur Anströmrichtung und damit das Verhältnis von Auftrieb zu Widerstand hängen im Wesentlichen von der geometrischen Form des Tragflügels und der Anströmrichtung ab. Ein großer Wert des Verhältnisses A/W ist erwünscht. Für den stationären Gleitflug eines motorlosen Flugzeugs muss die resultierende Luftkraft R entgegengesetzt gleich dem Gewicht G sein. Damit ergibt sich für den *Gleitwinkel* α die Beziehung:

$$\tan(\alpha) = \frac{W}{A}\,. \tag{5.1}$$

Der mit dem Winkel ϕ gepfeilte Flügel eines Verkehrsflugzeuges ist in Abb. 5.6 skizziert. Die jeweiligen senkrechten Schnitte durch den *Flügel* werden *Profile* genannt. Die Skelettlinie, der Mittelwert des Abstandes zwischen Ober- und Unterseite des Flügels, ist eine ausgezeichnete Profillinie, die bei der Beschreibung der reibungsfreien Entwurfsmethoden benötigt wird. Die Anstellung des Profils zur ungestörten Anströmung $\boldsymbol{V}_\infty$ wird mit α bezeichnet. Wie in Abschn. 10 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten ausgeführt wurde, werden die aerodynamischen Kräfte *Auftrieb* A, *Widerstand* W sowie die *Resultierende* R von der Druckverteilung und der Verteilung der Wandschubspannungen auf den Flügeloberflächen verursacht. Zusätzlich wird ein *Moment* M erzeugt, das für die Flügeldrehung verantwortlich ist. Die dazugehörigen dimensionslosen Beiwerte sind:

$$c_\mathrm{a} = \frac{A}{q_\infty \cdot S}\,, \qquad c_\mathrm{w} = \frac{W}{q_\infty \cdot S}\,, \qquad c_\mathrm{m} = \frac{M}{q_\infty \cdot S \cdot l}\,, \tag{5.2}$$

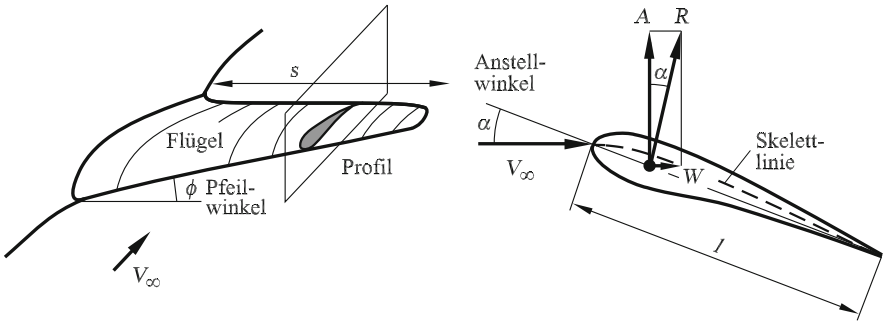


Abb. 5.6 Prinzipskizze von Tragflügel und Profil

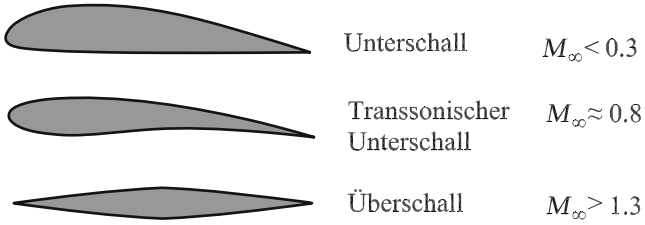


Abb. 5.7 Charakteristische Profilformen für Unterschall-, Transschall- und Überschall-Mach-Zahlen

mit $q_\infty = 0.5 \cdot \rho \cdot V_\infty^2$ und der Flügelfläche S. Der Druck- und Reibungsbeiwert ergeben sich zu:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty}, \qquad c_\mathrm{f} = \frac{\tau}{q_\infty}, \tag{5.3}$$

mit dem Druck der ungestörten Anströmung p_∞. Alle Beiwerte sind Funktionen der Anström-Mach-Zahl M_∞, der Reynolds-Zahl Re_l, des Anstellwinkels α und des Pfeilwinkels ϕ.

2.1 Profilströmung

Typische Profile der unterschiedlichen Mach-Zahlbereiche sind in Abb. 5.7 skizziert. Im Gegensatz zu den dünnen Vogelprofilen der Abb. 5.3 hat *L. Prandtl* 1917 gezeigt, dass Unterschallprofile der Dicke d/l von 13 % (z. B. Göttinger Profil 298) einen größeren Auftriebsbeiwert c_a bei geringerem Widerstandsbeiwert c_w aufweisen.

Die Profile für transsonische Anströmungen müssen entsprechend der Abb. 5.7 dünner sein, damit sich auf dem Profil der Übergang in die Überschallströmung möglichst weit stromab vollzieht. Bei Profilen in einer Überschallströmung treten

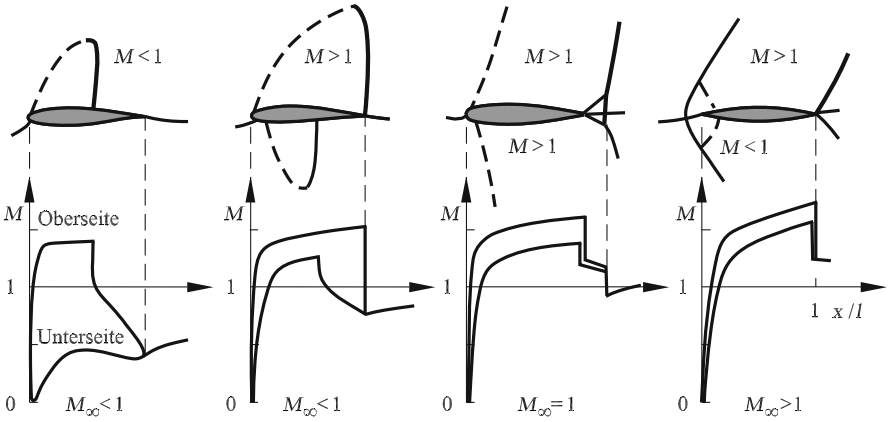


Abb. 5.8 Mach-Zahlverteilung der transsonischen Profilumströmung

schiefe Verdichtungsstöße auf, so dass mit scharfen Vorder- und Hinterkanten der Widerstand gering gehalten werden kann.

Die unterschiedlichen Strömungsbereiche sind in Abb. 5.8 für transsonische Unter- und Überschall-Mach-Zahlen dargestellt. Von transsonischen Unterschall-Mach-Zahlen spricht man, wenn wie im ersten Bild die Beschleunigung auf dem Profil in den Überschall führt. Dabei wird das Überschallgebiet von einem Verdichtungsstoß abgeschlossen, der einen zusätzlichen Druckwiderstand c_s zur Folge hat. Die Verdichtungsstöße sind in Abb. 5.8 fett eingetragen und die Schalllinien $M = 1$ gestrichelt gekennzeichnet. Die Verzögerung der Strömung auf dem Profil verursacht einen Druckanstieg bis zur Hinterkante. Dort stellt sich ein Druck ein, der geringfügig über dem Druck der ungestörten Anströmung ist.

Erhöht man die transsonische Anström-Mach-Zahl auf Werte größer als 0.85 erstreckt sich im zweiten Bild der Überschallbereich über die gesamte Oberseite des Profils. Der Verdichtungsstoß wandert bis zur Hinterkante, während sich auf der Unterseite ebenfalls ein lokales Überschallgebiet mit Verdichtungsstoß einstellt. Der Stoß an der Hinterkante sorgt für den erforderlichen Druckanstieg, der in den Druck der Nachlaufströmung überführt.

Der Grenzfall der Anströmung mit der Mach-Zahl $M_\infty = 1$ ist im dritten Bild der Abb. 5.8 skizziert. Die Verdichtungsstöße auf der Ober- und Unterseite des Profils sind bis in den Nachlauf gewandert und verzweigen sich an der Hinterkante zu zwei schiefen und einem senkrechten Verdichtungsstoß im Nachlauf. Die Schalllinie erstreckt sich über das ganze Stromfeld und nahezu das gesamte Profil wird von einer Überschallströmung umströmt. Ist die Anström-Mach-Zahl geringfügig größer als 1, bildet sich eine abgelöste Kopfwelle weit vor dem Profil aus.

Für die Überschall-Anströmung $M_\infty \geq 1$ verringert sich der Kopfwellenabstand. Es entsteht ein Unterschallgebiet zwischen Stoß und Profil. Die schiefen Verdichtungsstöße wandern aus der Nachlaufströmung an die Profilhinterkante. Erhöht man die Anström-Mach-Zahlen weiter, stellen sich an der scharfen Vorderkante anliegende schiefe Verdichtungsstöße entsprechend denen an der Hinterkante ein.

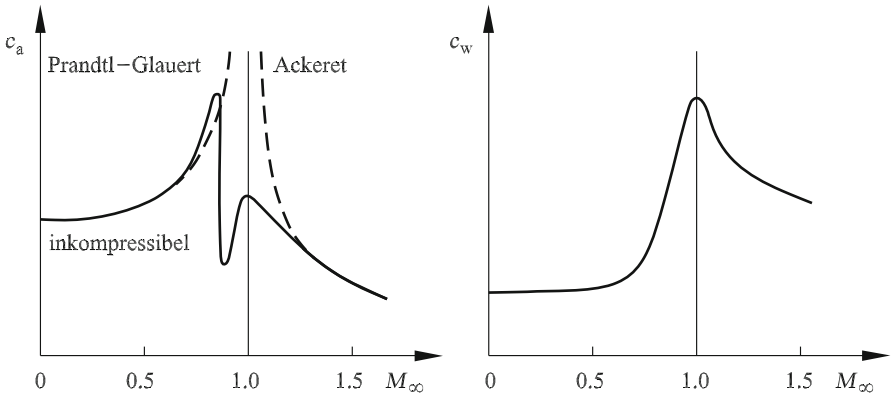


Abb. 5.9 Auftriebsbeiwert c_a und Widerstandsbeiwert c_w in Abhängigkeit der Anström-Mach-Zahl M_∞

In Abb. 5.9 ist die Abhängigkeit des *Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes* von der Mach-Zahl für ein vorgegebenes Profil skizziert. Bei Unterschall-Mach-Zahlen steigt der Auftriebsbeiwert mit wachsender Mach-Zahl entsprechend der *Prandtl-Glauert-Regel* an (siehe Abschn. 8):

$$c_a = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, \qquad M_\infty < 1\,. \tag{5.4}$$

Dazu gehört der mit der linearen Theorie berechnete Druckbeiwert des Profils:

$$c_p = \frac{c_{p0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}},$$

wobei c_{p0} der Druckbeiwert der inkompressiblen Strömung ist.

Eine Abnahme des Auftriebsbeiwertes berechnet sich mit der linearen Überschall-Theorie entsprechend der *Ackeret-Regel*:

$$c_a = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \qquad M_\infty > 1\,. \tag{5.5}$$

Im transsonischen Unterschallbereich durchläuft der Auftriebsbeiwert ein Maximum. Der Einbruch des Auftriebsbeiwertes erklärt sich mit dem Auftreten des Überschallbereichs und des zweiten Verdichtungsstoßes auf der Unterseite des Profils. Die Mach-Zahl-Verteilung der Abb. 5.8 deutet an, dass sich dadurch der Auftrieb drastisch verringert, um für Mach-Zahlen größer als 0.9 wieder anzusteigen. Der erneute Anstieg des Auftriebsbeiwertes tritt dann ein, wenn die Verdichtungsstöße vom Nachlauf an die Hinterkante des Profils gewandert sind und sich aufgrund des geringen Stoßwinkels abschwächen. Erst mit dem Auftreten der Kopfwelle und dem Unterschallgebiet zwischen Verdichtungsstoß und Profil

nimmt der Auftriebsbeiwert im Überschall entsprechend der *Ackeret*-Gleichung (5.5) wieder ab.

Für die Auslegung des Profils eines Verkehrsflugzeugs wird man die Flug-Mach-Zahl im transsonischen Unterschall in der Umgebung des Maximums von etwa 0.8 wählen.

Der Widerstandsbeiwert c_w verhält sich analog zum Auftriebsbeiwert c_a, lediglich das zweite Maximum bei transsonischen Unterschall-Mach-Zahlen tritt nicht auf. Bis zum Auftreten der Überschallgebiete auf der Oberseite des Profils bleibt der Widerstandsbeiwert mit zunehmender Anström-Mach-Zahl nahezu konstant. Mit dem Auftreten des Verdichtungsstoßes auf der Unterseite des Profils nimmt der Widerstandsbeiwert erheblich zu. Bis zum Erreichen des Widerstands-Maximums bei der Mach-Zahl $M_\infty = 1$ können in den Überschallgebieten lokale Mach-Zahlen bis zu $M = 2$ erreicht werden. Die Verdichtungsstöße auf dem Profil werden so stark, dass der Druckanstieg Strömungsablösung verursacht und dadurch der Widerstand zusätzlich vergrößert wird.

Dies führt zur Auslegung superkritischer Profile (Abb. 5.10) mit dem Ziel, die transsonische Flug-Mach-Zahl bei möglichst geringem Widerstand zu erhöhen. Dabei liegt das Dickenmaximum des Profils nahe der Vorderkante und das ausgedehnte Überschallgebiet auf dem Profil wird mit einem schwachen Verdichtungsstoß möglichst weit stromab abgeschlossen. Gegenüber herkömmlichen transsonischen Profilen wird die Saugspitze im vorderen Bereich des Profils vermieden.

Die Abhängigkeit des Auftriebsbeiwertes c_a vom *Anstellwinkel* α ist in Abb. 5.11 für ein vorgegebenes Unterschall-Profil dargestellt. Der Auftrieb wächst mit steigendem Anstellwinkel zunächst linear an, solange die Strömung anliegt. Auch für den Anstellwinkel $\alpha = 0°$ erhält man aufgrund der Unsymmetrie des Profils einen positiven Auftriebsbeiwert. Der Auftriebsbeiwert durchläuft bei einem kritischen Anstellwinkel α_{krit} ein Maximum und fällt für größere Anstellwinkel stark ab.

Die Momentaufnahme der Strömung zeigt in Abb. 5.11, dass dann die Strömung auf der gesamten Oberseite des Profils instationär ablöst. Mit dem Zusammenbruch des Auftriebsbeiwertes geht ein Anwachsen des Profilwiderstandes einher.

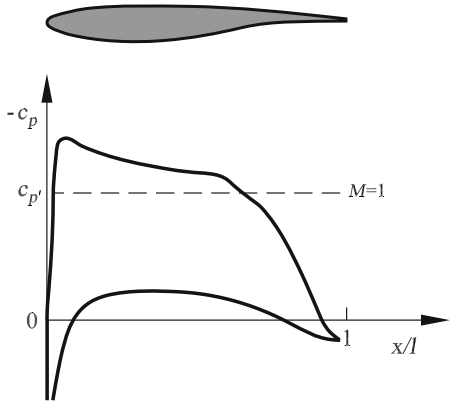


Abb. 5.10 Druckverteilung c_p eines superkritischen Profils

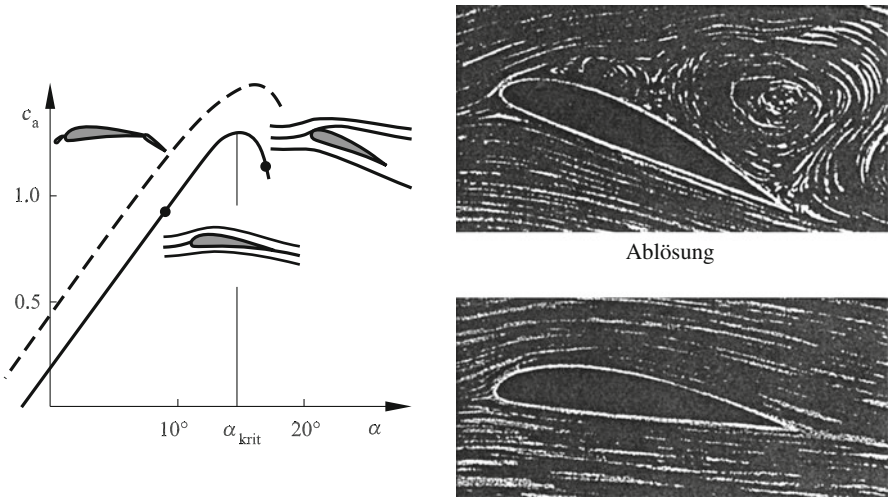


Abb. 5.11 Auftriebsbeiwert c_a und Strömungsbilder in Abhängigkeit des Anstellwinkels α

Um mit einem Tragflügel starten und landen zu können, wird bei verringerter Geschwindigkeit mit Vorder- und Hinterklappen die Flügelfläche vergrößert. Dies führt zu der in Abb. 5.11 gestrichelten Auftriebskurve, die zu höheren Auftriebswerten führt.

Ein für die Auslegung von Profilen wichtiges Diagramm ist das Polarendiagramm (Abb. 5.12). Dabei wird der Auftriebsbeiwert c_a über dem Widerstandsbeiwert c_w für unterschiedliche Anstellwinkel α aufgetragen. Man spricht von einer Polaren, da man der Abb. 5.12 direkt die am Profil wirkenden Kräfte entnehmen kann. Der Vektor vom Ursprung zu einem Punkt der Polaren zeigt die resultierende Kraft $\boldsymbol{R}$ an. Für das superkritische Profil der Abb. 5.10 ist der Anstieg des Auftriebsbeiwertes mit wachsendem Anstellwinkel groß, der Maximalwert von c_a verglichen mit Unterschall-Profilen jedoch gering. Für einen großen Bereich des Anstellwinkels bleibt der Widerstandsbeiwert gering. Die Auslegung bei der Anström-Mach-Zahl $M_\infty = 0.76$ ergibt einen Auftriebsbeiwert von $c_a = 0.57$.

Um den Einfluss der Reibung bei der Profilumströmung analysieren zu können sind in Abb. 5.13 die Druckverteilungen unterschiedlicher Ablöseformen für die reibungsfreie und reibungsbehaftete Strömung für ein angestelltes Unterschall-Profil dargestellt. Solange die Grenzschichtströmung am Profil anliegt, wird aufgrund der Verdrängungswirkung des reibungsbehafteten Anteils der Druckverteilung der Druck erhöht. Kommt es zur Strömungsablösung bildet sich auf dem Profil ein zeitlich gemitteltes Rückströmgebiet mit konstantem Druck aus. Der Auftrieb wird dadurch verringert.

Beginnt die Ablösung bereits an der Vorderkante, kann es auf dem Profil zum Wiederanlegen der Strömung kommen, so dass der Bereich konstanten Drucks im Gebiet der Saugspitze des Profils liegt und der Auftrieb demzufolge zusammen-

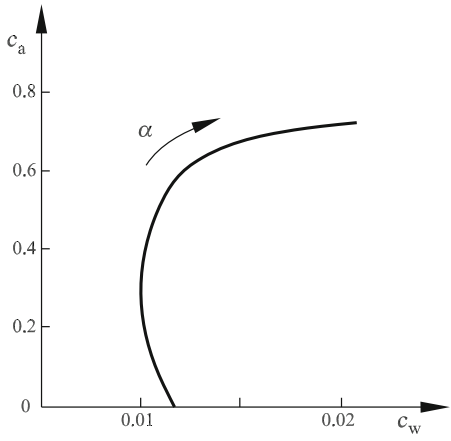


Abb. 5.12 Polarendiagramm eines transsonischen Profils

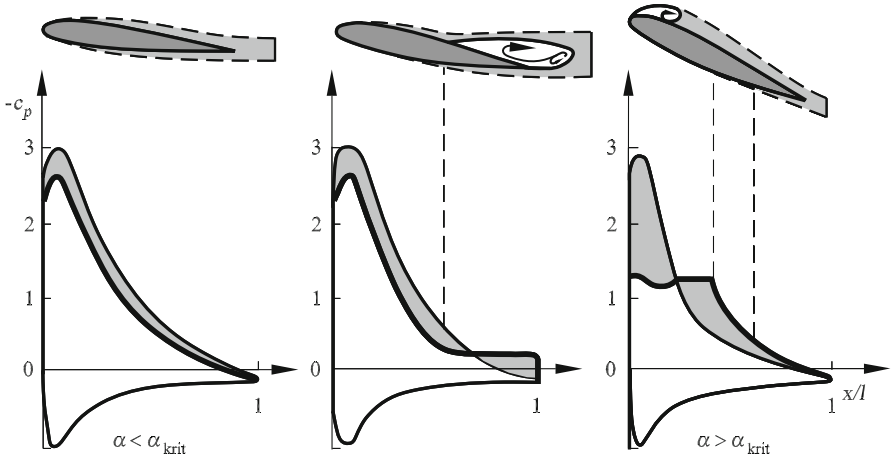


Abb. 5.13 Druckverteilungen der reibungsfreien und reibungsbehafteten Profilumströmung

bricht. Die Strömung ist dann durch den grauen reibungsbehafteten Teil der Druckverteilung bestimmt, so dass sich die in Abschn. 3 behandelte Theorie der reibungsfreien Profilumströmung auf den Bereich der reibungsfreien Außenströmung der anliegenden Profilgrenzschicht beschränkt.

2.2 Tragflügelströmung

Im Folgenden werden die Erkenntnisse der Profilumströmung auf den endlichen *Tragflügel* der Abb. 5.6 übertragen. Die Flügelumströmung ist dreidimensional.

Der zweidimensionalen Profilströmung wird eine dritte Geschwindigkeitskomponente in Spannweitenrichtung überlagert. Die Erklärung dafür findet sich in

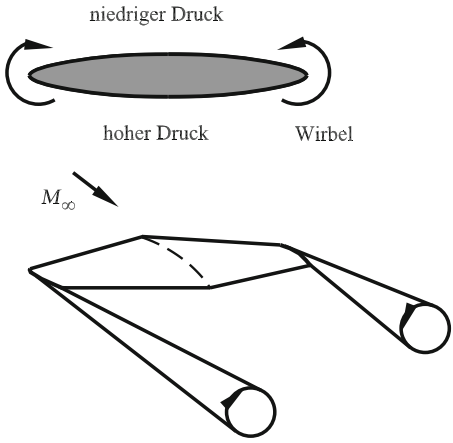


Abb. 5.14 Randwirbel eines endlichen Tragflügels

Abb. 5.14. Auf der Oberseite des Flügels herrscht Unterdruck und auf der Unterseite Überdruck. Dies führt zu einer Umströmung der Flügelspitzen, die im Nachlauf jeweils einen Wirbel bilden. Diese Wirbel verursachen eine abwärts gerichtete Geschwindigkeitskomponente hinter dem Flügel. Die zusätzliche Wirbelbildung an den Flügelspitzen verändert die Druckverteilung in der Weise, dass ein zusätzlicher Druckwiderstand entsteht, den man *induzierten Widerstand* nennt. Die Widerstandsbilanz (Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Gl. (83)) bestehend aus Druck- und Reibungswiderstand wird also beim Tragflügel um den induzierten Druckwiderstand c_i ergänzt:

$$c_\mathrm{w} = c_\mathrm{d} + c_\mathrm{f} + c_\mathrm{i} + c_\mathrm{s}. \tag{5.6}$$

Beim transsonischen Tragflügel kommt der Druckwiderstand des Verdichtungsstoßes auf der Oberseite des Flügels hinzu, den man *Wellenwiderstand* c_s nennt. Die Widerstandsanteile für einen Tragflügel mit superkritischem Profil betragen 51 % für den Reibungswiderstand c_f, 35 % für den induzierten Widerstand c_i, 10 % für den Druckwiderstand c_d und 4 % für den Wellenwiderstand c_s (siehe Abb. 5.30).

Dabei handelt es sich um einen gepfeilten transsonischen Tragflügel, der die lokale Anström-Mach-Zahl der Profilschnitte in der Weise erniedrigt, so dass der Anstieg des Widerstandes in Abb. 5.9 zu höheren Mach-Zahlen verschoben wird. Die Tatsache, dass die effektive Profil-Mach-Zahl durch Pfeilung ϕ um $M_n = M_\infty \cdot \cos(\phi)$ verringert werden kann, wurde erstmals von *A. Betz* 1939 erkannt (Abb. 5.15). Dabei ging er von der Überlegung aus, dass lediglich durch die Normalkomponente $\boldsymbol{v}_n$ der Anströmung Druckwiderstand erzeugt wird. Erfolgt die Anströmung tangential zur Spannweite mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_t$, so kann diese Strömung keine Druckänderung am Flügel hervorrufen. Es entsteht lediglich Reibungswiderstand.

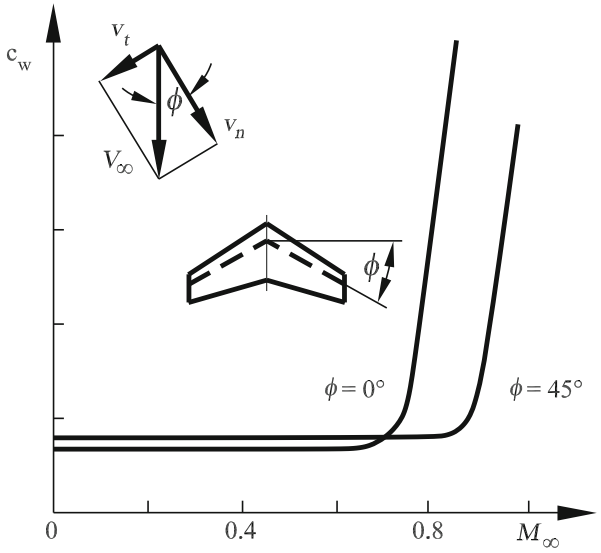


Abb. 5.15 Einfluss der Pfeilung ϕ auf den Widerstandsbeiwert c_w

3 Profil- und Tragflügeltheorie

Grundlage von Prandtls Profil- und Tragflügeltheorie ist die Erkenntnis, dass der aerodynamische Auftrieb durch die Zirkulationsverteilung um den Tragflügel verursacht wird. Dabei geht man davon aus, dass für große Reynolds-Zahlen die Druck- und Zirkulationsverteilung des Tragflügels mit der Potentialgleichung $\Delta\Phi = 0$ (Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit, Gl. (20)) der reibungsfreien Außenströmung näherungsweise berechnet werden kann.

Für die Berechnung der reibungsfreien *Profilumströmung* gibt es zwei unterschiedliche mathematische Methoden, die Methode der konformen Abbildung und die Singularitätenmethode. Es wird insbesondere im Hinblick auf die Berechnung der dreidimensionalen Tragflügelströmung die Singularitätenmethode beschrieben.

Dabei geht man von den Partikulärlösungen der linearen Potentialgleichung in Abschn. 5 des Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit aus. Die Strömung um ein gewölbtes Profil endlicher Dicke mit dem Anstellwinkel α lässt sich entsprechend der Abb. 5.16 mit der linearen Superposition von Quellen, Senken (Dicke), Wirbeln (Anstellung) und der Überlagerung einer Translationsgeschwindigkeit (Anströmung) berechnen.

Die lineare Superposition von Einzellösungen führt in Abb. 5.17 mit der *Kutta-Joukowski-Abströmbedingung* an der Hinterkante auch bei reibungsfreier Profilumströmung zu einer Auftriebskraft pro Längeneinheit A, die mit der Zirkulation $\Gamma = \oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ berechnet werden kann:

$$A = \rho \cdot \Gamma \cdot V_\infty. \tag{5.7}$$

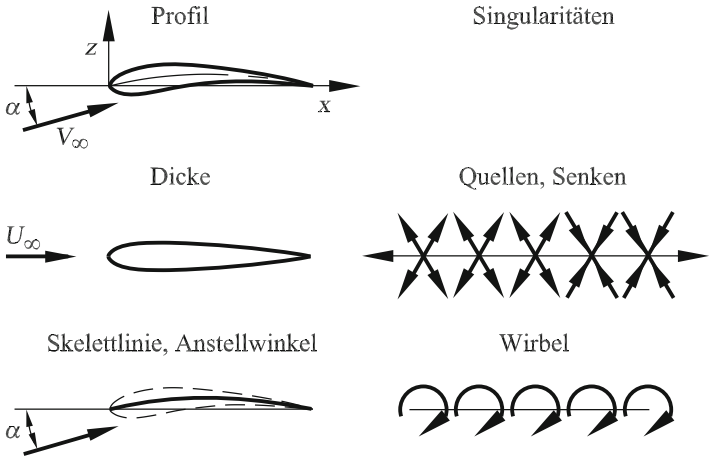


Abb. 5.16 Singularitätenverteilung eines angestellten Profils endlicher Dicke

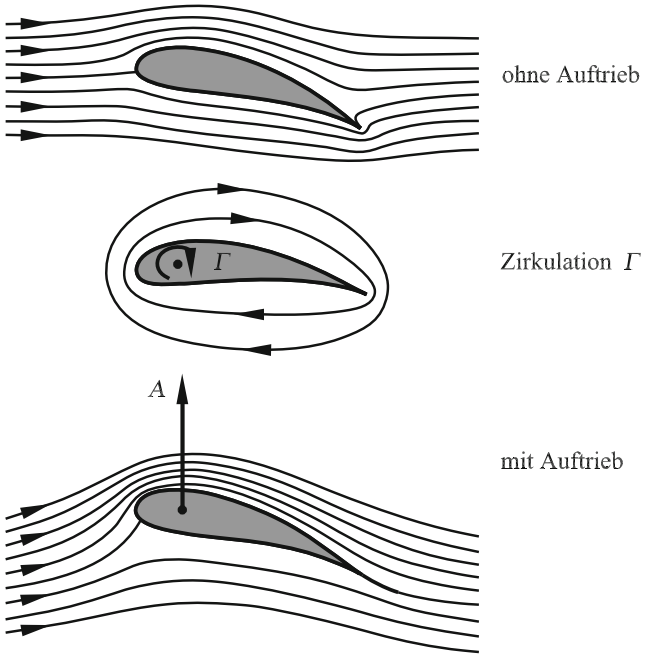


Abb. 5.17 Auftriebserzeugung an einem Tragflügelprofil (Potentialströmung, siehe Kap. 2 ▶ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit, Abb. 30)

Die Entstehung der Zirkulation am Tragflügel kann man sich mit Abb. 5.18 klar machen. Beim Start des Flügels entsteht an der Hinterkante ein Anfahrwirbel mit negativer Zirkulation $-\Gamma$. Da nach dem Satz von Thomson (Abschn. 5 des

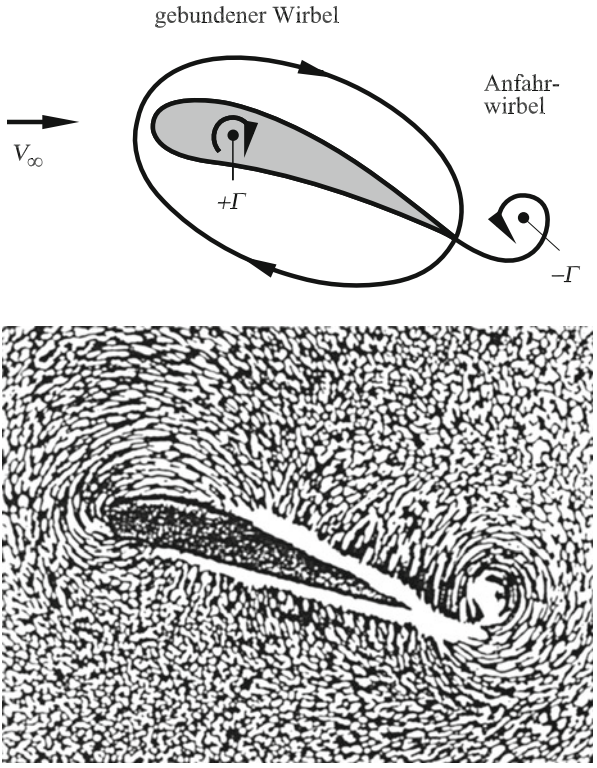
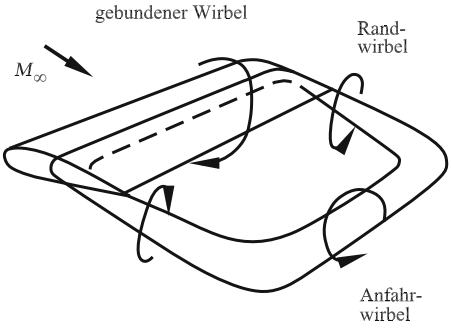


Abb. 5.18 Anfahrwirbel und gebundener Wirbel eines Tragflügelprofils, *L. Prandtl* und *O. G. Tietjens* 1934

Abb. 5.19 Wirbelsystem um einen Tragflügel



Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit) die Zirkulation erhalten bleiben muss, entsteht um den Flügel die gleiche Zirkulation aber mit positiven Vorzeichen, die man gebundenen Wirbel nennt. Verknüpft man den gebundenen Wirbel, den Anfahrwirbel und die Randwirbel der Abb. 5.14, entsteht das geschlossene Wirbelsystem der Abb. 5.19, da nach dem Satz von Helmholtz kein Wirbel in der freien

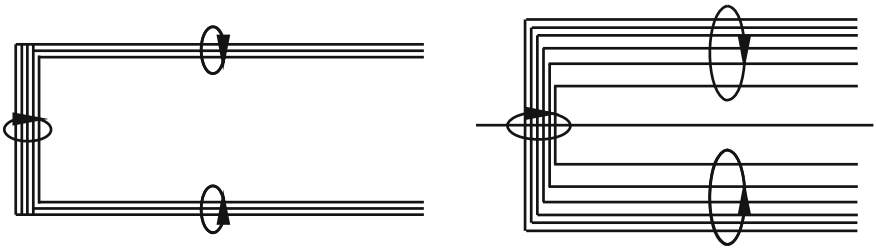


Abb. 5.20 Vereinfachtes Wirbelsystem eines Tragflügels

Strömung enden kann. Der Auftrieb des gebundenen Wirbels ist mit dem induzierten Widerstand c_i der Gl. (5.6) verknüpft.

Da bis heute der erste Entwurf eines Tragflügels bei *Unterschall-Anströmung* mit der Prandtlschen Theorie erfolgt, sollen die theoretischen Grundlagen im Folgenden dargestellt werden. Der theoretische Ansatz von *L. Prandtl* 1920 geht davon aus, dass zur Berechnung des Auftriebs eines schlanken Flügels dieser durch eine Auftriebslinie (Skelettlinie) mit überlagerter Zirkulationsverteilung ersetzt wird.

Das einfachste Wirbelsystem eines endlichen Tragflügels besteht aus dem gebundenen Wirbel der Wirbelstärke Γ und den zwei Randwirbeln gleicher Wirbelstärke (Abb. 5.20). Da die Auftriebsverteilung zu den Flügelspitzen hin abnimmt, kann man diese näherungsweise mit einem Wirbelsystem infinitesimaler Wirbelstärke über die Spannweite s des Flügels darstellen. Für das Wirbelsystem der Abb. 5.20 ergibt sich in der Mitte des Tragflügels ein nach vorne und hinten unendlich ausgedehnter Wirbel der Stärke Γ. Im Abstand d erhält man die Geschwindigkeit $w = \Gamma/(2 \cdot \pi \cdot d)$. Ein von der Schnittebene durch den Flügel nur nach hinten erstreckender Wirbel hat aus Symmetriegründen die Hälfte der Geschwindigkeit $\Gamma/(4 \cdot \pi \cdot d)$. In der Mitte des Tragflügels $d = s/2$ kommen die zwei Beträge der Geschwindigkeit von dem rechten und linken Wirbel zusammen. Dies ergibt:

$$w_0 = 2 \cdot \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot \frac{s}{2}} = \frac{\Gamma}{\pi \cdot s} .$$

Mit der Kutta-Joukowski-Bedingung $\Gamma = A/(\rho \cdot s \cdot V_\infty)$ für den Flügel der Spannweite s wird

$$w_0 = \frac{A}{\pi \cdot \rho \cdot V_\infty \cdot s^2} .$$

In der Umgebung der Flügelmitte ergeben sich größere Geschwindigkeiten, die in der Nähe der Flügelenden gegen Unendlich gehen. Dies bedeutet, dass die Annahme eines bis zum Flügelende konstanten Auftriebs unzulässig ist. Setzt man die in Abb. 5.21 dargestellte *elliptische Auftriebsverteilung* voraus, erhält man über den Flügel die konstante Vertikalgeschwindigkeit w. In der Mitte ist die Zirkulation um $4/\pi$ mal größer als der Mittelwert. Damit liegen die einzelnen Wirbelfäden im

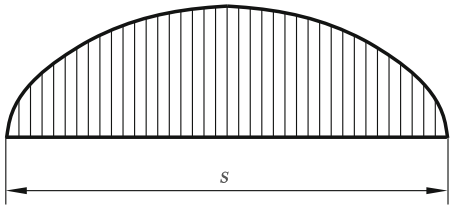


Abb. 5.21 Elliptische Auftriebsverteilung

Durchschnitt näher an der Mitte und w wird größer als w_0. Die Integration über alle Wirbelfäden ergibt:

$$w = 2 \cdot w_0 = \frac{2 \cdot A}{\pi \cdot \rho \cdot V_\infty \cdot s^2} \,. \tag{5.8}$$

Damit wird

$$\tan(\alpha) = \frac{w}{V_\infty} = \frac{2 \cdot A}{\pi \cdot \rho \cdot V_\infty^2 \cdot s^2} = \frac{A}{\pi \cdot p_\mathrm{s} \cdot s^2} \,,$$

mit dem Staudruck p_s. Da w bei einer elliptischen Auftriebsverteilung über die Spannweite konstant ist, ist auch $\tan(\alpha)$ konstant. Damit ergibt sich für den induzierten Widerstand $W_\mathrm{i} = A \cdot \tan(\alpha)$:

$$W_\mathrm{i} = \frac{A^2}{\pi \cdot p_\mathrm{s} \cdot s^2} \,. \tag{5.9}$$

Die Gl. (5.9) zeigt, dass der induzierte Widerstand umso kleiner wird, je größer die Spannweite s ist, auf der der Auftrieb verteilt wird. Dies führt bei Flugzeugen mit Unterschall-Anströmung zu Flügeln großer Spannweite. Die Flügeltiefe l kommt in Gl. (5.9) nicht vor. Es kommt also lediglich auf den Strömungszustand hinter dem Flügel an und nicht auf die Verteilung der Zirkulation über die Tiefe des Flügels.

Die Verteilung der Wirbelstärke auf der Skelettlinie eines schlanken Profils ergibt sich aus der kinematischen Bedingung, dass die Skelettlinie eine Stromlinie sein muss. Dabei wird der Wirbelverteilung die Translationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{V}_\infty$ überlagert, die mit der Profilsehne den Anstellwinkel α bildet (Abb. 5.22). Für eine Stromlinie gilt, dass in jedem Punkt die Vertikalgeschwindigkeitskomponente verschwindet. Für ein schlankes Profil kann man näherungsweise die Skelettlinie durch die Profilsehne ersetzen, so dass in erster Näherung gilt:

$$V_\infty \cdot \left(\alpha - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \right) + w(x) = 0 \,. \tag{5.10}$$

$\gamma(x)$ ist die Wirbelstärke pro Längeneinheit (Wirbeldichte). Ein infinitesimales Wirbelelement der Stärke $\gamma(x') \cdot \mathrm{d}x'$ am Ort x' erzeugt die infinitesimale Geschwindigkeit

$$\mathrm{d}w = -\frac{\gamma(x') \cdot \mathrm{d}x'}{4 \cdot \pi \cdot (x - x')} \,. \tag{5.11}$$

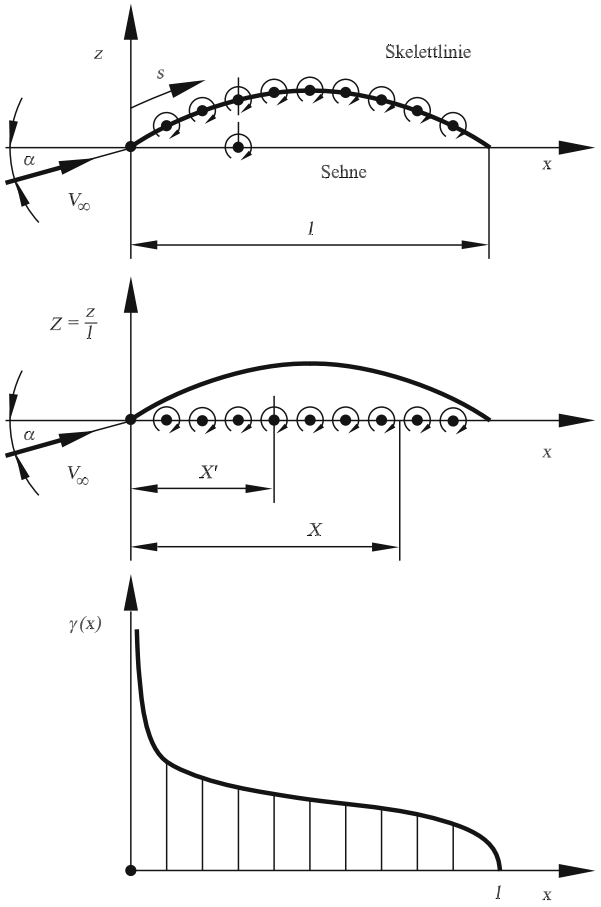


Abb. 5.22 Verteilung der Wirbelstärke entlang der Skelettlinie und Profilsehne eines schlanken Profils

Die Integration über die Flügeltiefe l ergibt die Vertikalgeschwindigkeit

$$w(x) = -\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_0^l \frac{\gamma(x') \cdot \mathrm{d}x'}{x - x'} \,. \tag{5.12}$$

Die Gl. (5.10) mit der Vertikalgeschwindigkeit (5.12) ist die *Grundgleichung schlanker Profile*, die sich aus der Forderung ergibt, dass die Skelettlinie eine Stromlinie ist. Damit berechnet man unter anderem die Steigung des Auftriebsbeiwertes c_a in Abb. 5.11:

$$\frac{\mathrm{d}c_\mathrm{a}}{\mathrm{d}\alpha} = 2 \cdot \pi \,. \tag{5.13}$$

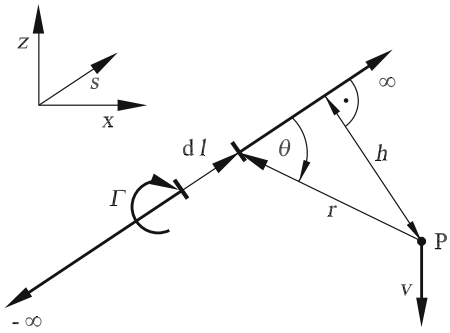


Abb. 5.23 Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ im Punkt P eines geraden Wirbelfilaments

Die Übertragung auf den *Tragflügel* knüpft an die Wirbelfilamente, die gebundenen und freien Randwirbel der Abb. 5.20 an, die man auch *Hufeisenwirbel* nennt.

Ein nach beiden Seiten ins Unendliche reichende Wirbelfilament erzeugt entsprechend Abb. 5.23 für jedes infinitesimale Wirbelelement $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ am Punkt P die Geschwindigkeit

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}^3|} \,. \tag{5.14}$$

Diese Beziehung wird *Biot-Savart-Gesetz* genannt. Die Integration entlang des Wirbelfilaments ergibt:

$$\boldsymbol{v} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}^3|} \,. \tag{5.15}$$

Mit der Definition des Vektorprodukts erhält man die Richtung des Geschwindigkeitsvektors $w = |\boldsymbol{v}|$, die nach unten zeigt:

$$w = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Theta)}{\boldsymbol{r}^2} \cdot \mathrm{d}l \,. \tag{5.16}$$

Mit dem senkrechten Abstand h zum Wirbelelement $\mathrm{d}l$ ergibt die Integration für ein halbunendliches Wirbelfilament für den Spezialfall $x = 0, \alpha = 0$:

$$w = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot h} \,. \tag{5.17}$$

Das Konzept der Wirbelfilamente wurde erstmals von *H. L. F. von Helmholtz* für die Berechnung reibungsfreier inkompressibler Strömungen eingeführt. Die *Helmholtzschen Wirbelsätze* sagen aus, dass die Wirbelstärke Γ entlang des Wirbelfilaments konstant ist und dass ein Wirbelfilament nicht im Strömungsfeld enden kann. Dabei kann die Begrenzung des Wirbelfilaments durchaus im Unendlichen liegen, wo

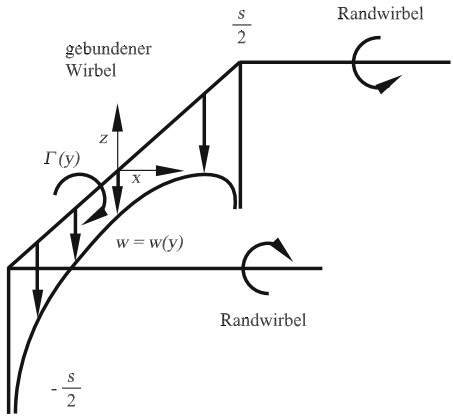


Abb. 5.24 Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit $w(y)$ für einen einzelnen Hufeisenwirbel

die Schließung mit dem Anfahrwirbel (Abb. 5.14) vorgenommen wird. Wie bereits dargelegt, hat *L. Prandtl* das Konzept des Hufeisenwirbels mit dem gebundenen Wirbel und zwei ins Unendliche reichenden Randwirbeln für die Berechnung des induzierten Auftriebs eines Tragflügels erweitert, wobei die Zirkulationsverteilung über dem endlichen Tragflügel berücksichtigt wird (siehe Abb. 5.21).

Betrachtet man den einzelnen Hufeisenwirbel der Abb. 5.24 erkennt man, dass der gebundene Wirbel der Spannweite s keine Geschwindigkeitskomponente entlang des Wirbelfilaments verursacht. Es entsteht die Vertikalkomponente $w(y)$. Die Randwirbel überlagern ebenfalls eine Vertikalkomponente der Geschwindigkeit. Mit Gl. (5.17) erhält man den Beitrag der halbunendlichen Randwirbel:

$$w = -\frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{s}{2} + y\right)} - \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{s}{2} - y\right)} = -\frac{\Gamma}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{s}{\frac{s^2}{4} - y^2}\,. \tag{5.18}$$

Man beachte, dass w an den Flügelenden $\pm s/2$ gegen $-\infty$ geht. Dies führte dazu, dass *L. Prandtl* nicht einen einzigen Hufeisenwirbel auf dem Flügel betrachtete, sondern eine große Anzahl von Hufeisenwirbeln unterschiedlicher Länge des gebundenen Wirbels. Diese werden entlang einer Linie angeordnet, die man *Auftriebslinie* nennt. Abb. 5.25 zeigt zunächst die Superposition von drei Hufeisenwirbeln. Der erste Hufeisenwirbel der Wirbelstärke $\mathrm{d}\Gamma_1$ umspannt den gesamten gebundenen Wirbel vom Punkt A ($y = -s/2$), bis zum Punkt F ($y = +s/2$). Dem überlagert wird der zweite Hufeisenwirbel der Wirbelstärke $\mathrm{d}\Gamma_2$ von B bis E, der nur einen Teil des gebundenen Wirbels überdeckt. Der dritte Hufeisenwirbel $\mathrm{d}\Gamma_3$ wird von C bis D überlagert. Daraus resultiert, dass die Wirbelstärke $\Gamma(y)$ sich entlang des gebundenen Wirbels (Auftriebslinie) verändert. Sie beträgt entlang $\overline{\mathrm{AB}}$ und $\overline{\mathrm{EF}}$ $\mathrm{d}\Gamma_1$, entlang $\overline{\mathrm{BC}}$ und $\overline{\mathrm{DE}}$ $\mathrm{d}\Gamma_1 + \mathrm{d}\Gamma_2$ und entlang $\overline{\mathrm{CD}}$ $\mathrm{d}\Gamma_1 + \mathrm{d}\Gamma_2 + \mathrm{d}\Gamma_3$. Jedem Wirbelelement entlang der Auftriebslinie sind zwei Randwirbel zugeordnet. Die Wirbelstärke eines jeden Randwirbels ist gleich der Änderung der Zirkulation entlang der Auftriebslinie.

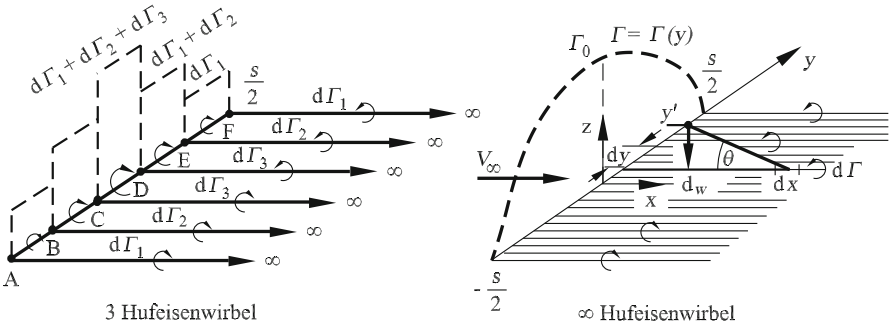


Abb. 5.25 Superposition von Hufeisenwirbeln entlang der Auftriebslinie

Extrapoliert man die Superposition auf unendlich viele Hufeisenwirbel der infinitesimalen Wirbelstärke $\mathrm{d}\Gamma$ erhält man eine kontinuierliche Verteilung der Wirbelstärke $\Gamma(y)$ über die Spannweite des Flügels. Der Maximalwert der Zirkulation sei Γ_0. Aus der endlichen Anzahl von Hufeisenwirbeln ist eine kontinuierliche Wirbelstraße parallel zur Anströmung $\boldsymbol{v}_\infty$ geworden. Die Integration der Wirbelstärke quer zur Wirbelstraße ergibt Null, da die Randwirbel jeweils paarweise gleiche Wirbelstärke entgegengesetzten Vorzeichens haben.

Betrachtet man ein infinitesimales Element $\mathrm{d}y$ der Auftriebslinie mit der Wirbelstärke $\Gamma(y)$, beträgt die Änderung über das Element $\mathrm{d}\Gamma = (\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}y) \cdot \mathrm{d}y$. Die Wirbelstärke des Randwirbels am Ort y ist gleich der Änderung der Wirbelstärke $\mathrm{d}\Gamma$. An der Stelle y' verursacht jedes Element $\mathrm{d}x$ des Randwirbels entsprechend dem Biot-Savart-Gesetz (5.14) die Vertikalgeschwindigkeit

$$\mathrm{d}w = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}y} \cdot \mathrm{d}y}{4 \cdot \pi \cdot (y' - y)} \,. \tag{5.19}$$

Die Integration über alle Randwirbel ergibt:

$$w(y') = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}y}}{y' - y} \cdot \mathrm{d}y \,. \tag{5.20}$$

Es ist noch die Zirkulationsverteilung $\Gamma(y)$ für einen vorgegebenen Tragflügel und damit der induzierte Auftrieb und Widerstand zu berechnen. Die Bezeichnungen für die Ableitung der *Prandtlschen Tragflügeltheorie* sind in Abb. 5.26 ergänzend zu Abb. 5.6 dargestellt. Zu dem geometrischen Anstellwinkel α wird der induzierte Anstellwinkel α_i mit der Anströmgeschwindigkeit $\boldsymbol{V}_\infty$ ergänzt. Daraus resultiert der effektive Anstellwinkel α_eff zwischen der Profilsehne und der lokalen Anströmung:

$$\alpha_\mathrm{eff} = \alpha - \alpha_\mathrm{i}. \tag{5.21}$$

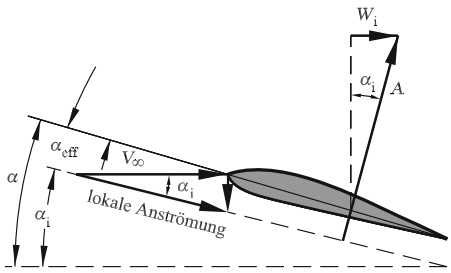


Abb. 5.26 Geometrischer α-, induzierter α_i- und effektiver α_{eff}- Anstellwinkel eines lokalen Profils des Tragflügels

Damit ergibt sich eine Komponente des lokalen Auftriebsvektors in Richtung $\boldsymbol{V}_\infty$, den man induzierten Widerstand W_i nennt. Bezeichnet man den Ort des Profils mit y', so erhält man für den induzierten Anstellwinkel

$$\alpha_i(y') = \frac{1}{\tan\left(\dfrac{-w(y')}{V_\infty}\right)} . \tag{5.22}$$

w ist im Allgemeinen eine Größenordnung kleiner als $\boldsymbol{V}_\infty$, so dass sich aus Gl. (5.22)

$$\alpha_i(y') = -\frac{w(y')}{V_\infty} \tag{5.23}$$

ergibt. Mit Gl. (5.20) erhält man eine Beziehung zwischen dem induzierten Anstellwinkel α_i und der Zirkulationsverteilung $\Gamma(y)$:

$$\alpha_i(y') = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot V_\infty} \cdot \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \frac{\mathrm{d}\Gamma}{y' - y} \cdot \mathrm{d}y . \tag{5.24}$$

Entsprechend der Abb. 5.26 ist α_{eff} der Anstellwinkel, der für das betrachtete lokale Profil an der Stelle y' wirksam ist. Da die abwärts gerichtete Vertikalgeschwindigkeit über die Flügelspannweite variiert, ändert sich der effektive Anstellwinkel α_{eff} entsprechend. Damit ergibt sich für den Auftriebsbeiwert an der Stelle $y = y'$

$$c_a = a' \cdot (\alpha_{eff}(y') - \alpha_{A=0}) = 2 \cdot \pi \cdot (\alpha_{eff}(y') - \alpha_{A=0}). \tag{5.25}$$

Dabei wurde der Anstieg a' des Auftriebsbeiwertes durch den Wert $2 \cdot \pi$ ersetzt, wobei der Winkel $\alpha_{A=0}$ beim Auftrieb $A = 0$ sich bei einem Flügel mit Verwindung entsprechend y' ändert. Für einen Flügel ohne Verwindung ist $\alpha_{A=0}$ konstant und damit für einen vorgegebenen Flügel eine bekannte Größe. Mit der Kutta-Joukowski-Bedingung erhält man für das lokale Profil mit der Länge $l(y')$ den Auftrieb:

$$A' = \frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot \boldsymbol{V}_\infty^2 \cdot l(y') \cdot c_\mathrm{a} = \rho_\infty \cdot V_\infty \cdot \Gamma(y') \,. \tag{5.26}$$

Damit ergibt sich für den Auftriebsbeiwert

$$c_\mathrm{a} = \frac{2 \cdot \Gamma(y')}{V_\infty \cdot l(y')} \,. \tag{5.27}$$

Für den effektiven Anstellwinkel erhält man mit (5.25):

$$\alpha_\mathrm{eff} = \frac{\Gamma(y')}{\pi \cdot V_\infty \cdot l(y')} + \alpha_{A=0} \,. \tag{5.28}$$

Mit $\alpha_\mathrm{eff} = \alpha - \alpha_\mathrm{i}$ und Gl. (5.24) erhält man die Grundgleichung der *Prandtlschen Tragflügeltheorie*:

$$\alpha(y') = \frac{\Gamma(y')}{\pi \cdot V_\infty \cdot l(y')} + \alpha_{A=0}(y') + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot V_\infty} \cdot \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \frac{\mathrm{d}\Gamma}{y' - y} \cdot \mathrm{d}y \,. \tag{5.29}$$

Diese Integro-Differentialgleichung macht von der Aussage Gebrauch, dass der geometrische Anstellwinkel gleich der Summe aus effektivem Anstellwinkel und dem induzierten Anstellwinkel ist. Die einzige Unbekannte ist die Zirkulationsverteilung Γ. Alle anderen Größen α, l, $\boldsymbol{V}_\infty$ und $\alpha_{A=0}$ sind bei einem vorgegebenen Flügel bekannt. Die Lösung der Gl. (5.29) ergibt $\Gamma = \Gamma(y')$, wobei y' über die Spannweite von $y = -s/2$ bis $y = s/2$ variiert. Damit erhält man mit der Kutta-Joukowski-Bedingung den induzierten Auftrieb:

$$A'(y') = \rho_\infty \cdot V_\infty \cdot \Gamma(y'), \tag{5.30}$$

und den Gesamtauftrieb:

$$A = \rho_\infty \cdot V_\infty \cdot \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \Gamma(y) \cdot \mathrm{d}y \,. \tag{5.31}$$

Mit Gl. (5.2) ergibt sich der Auftriebsbeiwert:

$$c_\mathrm{a} = \frac{A}{\frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot \boldsymbol{V}_\infty^2 \cdot S} = \frac{2}{V_\infty \cdot S} \cdot \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \Gamma(y) \cdot \mathrm{d}y \,, \tag{5.32}$$

mit der Flügelfläche S.

Die Integration über die Spannweite des Flügels ergibt den induzierten Gesamtwiderstand:

$$W_\mathrm{i} = \rho_\infty \cdot V_\infty \cdot \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \Gamma(y) \cdot \alpha_\mathrm{i}(y) \cdot \mathrm{d}y \,. \tag{5.33}$$

Für den Widerstandsbeiwert erhält man:

$$c_{\mathrm{w_i}} = \frac{W_\mathrm{i}}{\frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot V_\infty^2 \cdot S} = \frac{2}{V_\infty \cdot S} \cdot \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \Gamma(y) \cdot \alpha_\mathrm{i}(y) \cdot \mathrm{d}y \,, \tag{5.34}$$

Die Prandtlsche Tragflügeltheorie ergibt damit alle aerodynamischen Eigenschaften eines vorgegebenen Tragflügels. Die Lösungsmethoden der Gl. (5.29), wie z. B. die Wirbel-Filamentemethode (*J. D. Anderson jr.* 2010), sind in der zitierten Aerodynamik-Literatur eingehend behandelt, so dass hier nicht näher darauf eingegangen wird.

Die unterschiedlichen Formen von Unterschall-Tragflügeln sind in der Abb. 5.27 dargestellt. Der Flügel mit elliptischer Grundfläche führt zu einem minimalen induzierten Wiederstand. Da elliptische Flügel jedoch schwierig zu fertigen sind, hat man in der Praxis den Trapezflügel bevorzugt, der näherungsweise eine elliptische Auftriebsverteilung verwirklicht.

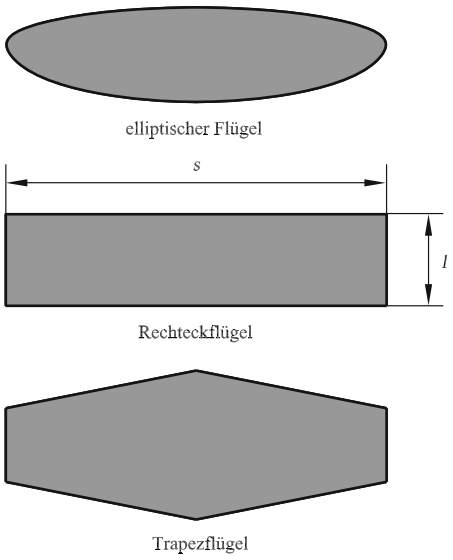


Abb. 5.27 Unterschiedliche Formen ebener Tragflügel

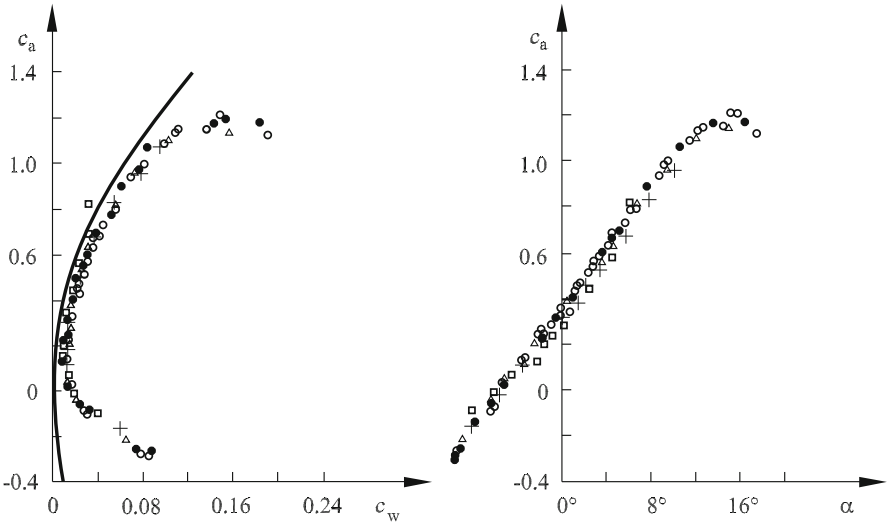


Abb. 5.28 Polaren- und Auftriebsbeiwerte von Rechteckflügeln der Seitenverhältnisse $s/l = 1$ bis 7, *L. Prandtl* 1915

Ein wichtiges Ergebnis der Tragflügeltheorie ist, dass der induzierte Wiederstand sich umgekehrt proportional zur Spannweite s verhält. Um beim Tragflügelentwurf den induzierten Widerstand möglichst gering zu halten, muss also die Spannweite s möglichst groß gewählt werden. Dies hat *L. Prandtl* 1915 experimentell an Rechteckflügeln der Seitenverhältnisse s/l von 1 bis 7 bestätigt. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.28 zusammengefasst. Dabei wurden die Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte auf den Rechteckflügel mit dem Seitenverhältnis $s/l = 5$ skaliert.

3.1 Tragflügelberechnung

Die Erweiterung von Prandtls Tragflügeltheorie auf *Tragflügel endlicher Dicke* und die Berechnungsmethoden z. B. der Druckverteilung sind u. a. in den Aerodynamik-Büchern von *J. D. Anderson jr.* 2010 und *D. Küchemann* 1987 beschrieben. Die Abb. 5.29 zeigt typische Druckverteilungen über der Fläche von Unterschall-Tragflügeln. Die nahezu elliptische Spannweitenverteilung entspricht dem zuvor diskutierten Sachverhalt. Die starke Beschleunigung stromab der Vorderkante des Flügels führt auf den Ober- und Unterseiten zu unterschiedlichen Druckspitzen, die letztendlich den Auftrieb des Flügels verursachen. Für den gepfeilten Unterschall-Flügel, der in Abschn. 5 behandelt wird, ändert sich die Druckverteilung über die Spannweite beträchtlich. Die Druckspitzen sind an den Flügelenden mehr ausgeprägt, was für den Flügelentwurf unerwünscht ist.

Bisher wurde ausschließlich die reibungsfreie Tragflügeltheorie behandelt. Von Gl. (5.6) weiß man, dass der Gesamtwiderstand c_w und der Auftrieb c_a neben den

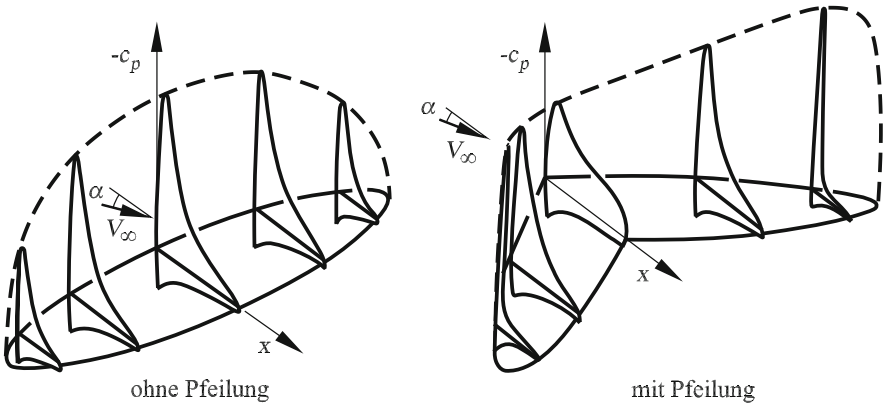
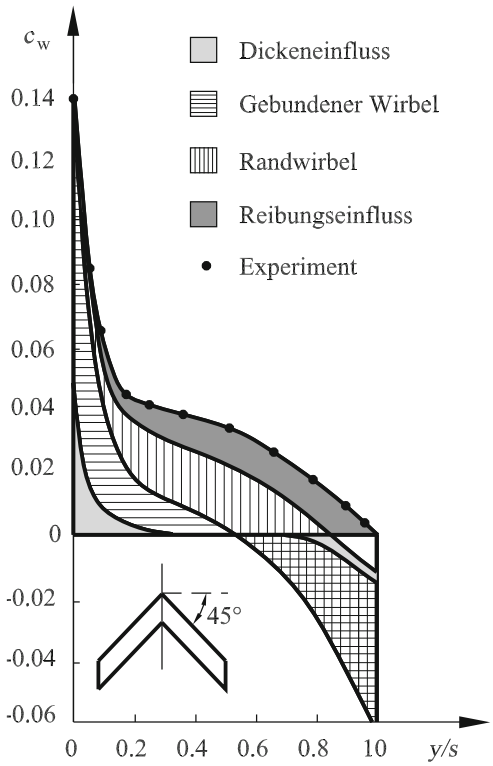


Abb. 5.29 Druckverteilungen eines Flügels großer Streckung, *D. Küchemann* 1987

Abb. 5.30 Widerstandsanteile über die Spannweite eines gepfeilten Unterschall-Flügels, $Re_l = 1.7 \cdot 10^6$, *D. Küchemann* 1987



Druck- und induzierten Anteilen c_d und c_i einen Reibungsanteil c_f enthält. Die Abb. 5.30 gibt einen Überblick über die entsprechenden Anteile entlang der Spannweite eines gepfeilten Unterschall-Flügels bei der Reynolds-Zahl $Re_l = 1.7 \cdot 10^6$ und einem vorgegebenen Auftriebsbeiwert $c_a = 0.56$ eines Verkehrsflugzeuges.

3.2 Numerische Tragflügelberechnung

Für die Berechnung der reibungsbehafteten Tragflügelströmung stehen heute Hochschulprogramme sowie kommerzielle Strömungsmechanik-Software zur Verfügung (siehe u. a. *E. Laurien* und *H. Oertel jr.* 2013). Dabei werden im laminaren Bereich der Strömung die Navier-Stokes-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (65)) und im turbulenten Bereich die Reynolds-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (99)) numerisch gelöst. Die Entwicklung der numerischen Methoden in der Strömungsmechanik ging von den Finite-Differenzen-Methoden (FDM) über die Finite-Volumen-Methoden (FVM) bis hin zu den adaptiven Finite-Elemente-Methoden (FEM) für instationäre dreidimensionale Strömungsprobleme. Parallel dazu wurden Spektralmethoden (SM) insbesondere zur Lösung strömungsmechanischer Stabilitätsprobleme und der direkten Strömungssimulation entwickelt (siehe Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik). Aus der Vielzahl der numerischen Lösungsalgorithmen wurde für die numerische Tragflügelberechnung die Finite-Volumen-Methode (FVM) gewählt. Als Beispiel dient der transsonische Tragflügel eines Verkehrsflugzeuges, der im folgenden Abschn. 5 im Detail behandelt wird.

Die Abb. 5.31 zeigt die Vorgehensweise beim Entwurf und der Nachrechnung des Tragflügels. Der *Vorentwurf* des Tragflügels wird mit der reibungsfreien Prandtlschen Tragflügeltheorie durchgeführt. Dabei wird die Wölbung des Profils, die aerodynamischen Beiwerte und die skizzierte Druckverteilung vorläufig festgelegt. Es folgt im zweiten Schritt die *Nachrechnung* des entworfenen Flügels, wobei die Pfeilung und Verwindung des Flügels mit berücksichtigt werden. Die erste Nachrechnung des Tragflügels wird im Allgemeinen nicht den geforderten Auftriebsbeiwert c_a erreichen, bzw. der berechnete Widerstandsbeiwert c_w wird noch zu groß ausfallen. Damit wird ein erneuter Iterationsschritt erforderlich, der mit den berechneten Daten einen verbesserten Vorentwurf ermöglicht. Diese Entwurfsiteration wird in mehreren Schritten durchgeführt.

Sind die geforderten aerodynamischen Beiwerte erfüllt, erfolgt der dritte Schritt des Entwurfsprozesses, die *Verifikation* und *Validierung* des Flügelentwurfs im Windkanal. Dabei verstehen wir unter Verifikation den Vergleich der experimentellen mit den numerischen Ergebnissen sowie die Anpassung des numerischen Lösungsverfahrens sowie der Messtechnik im Windkanal (siehe Abschn. 4). Die Validierung verlangt die Weiterentwicklung und Anpassung der physikalischen Modelle insbesondere der Turbulenzmodelle in den Grundgleichungen. Dies ist ein zeitraubender Prozess, der entscheidend die Entwicklungszeit eines Flugzeuges bestimmt.

In der Verifikations- und Validierungsphase wird in wenigen Iterationsschritten die Nachrechnung verbessert bzw. der Vorentwurf korrigiert, bis die eingangs gestellten Anforderungen erfüllt sind. Bei jedem Iterationsschritt muss dabei ein neues Windkanalmodell gebaut werden und die zeitaufwendigen Messreihen in den Windkanälen wiederholt werden. Je weniger Iterationsschritte durchlaufen werden, umso erfolgreicher ist der Entwurfsprozess. Je genauer die numerischen Lösungsmethoden für die Nachrechnung sind, umso effizienter ist der Entwurf.

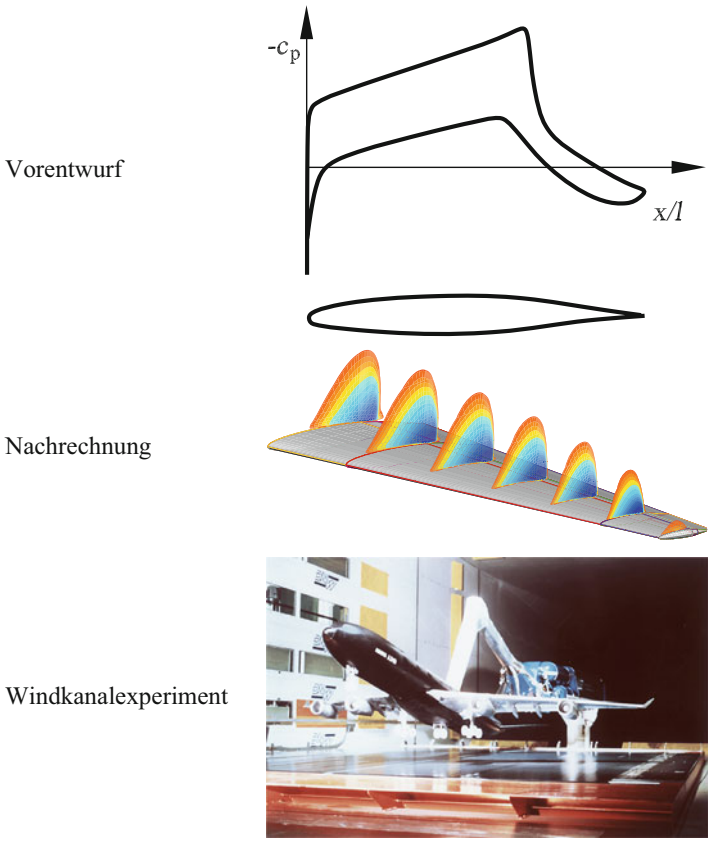


Abb. 5.31 Tragflügelentwurf

Das Ergebnis der Nachrechnung für die Mach-Zahl $M_\infty = 0.78$, die Reynolds-Zahl $Re_l = 26.6 \cdot 10^6$ und dem Pfeilwinkel $\phi = 20°$ ist in Abb. 5.32 als Isobaren dargestellt. Die numerische Lösung zeigt das Überschallfeld und die Verdichtung der Isobaren im Bereich des Verdichtungsstoßes, der dieses stromab abschließt. Für den vorgegebenen Auftriebsbeiwert $c_a = 0.56$ eines transsonischen Modellflügels berechnet man einen Widerstandsbeiwert $c_w = 0.0184$. Dieser geringe Widerstandsbeiwert ergibt sich für einen transsonischen Laminarflügel. Dabei wird der laminar-turbulente Übergang auf der Oberseite des Flügels bis in den Stoß-Grenzschichtbereich und auf der Unterseite bis zum Dickenmaximum verlagert. Dies wird mit einer kontinuierlich beschleunigenden Druckverteilung erreicht und geht mit einer Verringerung des Widerstandsbeiwertes einher (siehe Abb. 5.41). Den Isobaren auf der Flügeloberseite kann man die Lastverteilung auf dem Flügel entnehmen.

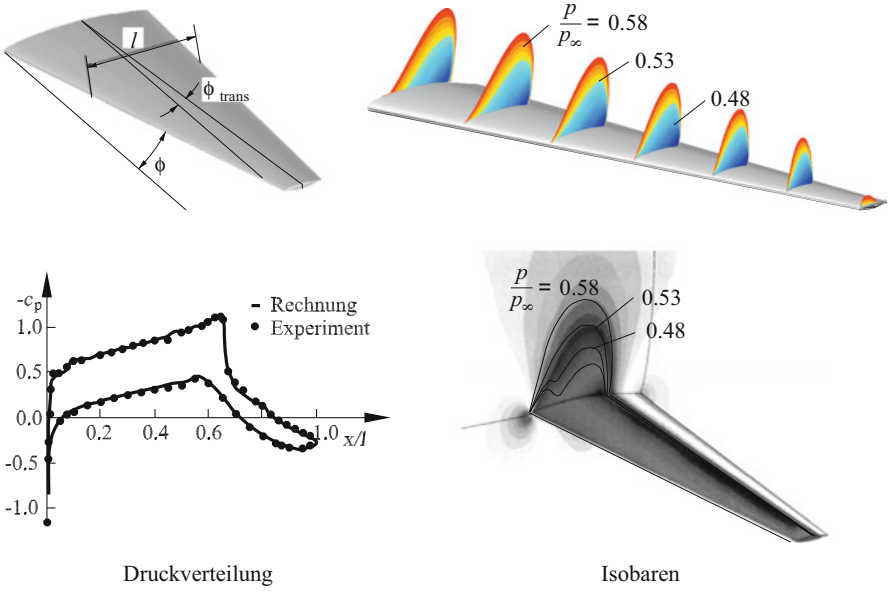


Abb. 5.32 Isobaren in Profilschnitten und auf der Oberfläche eines gepfeilten transsonischen Tragflügels, $M_\infty = 0.78$, $Re_l = 26.6 \cdot 10^6$, Anstellwinkel $\alpha = 2°$ und Pfeilwinkel $\Phi = 20°$

4 Aerodynamisches Versuchswesen

In diesem Kapitel soll nicht auf die vielfältigen Windkanäle und Messmethoden eingegangen werden, sondern vielmehr soll der *Windkanal Prandtlscher Bauart* herausgestellt werden. Transsonische-, Überschall- und Hyperschall-Windkanäle sowie die dazugehörige Messtechnik werden in den zitierten Büchern behandelt. Der Windkanal Prandtlscher bzw. Göttinger Bauart besteht aus einem geschlossenen Kreislauf mit offener Versuchsstrecke, in die das zu messende Tragflügel- bzw. Flugzeugmodell an einer Waage angebracht wird. Die Abb. 5.33 zeigt eine Skizze von Prandtls Windkanal. Die Luft wird vom Ventilator in einem sich stetig erweiternden Kanal mit Umlenkblechen der Düse von 2 m Durchmesser zugeführt. Die beschleunigte Luft gelangt in die offene Messstrecke, von dort in den Auffangtrichter, wird im anschließenden Diffusor verzögert und dann zum Gebläse zurückgeleitet. Der Windkanal war für eine Windgeschwindigkeit von 40 m/s ausgelegt, die von den damaligen Flugzeugen erreicht wurde. Die Beruhigung der Luft vor der Düse erfolgte mit einem Gleichrichter und Sieben.

Diese sind in Abb. 5.34 dargestellt. Um einen homogenen Luftstrom in der Messstrecke mit gleichmäßiger Geschwindigkeit über dem Querschnitt zu erreichen, muss das Kontraktionsverhältnis der Düse geeignet gewählt werden. Das Druckgefälle $p_1 - p_2$ bewirkt bei jedem Luftteilchen den gleichen Zuwachs an Bewegungsenergie. Relative Schwankungen werden durch die Kontraktion der Düse

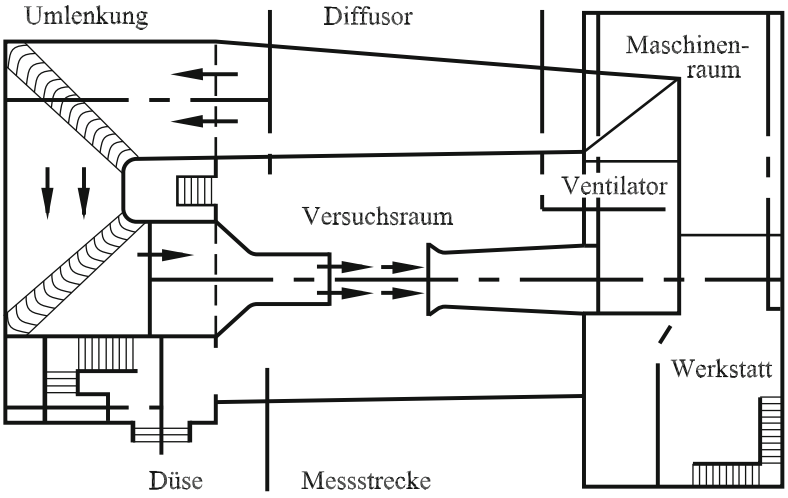


Abb. 5.33 Unterschall-Windkanal Prandtlscher Bauart, *L. Prandtl* 1915

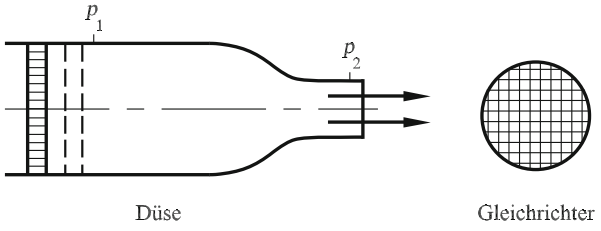


Abb. 5.34 Düse mit Gleichrichter und Sieben

weitgehend ausgeglichen. Ist das Verhältnis der Geschwindigkeiten 1 : 5, so ist das des Staudrucks 1 : 25. Jegliche Wirbelstärke der ankommenden Strömung muss durch *Gleichrichter*, d. h. Systeme von parallelen Kanälen reduziert werden. Eine um eine Achse parallel zur Strömungsrichtung rotierende Luftmasse erhält bei der Kontraktion ihres Querschnittes auf $1/n$ die n-fache Winkelgeschwindigkeit. Da der Durchmesser quer zur Stromlinie im Verhältnis $1/\sqrt{n}$ abnimmt, ergibt sich eine Zunahme der Quergeschwindigkeit $(r \cdot \omega)$ im Verhältnis $\sqrt{n}$, während die Längsgeschwindigkeit im Verhältnis n zunimmt. Eine Rotation um eine Achse quer zur Stromlinie ergibt im Gegensatz eine Verminderung der Winkelgeschwindigkeit ω proportional zur Verminderung der Querabmessung r, also auf das $1/\sqrt{n}$-fache. Hier wird die Störgeschwindigkeit $r \cdot \omega$ auf das $1/\sqrt{n}$-fache vermindert. Zum Ausgleich longitudinaler Geschwindigkeitsschwankungen werden zusätzlich Drahtsiebe angebracht.

Neben diesen örtlichen Geschwindigkeitsschwankungen treten aufgrund der turbulenten Strömung auch zeitliche Geschwindigkeitsschwankungen auf. Man ordnet hinter dem Gleichrichter möglichst gleichmäßige, feinmaschige Siebe an,

die die ankommende Turbulenz dämpfen. Aufgrund der Kontraktion der Düse wird auch die Turbulenz durch ähnliche Vorgänge wie beim Ausgleich der räumlichen Geschwindigkeitsschwankungen herabgesetzt. Dabei wird die Längskomponente der Schwankungsgeschwindigkeit $\sqrt{\overline{u'^2}}$ wesentlich stärker reduziert als die Querkomponenten $\sqrt{\overline{v'^2}}$ und $\sqrt{\overline{w'^2}}$, so dass direkt hinter der Düse eine anisotrope Turbulenz vorhanden ist, die stromab aber wieder isotrop wird. Es ist hierbei zu beachten, dass die Dämpfungssiebe selbst wieder Turbulenz in die Strömung einbringen, die jedoch stromab abklingt. Sie kann dadurch reduziert werden, dass man zwischen dem letzten Sieb und der Düse eine *Beruhigungsstrecke* vorsieht.

5 Transsonische Aerodynamik, Pfeilflügel

Verkehrsflugzeuge mit Strahlantrieb fliegen im transsonischen Unterschall-Mach-Zahl Bereich. Eine typische Flugenvelope eines Verkehrsflugzeugs ist in Abb. 5.35 gezeigt. Im Steigflug ist die Fluggeschwindigkeit V_∞ durch die Festigkeitsgrenze des Flugzeugs begrenzt, wobei eine Mindestgeschwindigkeit die so genannte Überziehungsgrenze nicht unterschritten werden darf. In größeren Höhen ist die Fluggeschwindigkeit durch die Auslegungs-Mach-Zahl $M_\infty = 0.8$ bestimmt. Unterhalb 11 km Höhe nimmt die Schallgeschwindigkeit zu, was bei konstanter Mach-Zahl zu größeren Fluggeschwindigkeiten führt. Oberhalb 11 km Höhe ist die Schallgeschwindigkeit konstant. Nach oben wird die Flughöhe durch die Auslegung der Druckkabine begrenzt.

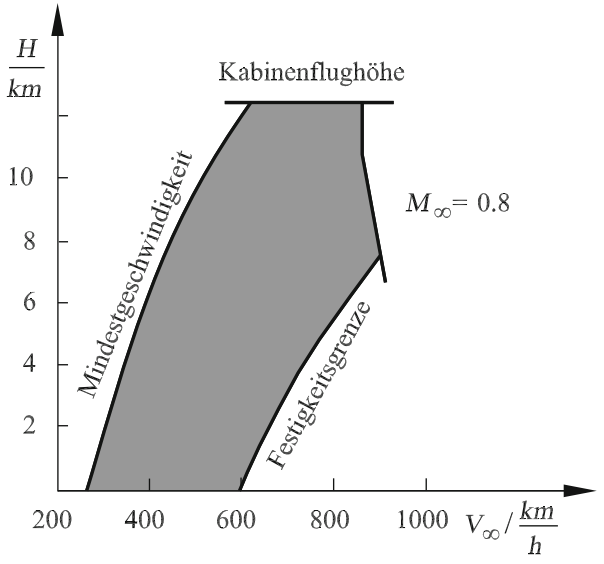


Abb. 5.35 Flugenvelope eines Verkehrsflugzeuges

Bei transsonischen Unterschall-Mach-Zahlen von $M_\infty = 0.8$ ist die Strömung kompressibel und das Überschallgebiet auf dem Flügel wird von einem Verdichtungsstoß abgeschlossen. Die Flügel der Verkehrsflugzeuge sind aus den in Abb. 5.15 dargestellten Gründen gepfeilt. Dies führt zu einer Verringerung der lokalen Profil-Mach-Zahl und damit zu einer Verringerung des Gesamtwiderstandes c_w. Die Wirkung der Flügelpfeilung war bereits 1939 bekannt, wie die Abb. 5.37 dokumentiert. Aufgrund der Flügelpfeilung wird die *Flügelgrenzschicht* dreidimensional, was auch Auswirkungen auf den laminar-turbulenten Grenzschichtübergang hat.

Transsonische Tragflügelumströmungen sind *nichtlinear*. So wird zum Beispiel der lineare Anstieg des Auftriebsbeiwertes c_a mit dem Anstellwinkel α bei Unterschallströmungen in Gl. (5.13) bei transsonischer Anströmung durch einen nichtlinearen Verlauf abgelöst. Auch lässt sich die Potentialtheorie auf die nichtlineare Strömung nicht mehr anwenden, so dass numerische Lösungsmethoden der Navier-Stokes- und Reynolds-Gleichungen für die Berechnung der transsonischen Tragflügelströmung angewandt werden müssen.

Der Verdichtungsstoß verbunden mit der Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkung auf dem Flügel verändert das Strömungsfeld gegenüber der Unterschallströmung derart, dass der Auftriebsbeiwert c_a nicht mehr reibungsfrei berechnet werden kann. Die Abb. 5.36 zeigt den Vergleich einer reibungsfreien und einer reibungsbehafteten berechneten Profilumströmung bei der transsonischen Mach-Zahl $M_\infty = 0.82$. Die mit der linearen Potentialtheorie berechnete Druckverteilung hat nichts mit der transsonischen Druckverteilung gemein. In Abb. 5.37 ist die Polare des gepfeilten Flügels im Vergleich zu der Polaren des ungepfeilten Flügels für die Mach-Zahl $M_\infty = 0.9$ dargestellt.

Aufgrund der Pfeilung sind die Stromlinien in der Flügelgrenzschicht gekrümmt. Wendet man am Grenzschichtrand die Bernoulli-Gleichung senkrecht zum Stromfaden an, erhält man näherungsweise:

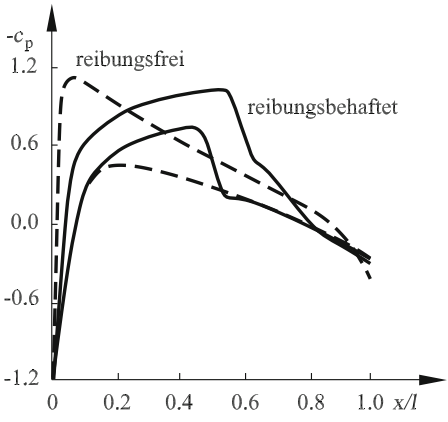


Abb. 5.36 Reibungsfreie und reibungsbehaftete transsonische Profilumströmung, $M_\infty = 0.82$

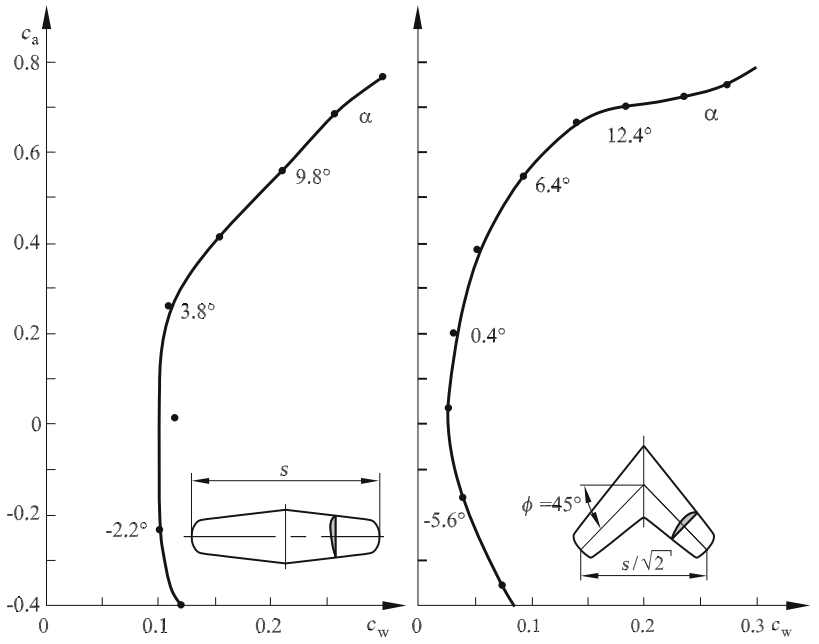


Abb. 5.37 Polaren des ungepfeilten und gepfeilten Flügels bei der transsonischen Mach-Zahl $M_\infty = 0.9$, *H. Ludwieg* 1939

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \cdot \frac{u_\delta^2}{R}\,, \tag{5.35}$$

mit n der Normalenrichtung zur Stromlinie, u_δ der Geschwindigkeit am Grenzschichtrand und R dem lokalen Krümmungsradius. An der Wand ist aufgrund der Haftbedingung $\boldsymbol{v} = 0$. Der Druck wird der Grenzschicht aufgeprägt, so dass näherungsweise gilt:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{z=\delta} = \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{z=0}\,.$$

Dieser Druckgradient senkrecht zur Stromlinie verursacht eine Querströmungskomponente $v(z)$, die in Abb. 5.38 skizziert ist. Der laminar-turbulente Übergang wird in der dreidimensionalen Grenzschicht nicht alleine von den *Tollmien-Schlichting-Wellen* TS bestimmt. Aufgrund der Querströmungskomponente treten zusätzlich *Querströmungs-Instabilitäten* QS auf, die in Abschn. 2 des Kap. 7 ▸ Instabilitäten und turbulente Strömungen behandelt werden. Die Stromlinienkrümmung ist stromab der Stromlinie am größten, so dass im vorderen Bereich des transsonischen Flügels mit dem Übergang zur turbulenten Grenzschicht gerechnet werden muss. Für die Berechnung der Tragflügelströmung muss die Transitionslinie entsprechend bestimmt werden.

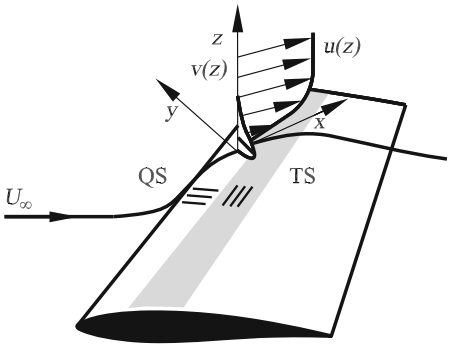


Abb. 5.38
Dreidimensionales Grenzschichtprofil eines gepfeilten Tragflügels, Tollmien-Schlichting-Wellen TS und Querströmungsinstabilitäten QS

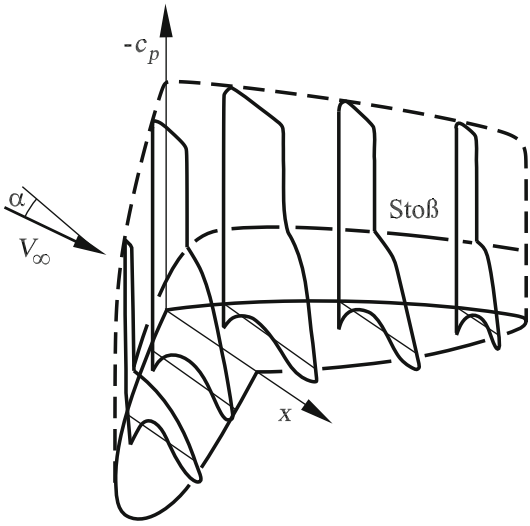


Abb. 5.39
Druckverteilungen eines gepfeilten Flügels bei transsonischer Anströmung, *D. Küchemann* 1987

Auf dem Flügel entsteht bei der Mach-Zahl $M_\infty = 0.8$ ein *Verdichtungsstoß*. Für ein herkömmliches transsonisches Profil sind in Abb. 5.39 die Druckverteilungen des gepfeilten transsonischen Tragflügels skizziert. Auf der Oberseite des Flügels tritt ein starker Verdichtungsstoß auf, wie man ihn von Abb. 5.8 kennt. Von der Flügelspitze, bzw. vom Flügel-Rumpfbereich des Flugzeugs, treten zusätzlich Kompressionswellen bzw. Verdichtungsstöße auf, die die dreidimensionale Überschallströmung im vorderen Bereich des Flügels in eine zur Mittellinie parallele Überschallströmung umlenken (Abb. 5.40), die über den nahezu senkrechten Verdichtungsstoß auf dem Flügel in eine Unterschallströmung übergeht. Für die in Abb. 5.39 gezeigten Druckverteilungen wird der laminar-turbulente Übergang in der dreidimensionalen Flügelgrenzschicht auf der Unterseite in der Druckspitze und auf der Oberseite im Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkungsbereich zu erwarten sein.

Aufgrund des hohen Wellenwiderstandes c_s der starken Verdichtungsstöße, hat man die in Abb. 5.10 eingeführten superkritischen Profile entworfen. Die Formgebung im vorderen Bereich des Flügels ist so gewählt, dass das Überschallgebiet

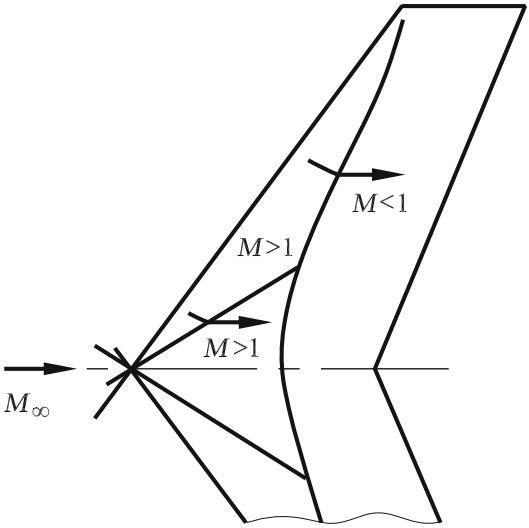


Abb. 5.40 Stoßlage auf einem gepfeilten Flügel bei transsonischer Anströmung

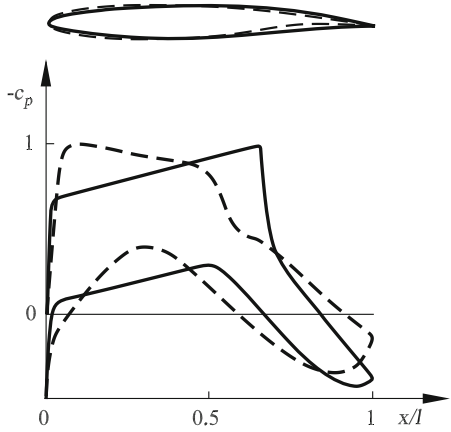


Abb. 5.41 Herkömmliches superkritisches Profil und Laminarprofil, $M_\infty = 0.75$, $c_a = 0.5$, $Re_l = 25 \cdot 10^6$

stromab ausgedehnt wird und ein abgeschwächter Verdichtungsstoß im hinteren Bereich des Flügels entsteht. Die daraus resultierende Druckverteilung für eine Anström-Mach-Zahl von 0.75 ist in Abb. 5.41 gestrichelt dargestellt.

Will man den Reibungswiderstand c_f des Flügels verringern, gilt es durch geeignete Formgebung den laminar-turbulenten Übergang in der Flügelgrenzschicht stromab zu verlagern. Dazu muss man die Saugspitze auf der Flügeloberseite vermeiden und eine kontinuierliche Beschleunigung bis zum Verdichtungsstoß realisieren. Eine solche Druckverteilung ist in Abb. 5.41 durchgezogen eingetragen. Sie führt zu kleineren Nasenradien im Vorderkantenbereich und steileren Druckanstiegen im Hinterkantenbereich. Die Formgebung des Profils ist so gewählt, dass das Einsetzen der Tollmien-Schlichting-Wellen TS in den Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkungsbereich stromab verlagert wird. Die Pfeilung des Flügels muss

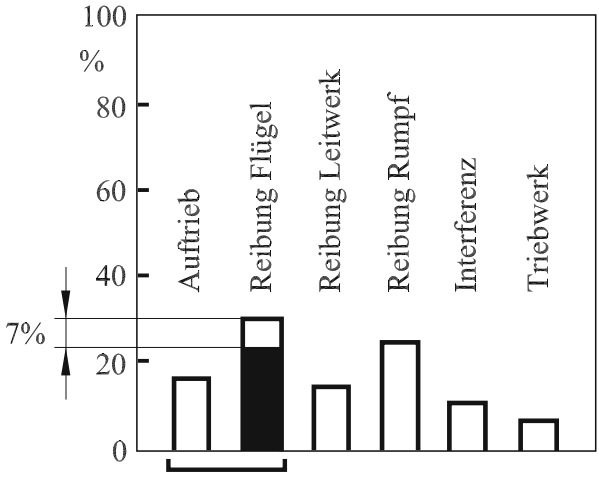


Abb. 5.42 Widerstandsanteile eines Verkehrsflugzeugs

dabei so verringert werden, dass keine Querströmungs-Instabilitäten im Vorderkantenbereich auftreten.

Die Lösung der Navier-Stokes- und Reynolds-Gleichungen (Gl. (73) und Gl. (99) des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik) für einen solchen *Laminarflügel* der transsonischen Anström-Mach-Zahl 0.78 ist in Abb. 5.32 dargestellt. Es wird ein Pfeilwinkel von $\Phi = 20°$ gewählt, bei dem die Anfachungsraten der Querströmungs-Instabilitäten im Vorderkantenbereich deutlich geringer sind als die Tollmien-Schlichting-Anfachungsraten. Die laminare Grenzschichtströmung bleibt bis in den Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkungsbereich erhalten. Dabei wird der ausgedehnte Überschallbereich auf dem transsonischen Flügel durch einen schwachen Verdichtungsstoß abgeschlossen, der in Abb. 5.32 an der Verdichtung der Isobaren erkennbar ist.

Die Widerstandsanteile für das Gesamtflugzeug sind in Abb. 5.42 zusammengestellt. Der Anteil des Flügels beträgt insgesamt 46 %. Durch die Laminarisierung des Flügels kann man eine Verringerung des Reibungswiderstandes von 15 % erreichen. Für das Flugzeug bedeutet dies ein Einsparpotential von etwa 7 %. Weitere Möglichkeiten der Widerstandsverringerung bieten die Absaugung der Flügelgrenzschicht, die Beeinflussung der viskosen Unterschicht der turbulenten Tragflügelgrenzschicht mit so genannten Riblets sowie die Beeinflussung des Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkungsbereichs mit einer Beule auf dem Flügel, die im folgenden Kapitel besprochen wird.

6 Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkung

Die Wechselwirkung des Verdichtungsstoßes mit der turbulenten Tragflügelgrenzschicht führt zu einer Zunahme der Grenzschichtdicke bereits vor dem Stoß (Abb. 5.43). Die Aufdickung der Grenzschicht verursacht Druckstörungen vor dem

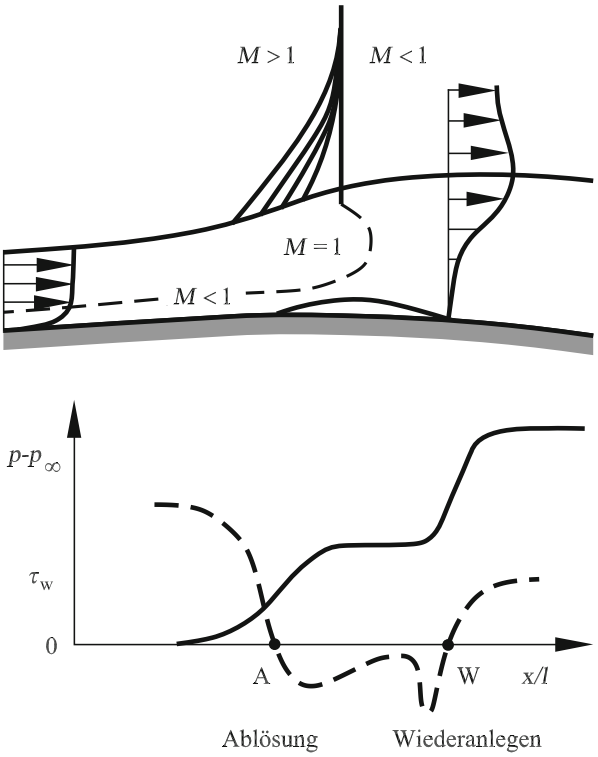


Abb. 5.43 Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkung mit Strömungsablösung, Druck- und Wandschubspannungsverteilung

Stoß, die zu einem schiefen Verdichtungsstoß und damit zu einer Stoßverzweigung führen können. Hinter dem Stoß wächst die Grenzschicht weiter an, was aufgrund der Verdrängungswirkung zu einer zusätzlichen Beschleunigung der Strömung führt. Im Wechselwirkungsbereich steigt bereits vor dem Stoß der Druck an der Flügelwand an. Dieser Druckanstieg ist mit einer Abnahme der Wandschubspannung verbunden. Handelt es sich um einen starken Verdichtungsstoß, wird die Wandschubspannung negativ und die Grenzschicht löst ab. Aufgrund der durch die Grenzschichtaufdickung verursachten Beschleunigung hinter dem Stoß und dem Ausgleich durch die turbulente Vermischung kommt es zu einem Wiederanlegen der Ablöseblase. In der Ablöseblase ist der Druck an der Flügelwand nahezu konstant.

Für die Berechnung der Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkung gibt es zwei grundsätzlich unterschiedliche Vorgehensweisen. Zum einen nutzt man die numerischen Methoden der Tragflügelberechnung des vorangegangenen Kapitels mit einer Feinauflösung des Wechselwirkungsbereiches. Ergebnisse zur Stoß-Grenzschicht-Beeinflussung werden am Ende des Kapitels vorgestellt. Zum anderen gibt es die Möglichkeit mit halbanalytischen Methoden und einer zonalen Bereichseinteilung der zweidimensionalen turbulenten Grenzschicht eines transsonischen Profils

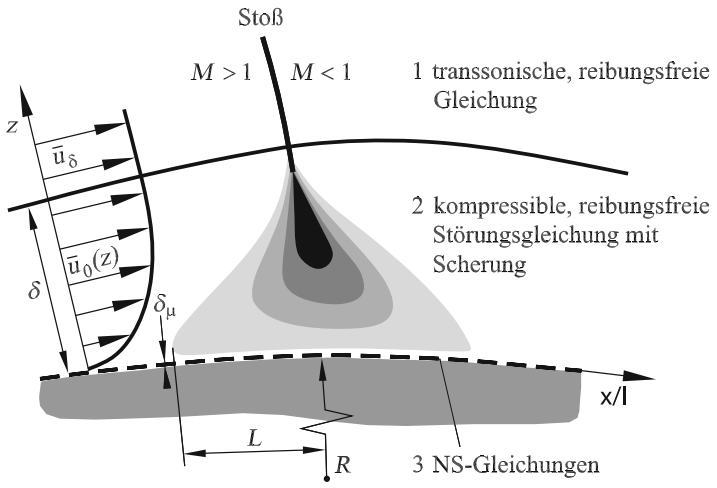


Abb. 5.44 Strömungsmodell im Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkungsbereich

Näherungslösungen der Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkung abzuleiten. Um die Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkung einer analytischen Berechnung zugänglich zu machen, wird das zonale Strömungsmodell der Abb. 5.44 benutzt. Dabei lassen sich die zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen entsprechend den physikalischen Eigenschaften der jeweiligen Teilbereiche vereinfachen.

Im reibungsfreien Außenbereich 1 der turbulenten Grenzschichtströmung gilt die nichtlineare Potentialgleichung der transsonischen Strömung. Die turbulente Grenzschicht wird entsprechend den Ausführungen in Abschn. 5 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten in zwei weitere Teilbereiche unterteilt. Der äußere Teil 2 der Grenzschicht wird durch eine turbulente kompressible Scherschicht modelliert, in der der Reibungseinfluss alleine durch die Vorgabe eines zeitlich gemittelten Grundgeschwindigkeitsprofils $\overline{u}_0(z)$ in den ansonsten reibungsfreien Störungsgleichungen eingeht. Der wandnahe Bereich 3 ist die viskose Unterschicht 3 der Dicke δ_μ. In dieser ist die Reibung wirksam, demzufolge müssen dort die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen gelöst werden. Der Begriff Störungsgleichungen erklärt sich dadurch, dass das Grundströmungsfeld 0 durch einen schwachen senkrechten Verdichtungsstoß gestört wird. Im Folgenden wird die Näherungslösung dieser reibungsfreien Störungsgleichungen im Grenzschichtbereich 2 behandelt, die letztlich auf die Anwendung der analytischen Separationsmethode führt.

Zunächst wird die Grundströmung $\overline{u}_0(z)$ festgelegt. Die Abhängigkeit der Grundströmungsgrößen von der Stromabkoordinate x wird vernachlässigt. Dies ist nur zulässig, wenn die Krümmung des Tragflügelprofils als genügend klein vorausgesetzt werden kann und der in x-Richtung betrachtete Bereich mit der charakteristischen Längserstreckung L nicht zu groß ist. Dies führt auf eine zweidimensionale

lokale Betrachtung der Vorgänge des Wechselwirkungsbereiches. Das kompressible stationäre Grundströmungsprofil, ist dann gegeben durch die zeitlich gemittelten turbulenten Größen der Geschwindigkeit $\overline{u}_0(z)$, der Dichte $\overline{\rho}_0(z)$, der Temperatur $\overline{T}_0(z)$ sowie des Druckes $\overline{p}_0$. Sämtliche Größen mit Ausnahme des Druckes $\overline{p}_0$, hängen bei der lokalen Betrachtung nur von der Wandnormalenkoordinate z ab. Der Druck der Grundströmung $\overline{p}_0$ ist entsprechend der Grenzschichtapproximation $\partial \overline{p}_0/\partial z = 0$ eine Konstante.

Bei der Ableitung der Störungs-Differentialgleichungen geht man von den zweidimensionalen kompressiblen Grenzschichtgleichungen aus:

$$\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0\,, \tag{5.36}$$

$$\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,. \tag{5.37}$$

In Wandnormalenrichtung z muss aufgrund des in die Grenzschicht eindringenden Verdichtungsstoßes ein Druckgradient $\partial p/\partial z$ berücksichtigt werden. Die Abb. 5.44 zeigt jedoch, dass der charakteristische Längenbereich L in x-Richtung und die Grenzschichtdicke δ des Bereiches 2 von gleicher Größenordnung sind. Daraus folgt im Grenzschichtfall für sehr große Reynolds-Zahlen Re_L und für $\delta/L \approx 1$, dass die Reibungsterme in z-Richtung verschwinden. Damit erhält man in z-Richtung:

$$\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z}\,. \tag{5.38}$$

Mit der Energiegleichung

$$c_p \cdot T + \frac{u^2}{2} = \text{konst} \tag{5.39}$$

und der Zustandsgleichung für ideale Gase

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T \tag{5.40}$$

erhält man 5 Gleichungen zur Bestimmung der 5 abhängigen Größen u, w, p, ρ und T. Mit dem Störansatz:

$$\begin{aligned} u &= \overline{u}_0(z) + u', \qquad w = w', \\ p &= \overline{p}_0 + p' \quad , \qquad \rho = \overline{\rho}_0(z) + \rho', \qquad T = \overline{T}_0(z) + T', \end{aligned} \tag{5.41}$$

und der Vernachlässigung der Produkte der Störungsgrößen (Linearisierung) ergeben sich die Störungs-Differentialgleichungen:

$$\overline{\rho}_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \overline{u}_0 \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho}_0 \cdot w')}{\partial z} = 0\,, \tag{5.42}$$

$$\overline{\rho}_0 \cdot \overline{u}_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \overline{\rho}_0 \cdot w' \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}z} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 \overline{u}_0}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right), \tag{5.43}$$

$$\overline{\rho}_0 \cdot \overline{u}_0 \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial z}\,. \tag{5.44}$$

Die gestrichenen Strömungsgrößen u', w', p', ρ' und T' stehen dabei für die Störungen, die aufgrund des Verdichtungsstoßes im Strömungsfeld auftreten. Sie sind im Gegensatz zu den Größen der Grundströmung von beiden Ortskoordinaten x und z abhängig. Die Energiegleichung und die Zustandsgleichung liefern nach der Linearisierung die Gleichungen:

$$\overline{u}_0 \cdot u' + c_p \cdot T' = 0\,, \tag{5.45}$$

$$\overline{\rho}_0 \cdot T' + \rho' \cdot \overline{T}_0 = p' \cdot \frac{\overline{\rho}_0 \cdot \overline{T}_0}{\overline{p}_0}\,. \tag{5.46}$$

Führt man die kritischen Werte bei der Mach-Zahl $M = 1$ als Bezugsgrößen ein, erhält man mit der kritischen Schallgeschwindigkeit a_k und p_k, ρ_k und T_k die dimensionslosen Störungs-Differentialgleichungen:

$$\overline{\rho}_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + M_\mathrm{k} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{L}{\delta} \cdot \frac{\partial(\overline{\rho}_0 \cdot w')}{\partial z} = 0\,, \tag{5.47}$$

$$\overline{\rho}_0 \cdot M_\mathrm{k} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \overline{\rho}_0 \cdot w' \cdot \frac{L}{\delta} \cdot \frac{\mathrm{d}M_\mathrm{k}}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re_\delta} \cdot \frac{L}{\delta} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 M_\mathrm{k}}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right), \tag{5.48}$$

$$\overline{\rho}_0 \cdot M_\mathrm{k} \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{L}{\delta} \cdot \frac{\partial p'}{\partial z}\,, \tag{5.49}$$

mit der charakteristischen Länge L für die Stromabkoordinate x und der Grenzschichtdicke δ für die Wandnormalenkoordinate z. Es treten die dimensionslosen Kennzahlen $Re_\delta = a_\mathrm{k} \cdot \rho_\mathrm{k} \cdot \delta/\mu$ und $M_\mathrm{k} = \overline{u}_0/a_\mathrm{k}$ mit der kritischen Schallgeschwindigkeit $a_\mathrm{k}^2 = \kappa \cdot p_\mathrm{k}/\rho_\mathrm{k}$ auf.

Im Bereich 2 sind L und δ von gleicher Größenordnung, so dass $L/\delta = 1$ gesetzt werden kann. Für $Re_\delta \gg 1$ kann demzufolge in den Störungs-Differentialgleichungen (5.47), (5.48) und (5.49) der Reibungsanteil vernachlässigt werden. Er geht lediglich indirekt über das Geschwindigkeitsprofil $u_0(z)$ der

vorgegebenen Grundströmung ein. Daraus resultiert das vereinfachte Differentialgleichungssystem für den Bereich 2:

$$\overline{\rho}_0 \cdot \left(1 + \overline{\rho}_0 \cdot (\kappa - 1) \cdot M_\mathrm{k}^2\right) \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \overline{\rho}_0 \cdot M_\mathrm{k} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{\rho}_0 \cdot w')}{\partial z} = 0\,, \tag{5.50}$$

$$\overline{\rho}_0 \cdot M_\mathrm{k} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \overline{\rho}_0 \cdot w' \cdot \frac{\mathrm{d}M_\mathrm{k}}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x}\,, \tag{5.51}$$

$$\overline{\rho}_0 \cdot M_\mathrm{k} \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial p'}{\partial z}\,. \tag{5.52}$$

Hinzu kommen die dimensionslose Energie- und Zustandsgleichung:

$$T' + (\kappa - 1) \cdot M_\mathrm{k} \cdot u' = 0, \tag{5.53}$$

$$\overline{\rho}_0 \cdot T' + \rho' \cdot \overline{T}_0 = p'. \tag{5.54}$$

Durch die Elimination von u', ρ' und T' lässt sich das Gleichungssystem (5.50), (5.51) und (5.52) in ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten p' und w' überführen, auf das dann die analytische Separationsmethode angewendet werden kann.

$$\frac{1}{\kappa} \cdot (M_0^2 - 1) \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} - \overline{\rho}_0 \cdot w' \cdot \frac{\mathrm{d}M_\mathrm{k}}{\mathrm{d}z} + \overline{\rho}_0 \cdot M_\mathrm{k} \cdot \frac{\partial w'}{\partial z} = 0\,, \tag{5.55}$$

$$\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial p'}{\partial z} + \overline{\rho}_0 \cdot M_\mathrm{k} \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} = 0\,. \tag{5.56}$$

Für die Gl. (5.55) und (5.56) muss noch das Randwertproblem bezüglich p' und w' formuliert werden. Dies deshalb, da einerseits durch den Stoß Randwerte am äußeren Grenzschichtrand von Bereich 2 vorgeschrieben werden und andererseits auch die viskose Unterschicht von Bereich 3 Randbedingungen an der umströmten Wand zu erfüllen hat. Da Ableitungen der Störungsgrößen p' und w' jeweils nach x und z vorkommen, müssen vier Randbedingungen formuliert werden, die in Abb. 5.45 dargestellt sind.

Am äußeren Grenzschichtrand zwischen Bereich 2 und Bereich 1 wird die Druckverteilung von der Außenströmung im Bereich 1 aufgeprägt. Die Druckstörung p' ist also an der Stelle $z = 1$ für alle x vorgeschrieben:

$$p' = p'(x, 1)\,, \text{für} \qquad z = 1\,. \tag{5.57}$$

In genügend großem Abstand stromauf- und stromabwärts vom Stoß, bei den dimensionslosen Koordinaten $x = \pm l$, müssen die Störgeschwindigkeiten w' verschwinden, um einen stetigen Übergang in die Grundströmung zu gewährleisten. Man erhält die beiden Randbedingungen:

$$\begin{aligned} w' &= 0\,, \text{für} \qquad x = +l\,, \\ w' &= 0\,, \text{für} \qquad x = -l\,. \end{aligned} \tag{5.58}$$

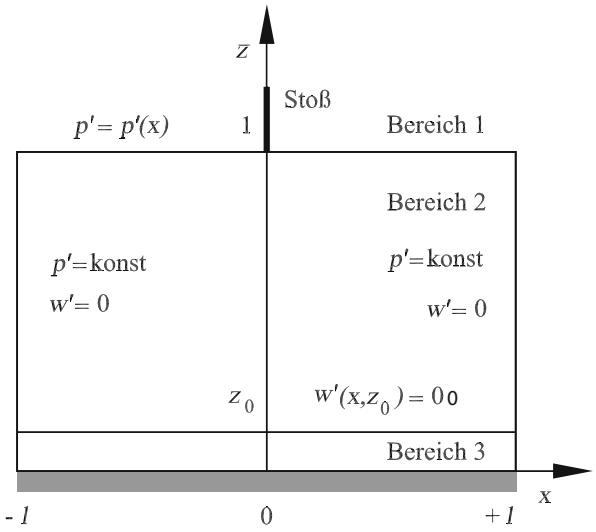


Abb. 5.45
Randbedingungen des Störungsproblems

Für die viskose Unterschicht in Bereich 3 gilt die bekannte Grenzschichtbedingung, dass für alle x der Druck längs der Wandnormalenkoordinate z konstant ist:

$$\frac{\partial p'(x, z_0)}{\partial z} = 0\,, \text{für} \qquad z = z_0 = \frac{\delta_\mu}{\delta}.$$

Aus Gl. (5.56) folgt daraus $\partial w'/\partial x = 0$. Zusammen mit der Bedingung Gl. (5.58) erhält man die vierte Randbedingung:

$$w'(x, z_0) = 0\,, \text{mit} \qquad z_0 = \frac{\delta_\mu}{\delta}\,. \tag{5.59}$$

In Abb. 5.46 ist der berechnete Druckverlauf über der Stromabkoordinate x/δ aufgetragen. Das Diagramm zeigt den Wanddruckverlauf für $z = 0$ im Vergleich mit experimentellen Ergebnissen. Es ist deutlich zu erkennen, wie der in der reibungsfreien Außenströmung durch den Verdichtungsstoß verursachte Drucksprung durch den Reibungseinfluss in der Grenzschicht verschmiert wird. Es wurde ein schwacher Verdichtungsstoß vorausgesetzt, so dass die in Abb. 5.43 skizzierte Strömungsablösung nicht auftritt.

6.1 Stoß-Grenzschicht-Kontrolle

Die Aufdickung der turbulenten Grenzschicht verursacht einen erhöhten Gesamtwiderstand des Flügels. Um die Widerstandserhöhung zu verringern, hat man zunächst die Abschwächung der Stoßstärke und damit die Verringerung des Wellenwiderstandes über eine Druckausgleichskammer im Flügel angestrebt. Die Abb. 5.47 zeigt die Wirkungsweise der Kammer. Der passive Druckausgleich erfolgt durch

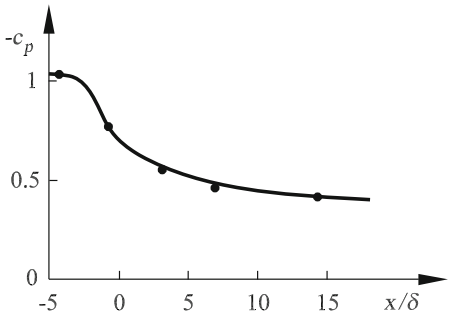


Abb. 5.46 Berechneter Druckverlauf $-c_p$ an der Wand eines transsonischen Profils im Vergleich mit experimentellen Werten ●

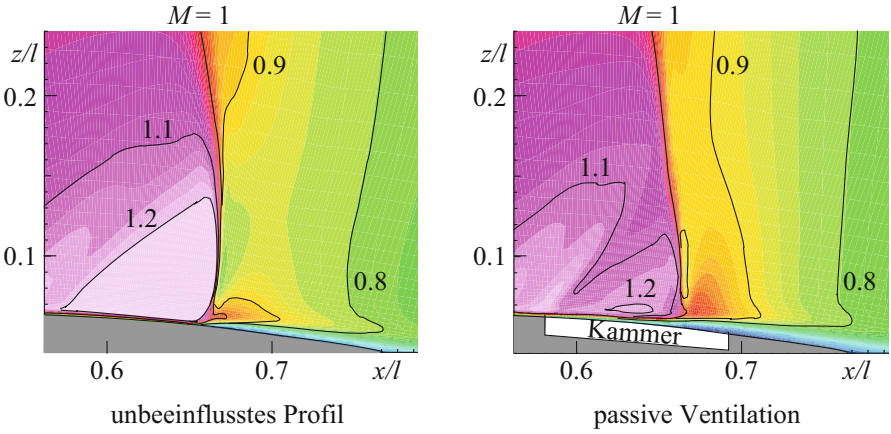


Abb. 5.47 Iso-Mach-Linien der Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkung, Einfluss einer Ausgleichskammer, $M_\infty = 0.76$, $Re_l = 6 \cdot 10^6$, $\alpha = 2°$

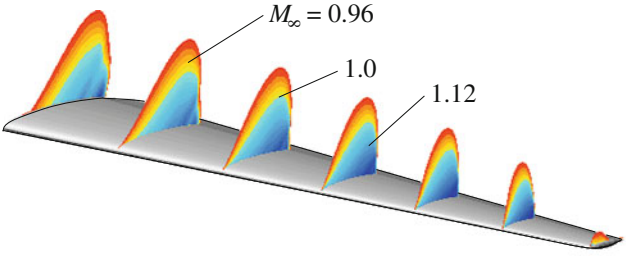
eine Wandporosität im Stoßbereich mit darunter liegender Ausgleichskammer, die einen teilweisen Druckausgleich im Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkungsbereich durch eine selbstinduzierte Ventilationsströmung ermöglicht. Aufgrund der Ventilation wird die Verdrängungswirkung der Grenzschicht derart beeinflusst, dass sich die Struktur des Verdichtungsstoßes verändert und sich anstelle des starken Verdichtungsstoßes ein abgeschwächter Verdichtungsstoß bildet. Als Folge der Stoßabschwächung werden der Wellen- und der Reibungswiderstand verringert und die Ablöseblase in Wandnähe vermieden.

Die mit den Reynolds-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (99)) berechneten Iso-Mach-Linien im Stoßbereich zeigen für das unbeeinflusste transsonische Profil die stoßbedingte Aufdickung der turbulenten Grenzschicht sowie das bereits diskutierte Nachexpansionsgebiet. Vor dem Stoß kommt es zu einer Vorkompression die die beschriebene Stoßverzweigung zur Folge hat. Diese ist um so stärker ausgebildet, je höher der Kammerdruck gewählt wird. Der schiefe Kompressionsstoß entsteht am Anfang der Ventilationskammer. Dies hat den zusätzlichen Effekt, dass der Stoß am Beginn der Beeinflussungszone fixiert

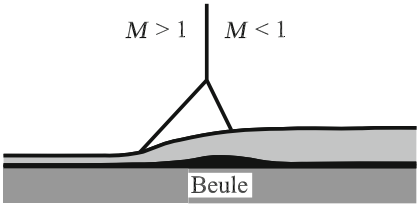
wird. Durch die Druckdifferenz vor und nach der Stoßverzweigung stellt sich in der Ventilationskammer durch die Wandperforation eine Sekundärströmung ein. Dies hat zur Folge, dass im vorderen Bereich der Ausgleichskammer ausgeblasen wird. Damit nimmt dort die Verdrängungsdicke und der Turbulenzgrad in der Grenzschicht entsprechend zu. Hinter den schiefen Stößen wird die Strömung abgesaugt, was das Anwachsen der Grenzschicht stromab verringert. Da die Entropiezunahme und damit der Wellenwiderstand mit der dritten Potenz der Stoßstärke erfolgt, ist der Wellenwiderstand über zwei abgeschwächte schiefe Verdichtungsstöße geringer als über einen einzelnen senkrechten Stoß. Damit bewirkt die Druckausgleichskammer die erwünschte Widerstandsverringerung.

Eine weitere Methode der Widerstandsreduzierung ist eine gezielte *Veränderung der Kontur* im Bereich des Stoßes, die auf dem Flügel technisch einfacher zu fertigen ist als eine Ausgleichskammer. Dabei wird durch eine geringfügige *Aufwölbung eine Stromlinie nachgebildet, wie sie sich bei der passiven Ventilation* durch die Ausgleichskammer einstellt.

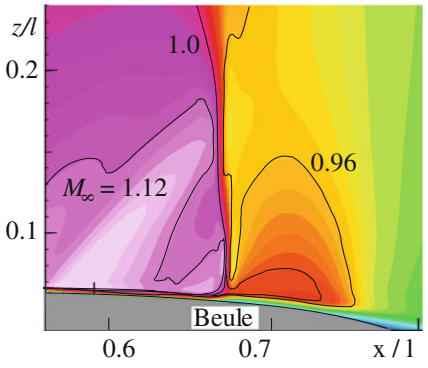
In Abb. 5.48 ist die Flügellösung der Abb. 5.32 mit einer Beule dargestellt. Es kommt wiederum zu einer Stoßverzweigung. Da mit der Beule die Grenzschicht



Flügel mit Beule



Skizze



Ausschnitt $y/s = 0.66$

Abb. 5.48 Iso-Mach-Linien der Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkung, Einfluss einer Beule, $M_\infty = 0.78$, $Re_l = 27 \cdot 10^6$, $\phi = 20°$, $\alpha = 2°$

nicht durch eine zusätzliche Strömung aus der Ausgleichskammer gestört wird, bleibt der Turbulenzgrad im Wechselwirkungsbereich geringer und die Grenzschicht dickt nicht so stark auf. Durch die Beule wird wie bei der Ausgleichskammer die stoßinduzierte Ablösung verhindert. Durch die Krümmungsvergrößerung der Beule dehnt sich das Nachexpansionsgebiet aus, was die Ablösetendenz weiter reduziert. Insgesamt erhält man eine *Verringerung des Gesamtwiderstandes von* 8 %, wobei der Auftrieb des Flügels zusätzlich geringfügig verbessert wird.

7 Strömungsablösung

In Abschn. 2 wurde bereits ausgeführt, dass oberhalb eines kritischen Anstellwinkels α_{krit} die Strömung auf dem Flügel ablöst (Abb. 5.11). Dies führt aufgrund der vergrößerten Verdrängung zu einer Erhöhung des Druck- und Reibungswiderstandes bei gleichzeitigem Abfall des Auftriebs (Abb. 5.13). Mit wachsendem Anstellwinkel α setzt die Strömungsablösung auf dem Flügel zunächst mit einer im zeitlichen Mittel, stationären Ablöseblase ein. Die Ablöselinie A und die Wiederanlegelinie W sind entsprechend der Nomenklatur von Abschn. 3 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik Halbsattel S′ (Abb. 5.49). Mit steigendem Anstellwinkel kommt es zur Sekundärablösung die zu zwei weiteren Halbsatteln führt. Im vorderen Teil des Flügels bleibt die Ablösung im zeitlichen Mittel zunächst stationär. Es bildet sich jedoch stromab eine offene Stromfläche, die zu einer instationären dreidimensionalen Strömungsablösung gehört, die auch *Buffeting* genannt wird. Im dritten Bild der Abb. 5.49 zeigen alle Stromflächen ins Strömungsfeld. Die Ablöseflächen rollen auf und bilden eine Wirbelstraße. Die Sekundärablösung führt jetzt zu einer zweiten Wirbelstraße, da die Strömung in Wandnähe nicht mehr gegen den Druckgradienten anlaufen kann, den die primäre Wirbelablösung verursacht.

Im vorangegangenen Kapitel wurde bereits von *Prandtls Ablösekriterium* Gebrauch gemacht, wonach die Wandschubspannung τ_w auf der Ablöse- und Wiederanlegelinie jeweils Null wird. Dies ist mit einer Verzweigung der Wandstromlinien verbunden, die zu dem singulären Halbsattel S′ führt. Dieses Ablösekriterium

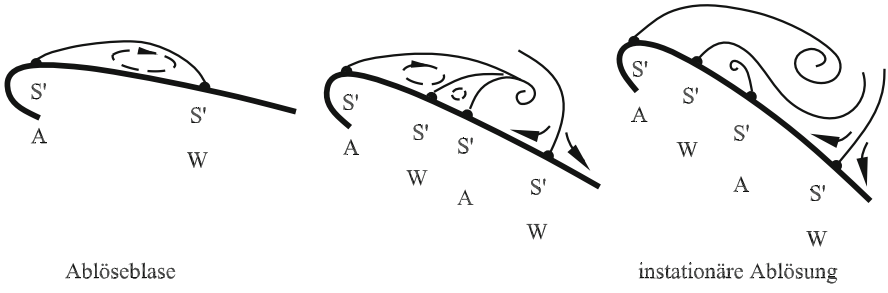


Abb. 5.49 Strömungsablösung auf dem Flügel in Abhängigkeit steigenden Anstellwinkels

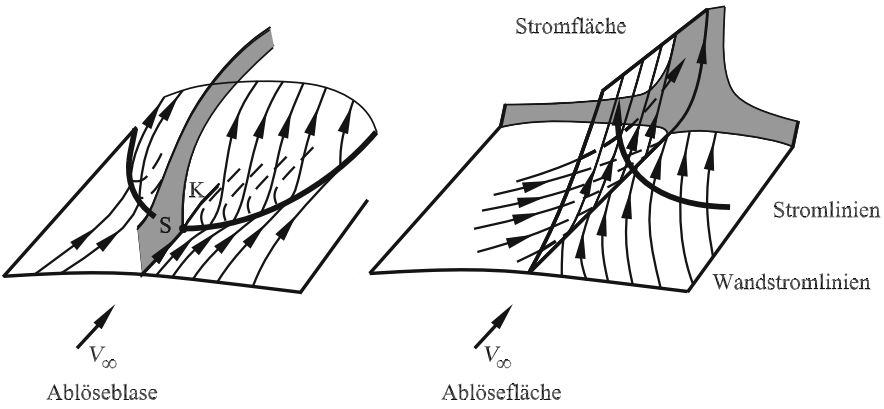


Abb. 5.50 Dreidimensionale Strömungsablösung

ist jedoch auf die zweidimensionale Strömung beschränkt. Für die dreidimensionale Strömungsablösung hat bereits die Diskussion der Strömungsablösung am Deltaflügel (Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik, Abb. 40) gezeigt, dass die Wandstromlinien auf dem Flügel in eine Ablöselinie konvergieren, die im Strömungsfeld eine Ablösefläche bildet. Das Prandtlsche Ablösekriterium $\tau_w = 0$ wird deshalb für die dreidimensionale Strömungsablösung durch das Kriterium der *Konvergenz der Wandstromlinie* ersetzt.

Die Abb. 5.50 zeigt zwei Möglichkeiten der dreidimensionalen Ablösung (siehe Abb. 38 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik). Das erste Bild zeigt die dreidimensionale Ablöseblase und das zweite Bild die Ausbildung einer freien Scherfläche, die zu einer Wirbelstraße führt. Bei der Ablöseblase ist die Rückströmung in der Blase durch eine dreidimensionale Scherschicht von der Hauptströmung getrennt. Diese Scherschicht führt zu Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten, die jedoch im zeitlichen Mittel an der Lage der Ablöseblase nichts ändern. Die freie Scherfläche des zweiten Bildes führt zu einer Stromflächenverzweigungslinie auf der Wand und der Ablösefläche, die stromab entsprechend Abb. 5.49 aufrollt und eine instationäre Wirbelstraße bildet. Für die dreidimensionale Strömungsablösung lässt sich Prandtls Ablösekriterium $\tau_w = 0$ nicht anwenden, so dass eine weiterführende Theorie der Stromflächenverzweigung erforderlich wird. In der zitierten Literatur sind mehrere dreidimensionale Ablösekriterien beschrieben, die jedoch bisher nicht zu einer abschließenden Theorie geführt haben.

8 Überschallaerodynamik, Deltaflügel

Die Aerodynamik des Überschallflugs ist im Vergleich zum Unterschallflug aufgrund der in Abschn. 2 besprochenen Verdichtungsstöße an der Profilspitze und am Profilende grundlegend verändert. Für den Überschallflug ist eine Formgebung des Flügels zu wählen, die den Wellenwiderstand und damit die Stoßstärke möglichst

gering hält. Dieser kann bis zur Hälfte des Gesamtwiderstandes betragen. Die schiefen Verdichtungsstöße der Kopf- und Schwanzwelle sind umso schwächer, je kleiner der Pfeilwinkel des Flügels und je spitzer die Flügelvorderkante ist. Dies führt im Überschall zu *Deltaflügeln* deren Aerodynamik neben den Verdichtungsstößen durch die Vorderkantenablösung und dem daraus resultierenden Wirbelsystem auf dem Flügel bestimmt wird (Abb. 5.51) verursacht den zusätzlichen Auftrieb, der mit wachsendem Anstellwinkel größer wird.

Betrachtet man in Abb. 5.52 das Verhältnis des Auftriebs- zum Widerstandsbeiwert c_a/c_w in Abhängigkeit der Flug-Mach-Zahl, ergeben sich drei Flugzeugformen. Das Verkehrsflugzeug mit gepfeilten Flügeln im transsonischen Unterschall wurde im vorangegangenen Kapitel behandelt. Bei einer Mach-Zahl von 0.7 ergibt sich ein c_a/c_w von 16. Bei der Mach-Zahl $M_\infty = 1$ fällt das Verhältnis c_a/c_w auf-

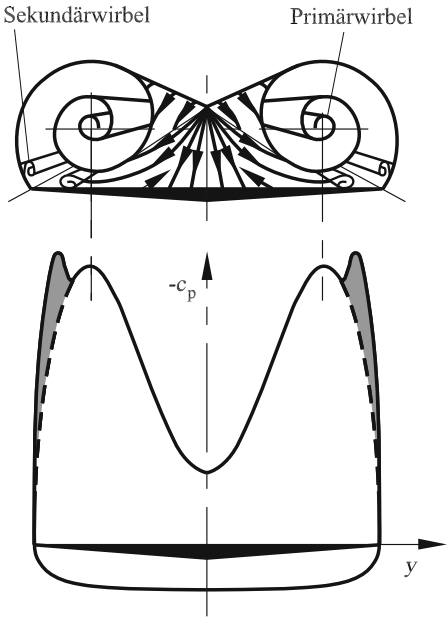


Abb. 5.51 Wirbelbildung und Druckverteilung im Schnitt eines Deltaflügels

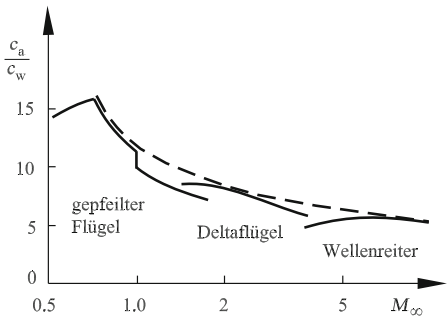


Abb. 5.52 Verhältnis von Auftriebs- zu Widerstandsbeiwert c_a/c_w in Abhängigkeit der Mach-Zahl

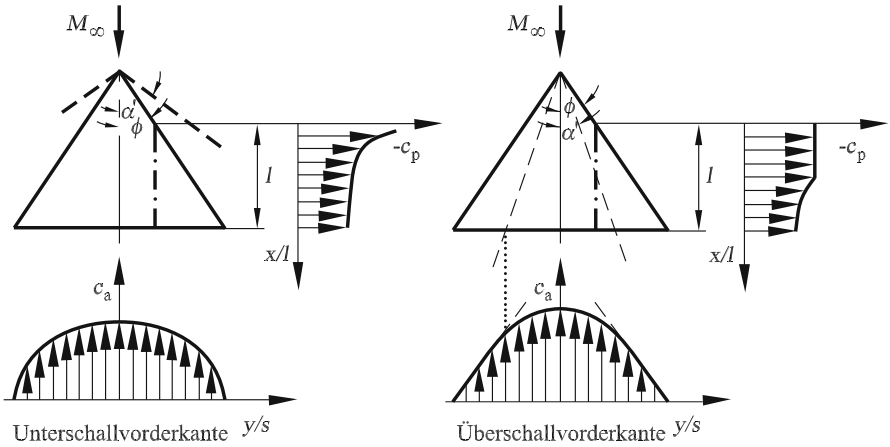


Abb. 5.53 Druckverteilung über die Flügeltiefe l und Auftriebsverteilung längs der Spannweite s eines Deltaflügels

grund des wachsenden Wellenwiderstandes ab. Ein schlankes Überschallflugzeug mit Deltaflügel erreicht bei der Mach-Zahl $M_\infty = 2$ ein c_a/c_w-Wert bis zu 8.

Bei der *Überschallströmung* eines Deltaflügels (Abb. 5.51) sind zwei Fälle zu unterscheiden. Liegt nach Abb. 5.53 die Machsche Linie (siehe Abschn. 1 des Kap. 4 ▸ Dynamik der Gase) vor der Flügelkante, so ist die Normalkomponente der Anströmgeschwindigkeit v_n kleiner als die Schallgeschwindigkeit a_∞. Es handelt sich um eine *Unterschall-Vorderkante* mit $\alpha' > \Phi$ und $v_n < a_\infty$. Liegt dagegen die Machsche Linie hinter der Flügelkante, spricht man von einer *Überschallvorderkante* mit $\alpha' < \Phi$ und $v_n > a_\infty$. Ob eine Unterschall- oder Überschallkante vorliegt ist nicht nur für die Vorderkante, sondern auch für die Hinterkante des Flügels von Bedeutung. Liegt eine Unterschall-Hinterkante vor, kann die Kuttasche Abflussbedingung angewandt werden und es tritt ein Druckausgleich zwischen der Unter- und Oberseite des Flügels auf. Für die Überschallhinterkante treten schiefe Verdichtungsstöße auf, die eine unstetige Änderung der Strömungsgrößen zur Folge haben. Zwischen der Unter- und Oberseite des Flügels besteht ein endlicher Druckunterschied. Entsprechend der Abb. 5.53 ergibt sich entlang der Flügeltiefe ein Knick in der Druckverteilung.

Für die reibungsfreie Überschallströmung kann unter der Voraussetzung schwacher Verdichtungsstöße (kleine Störungen) wie bei der Unterschallströmung die linearisierte Potentialgleichung (Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit, Gl. (20))

$$(1 - M_\infty^2) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{5.60}$$

angewendet werden. Die Strömung verhält sich wiederum linear. In Abschn. 2 wurde bereits von der *Prandtl-Glauert-Regel* im Unterschall und von der *Ackeret-Regel*

im Überschall Gebrauch gemacht. Für die Ableitung dieser Ähnlichkeitsregeln führt man eine Transformation der Potentialgleichung (5.60) durch. Diese Transformation soll von der Art sein, dass in der transformierten Potentialgleichung die Mach-Zahl der Anströmung nicht mehr explizit vorkommt. Dazu geht man von einer transformierten Vergleichsströmung aus:

$$x' = x\,, \qquad y' = \mathrm{C}_1 \cdot y\,, \qquad z' = \mathrm{C}_1 \cdot z\,, \qquad \Phi' = \mathrm{C}_2 \cdot \Phi\,. \tag{5.61}$$

Der Faktor C_1 wird so bestimmt, dass die Mach-Zahl herausfällt. Daraus ergibt sich $\mathrm{C}_1 = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ für Unterschallgeschwindigkeiten $M_\infty < 1$ und $\mathrm{C}_1 = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ für Überschallgeschwindigkeiten $M_\infty > 1$. Die transformierte Potentialgleichung der Vergleichsströmung ergibt für die Unterschallströmung:

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} = 0 \tag{5.62}$$

und für die Überschallströmung:

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} = 0\,. \tag{5.63}$$

Die transformierte Gleichung der Unterschallströmung ist identisch mit der Potentialgleichung der inkompressiblen Strömung. Die transformierte Gleichung für die Überschallströmung ist identisch mit der linearisierten Potentialgleichung (5.60) für die Mach-Zahl $M_\infty = \sqrt{2}$. Die Transformation zeigt, dass die Berechnung der Überschallströmungen für beliebige Mach-Zahlen auf diejenige bei $M_\infty = \sqrt{2}$ zurückgeführt werden kann. Die Transformation (5.61) wird als *Prandtl-Glauert-Ackeret-Ähnlichkeitsregel* der Tragflügeltheorie bezeichnet.

Für einen vorgegebenen Deltaflügel erhält man den transformierten Flügel dadurch, dass man seine Abmessungen senkrecht zur Anströmrichtung entsprechend Gl. (5.61) mit dem Faktor C_1 verkleinert bzw. vergrößert. In Abb. 5.54 ist die Transformation eines vorgegebenen Deltaflügels für verschiedene Mach-Zahlen dargestellt. Dabei wurden die transformierten Flügel für Unterschall-Mach-Zahlen $M_\infty < 1$ bei inkompressibler Strömung $M_\infty = 0$ und für Überschall-Mach-Zahlen $M_\infty > 1$ bei der Mach-Zahl $M_\infty = \sqrt{2}$ berechnet.

Die *Prandtl-Glauert-Ackeret-Regel* lässt sich auch auf den Profilschnitt und den Anstellwinkel übertragen. Das transformierte Dickenverhältnis d'/l' und der transformierte Anstellwinkel α' berechnen sich aus

$$\frac{d'}{l'} = \frac{d}{l} \cdot \sqrt{|1 - M_\infty^2|}\,, \qquad \alpha' = \alpha \cdot \sqrt{|1 - M_\infty^2|}\,. \tag{5.64}$$

Für $M_\infty < \sqrt{2}$ hat der transformierte Flügel eine geringere Dicke sowie einen kleineren Anstellwinkel als der vorgegebene Flügel. Für $M_\infty > \sqrt{2}$ ergibt sich eine größere Dicke und ein größerer Anstellwinkel.

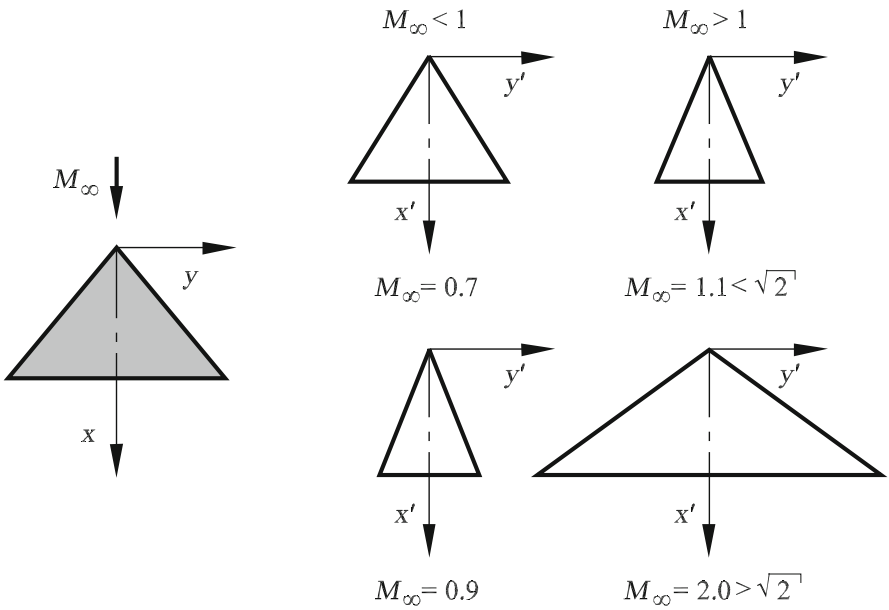


Abb. 5.54 Anwendung der *Prandtl-Glauert-Ackeret-Regel* auf einen Deltaflügel

Die Transformation der *Druckverteilung* ergibt mit (5.61) und

$$c_p = -2 \cdot \frac{u}{u_\infty} = -\frac{2}{u_\infty} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,, \qquad c_p' = -2 \cdot \frac{u'}{u_\infty} = -\frac{2}{u_\infty} \cdot \frac{\partial \Phi'}{\partial x'}\,, \tag{5.65}$$

wobei die Anströmung u_∞ für den vorgegebenen und transformierten Flügel gleich groß ist. Mit Gl. (5.61) gilt:

$$c_p = \mathrm{C}_2 \cdot c_p'\,. \tag{5.66}$$

Der Transformationsfaktor C_2 wird aus der Stromlinienanalogie der beiden Flügel bestimmt. Wegen $w = \partial\Phi/\partial z$ und $w' = \partial\Phi'/\partial z'$ ergibt sich:

$$\mathrm{C}_1^2 \cdot \mathrm{C}_2 = 1$$

und mit $\mathrm{C}_1 = \sqrt{|1 - M_\infty^2|}$ erhält man:

$$\mathrm{C}_2 = \frac{1}{|1 - M_\infty^2|}\,.$$

Daraus folgt für die Druckverteilung:

$$c_p = \frac{c'_p}{|1 - M_\infty^2|}\,. \tag{5.67}$$

Führt man die Transformation so durch, dass nur die Abmessungen in y-Richtung (Flügelgrundriss) verzerrt werden, während die Abmessungen in z-Richtung (Profil und Anstellwinkel) unverändert bleiben, wird die Transformation in (5.61) rückgängig gemacht. Man erhält dann den Druckbeiwert

$$c_p = \frac{c'_p}{\sqrt{|1 - M_\infty^2|}}\,. \tag{5.68}$$

Dieser Zusammenhang, von dem bereits in Abschn. 2 Gebrauch gemacht wurde, ist in Abb. 5.55 dargestellt.

Ein für den Überschall ausgeführter Deltaflügel muss auch gute Langsamflugeigenschaften für Start und Landung im Unterschall aufweisen. Dazu muss das in Abschn. 3 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik (Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik, Abb. 5.40 und 5.51) diskutierte Wirbelsystem auf dem Deltaflügel im gesamten Mach-Zahl-Bereich stabil sein, um einen kontinuierlichen Auftrieb zu gewährleisten. Dies erfordert eine Unterschallvorderkante des Deltaflügels z. B. bei der Flug-Mach-Zahl von $M_\infty = 2$. Der Pfeilwinkel des Flügels wird so gewählt, dass sich näherungsweise eine konische Strömung ergibt (Abb. 5.56), die einen geringst möglichen Wellenwiderstand verursacht. Der Anstellwinkel des Deltaflügels ist durch das Auftreten instationärer Wirbelablösung bzw. das Aufplatzen des Wirbels begrenzt. Dieser Grenzwinkel wird etwa bei $\alpha \approx 40°$ erreicht, so dass gegenüber Unterschall-Flügeln in einem großen Bereich des Anstellwinkels ein stabiles Wirbelsystem auftritt. Das stabile Wirbelsystem der Abb. 5.56 existiert sowohl

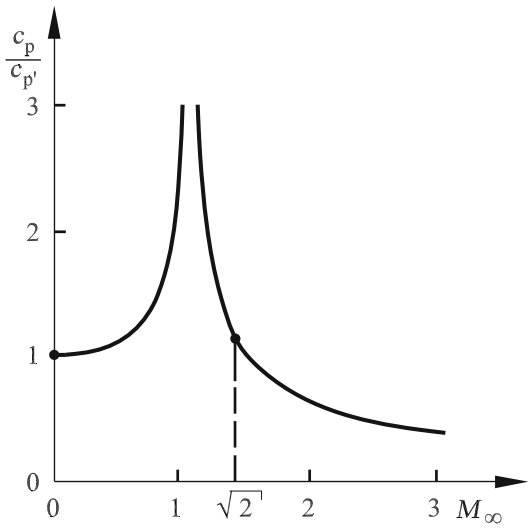


Abb. 5.55 Transformation der Druckbeiwerte

Abb. 5.56 Stationäre Wirbelablösung an der Vorderkante eines Deltaflügels

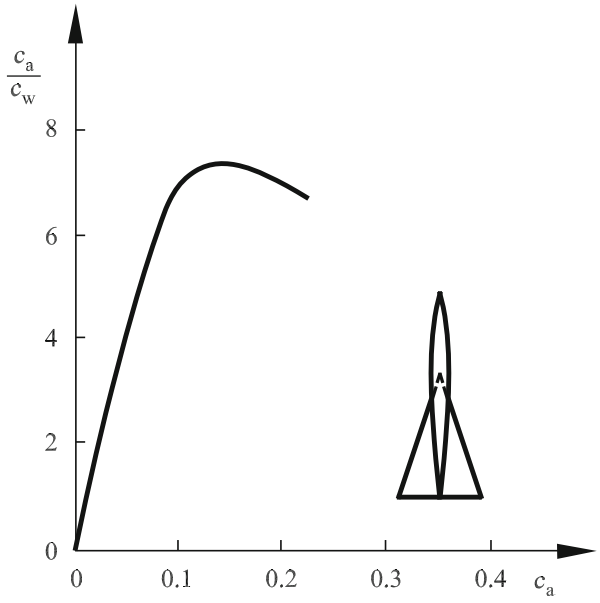


Abb. 5.57 Verhältnis von Auftriebs- zu Widerstandsbeiwert c_a/c_w für ein schlankes Überschallflugzeug mit Deltaflügel

im Unterschall als auch im Überschall, sofern eine Unterschallvorderkante realisiert wird. Dies trifft für ein Spannweiten- zu Längenverhältnis von $s/l \approx 0.5$ zu.

Die Abb. 5.57 zeigt das Auftriebs- zu Widerstandsverhältnis einer Flügel-Rumpf Konfiguration bei der Flug-Mach-Zahl $M_\infty = 2$ und einem vorgegebenen Anstellwinkel. Das Maximum von c_a/c_w beträgt für dieses Beispiel 7.4 bei einem Auftriebsbeiwert von $c_a = 0.15$. Für den Unterschallflug bei Start und Landung ist $c_a/c_w = 11.6$ bei gleichem Auftriebsbeiwert. Im Gegensatz zum gepfeilten Flügel des transsonischen Unterschallflugs, der für die Aufrechterhaltung des Auftriebs bei Start und Landung Hochauftriebsklappen benötigt, sind diese Hochauftriebshilfen beim Deltaflügel nicht erforderlich. Die Werte von c_a/c_w sind beim Deltaflügel im Unterschallflug aufgrund des stabilen Wirbelsystems höher als im Überschallflug.

Mit den beschriebenen Grundlagen des Überschallflugs wurde das *Überschallflugzeug Concorde* für die Flug-Mach-Zahl $M_\infty = 2$ ausgelegt. Das Flugzeug hat

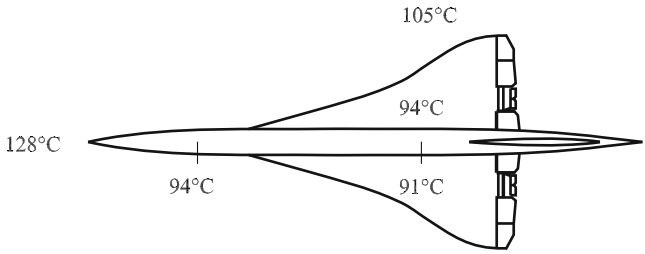


Abb. 5.58 Überschallflugzeug Concorde, $M_\infty = 2$

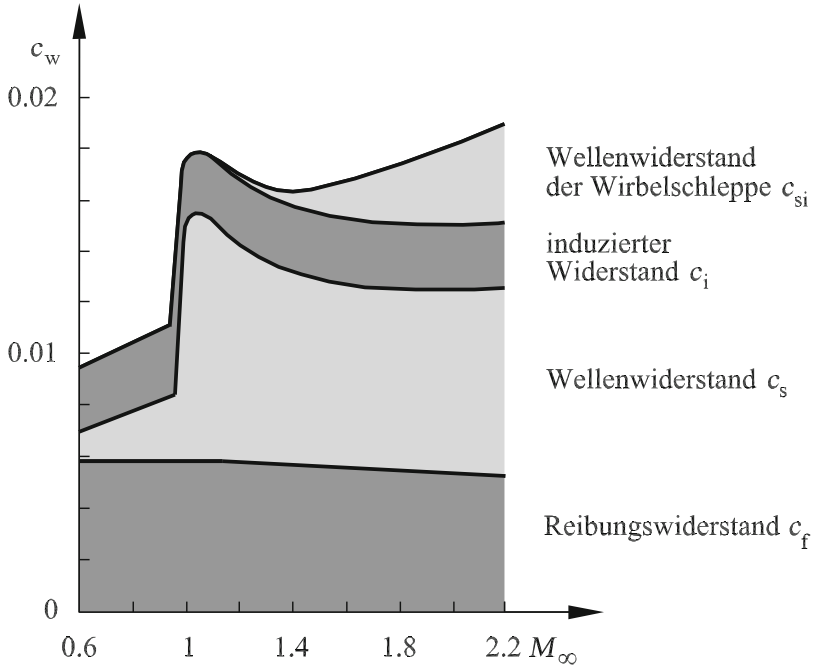


Abb. 5.59 Anteile des Gesamtwiderstands c_w des Überschallflugzeugs Concorde in Abhängigkeit der Mach-Zahl M_∞

eine Länge $l = 62\,\text{m}$ und eine Spannweite $s = 26\,\text{m}$ (Abb. 5.58). Dies ergibt ein Verhältnis $s/l = 0.42$. Damit ist näherungsweise die zuvor beschriebene schlanke, konische Strömung der Wirbelschleppe mit einer konischen Kopfwelle im Überschallflug realisiert. Die Kopfwelle heizt das strömende Gas auf, so dass beim Überschallflug 128° C im Staupunkt und 105° C an der Flügelvorderkante erreicht werden. Dies führt neben den mechanischen Belastungen zu zusätzlichen thermischen Belastungen der Zellenstruktur des Überschallflugzeugs.

Die Widerstandsanteile des Gesamtwiderstandes c_w des Überschallflugzeugs sind in Abb. 5.59 in Abhängigkeit der Flug-Mach-Zahl dargestellt. Beim Unter-

schallflug dominiert der von der Wirbelschleppe verursachte Reibungswiderstand c_{f}. Bei der Mach-Zahl $M_\infty = 2$ dominiert der Wellenwiderstand c_{s} und der Wellenwiderstand der Wirbelschleppe c_{si}.

Weiterführende Literatur

Ackeret, J.: Luftkräfte auf Flügel, die mit größerer Geschwindigkeit als Schallgeschwindigkeit bewegt werden. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschifffahrt **16**, 72–74 (1925)

Anderson, J.D.: Introduction to Flight. McGraw-Hill, New York (2011)

Anderson, J.D.: Fundamentals of Aerodynamics. McGraw-Hill, New York (2010)

Becker, E.: Gasdynamik. Teubner (1993)

Busemann, A.: Aerodynamischer Auftrieb bei Überschallgeschwindigkeit. Convegno di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, tema: le alte velocita in aviazione, 315–347, Roma (1936)

Busemann, A.: Infinitesimale kegelige Überschallströmung. Jahrbuch der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung, 455–470 (1942)

Carafoli, E.: Wing Theory in Supersonic Flow. Pergamon Press, Oxford (1969)

Cernij, G.G.: Introduction to Hypersonic Flow. Academic, New York (1961)

Courant, R., Friedrichs, K.O.: Supersonic Flow and Shock Waves. Springer, New York (1976)

Cox, R.N., Crabtree, L.F.: Elements of Hypersonic Aerodynamics. Academic, New York (1965)

Crocco, G.A.: Sui Corpi aerotermodinamici portanti. Rendiconti della Academia Nazionale dei Lincei, Classe di Sienze Fisiche, Matematiche e Naturali **14**, 161–166, Roma (1931)

Crocco, G.A.: Flying in the Stratosphere. Aircraft Engineering **4**, 171–175, 204–209 (1932)

Dayes, W.D., Probstein, R.F.: Hypersonic Flow Theory. Academic, New York (1966)

Glauert, H.: The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory. Cambridge University Press, Cambridge (1926)

Glauert, H.: The Effect of Compressibility on the Lift of an Aerofoil. Proc. R. Soc. Lond. **118 A**, 113–119 (1928)

Hugoniot, H.: Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gases parfaits. Journal de l'Ecole Polytechnique Paris **57**, 1–97 (1887)

Joslin, R.D.: Aircraft Laminar Flow Control. Ann. Rev. Fluid Mech. **30**, 1–29 (1998)

Joukowski, N.: Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschifffahrt **1**, 281–284 (1910)

Küchemann, D.: The Aerodynamic Design of Aircraft. Pergamon Press, Oxford (1987)

Kutta, M.W.: Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten. Illustrierte Aeronautische Mitteilun-gen **6**, 133–135 (1902)

Kutta, M.W.: Ebene Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen. Mathematisch-Physikalische Klasse, 65–125, Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften, München (1911)

Laurien, E.: Oertel jr., H.: Numerische Strömungsmechanik. Springer Vieweg Verlag, Wiesbaden (2013)

Liepmann, H.W.: The interaction between boundary layer and shock waves in transonic flow. J. Aeronaut. Sci. **13**, 623–637 (1946)

Liepmann, H.W., Roshko, A.: Elements of Gasdynamics. Wiley, New York (1957)

Lighthill, M.J.: The Wave Drag at Zero Lift of Slender Delta Wings and simular Configurations. JFM **1**, 337 (1956)

Lighthill, M.J.: On the Weis-Fogh Mechanism of Lift Generation. JFM **60**, 1–17 (1973)

Lilienthal, O.: Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Gaertner, Berlin (1889)

Oswatitsch, K.: Grundlagen der Gasdynamik. Springer, Wien/New York (1976)

Oswatitsch, K.: Spezialgebiete der Gasdynamik. Springer, Wien/New York (1977)

Rankine, W.J.M.: On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbances. Philos. Trans. R. Soc. Lond. **160**, 277–286 (1870)

Riemann, B.: Die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 8, 43–65. Weidmann, Berlin (1858)
Robinson, R., Laurmann, J.A.: Wing Theory. Cambridge University Press (1956)
Schlichting, H., Truckenbrodt, E.: Aerodynamik des Flugzeuges. Springer, Berlin/Heidelberg (2001)
Schlichting, H., Truckenbrodt, E.: Aerodynamics of the Airplane. Mc Graw-Hill, New York (1979)
Shapiro, A.H.: Shape and Flow. Anchor Books (1961)
Tani, I., Mituisi, S.: Contributions to the Design of Aerofoils Suitable for High Speeds. Report 198, Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University (1940)
von Helmholtz, H.: Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Journal für die reine und angewandte Mathematik **55**, 25–55 (1858)
von Kármán, T.: Compressibility effects in aerodynamics. Journal oft he Aeronautical Sciences **8**, 337–356 (1941)
von Kármán, T.: Aerodynamik. Interavia, Genf (1956)
von Mises, R.: Theory of Flight. Dover Publications, New York (1959)
Williams, J.: Aircraft Performance-Predicction Methods and Optimization. Report LS 56 AGARD (1972)

Grundgleichungen der Strömungsmechanik

6

Herbert Oertel Jr.

Zusammenfassung

Das Kapitel Grundgleichungen der Strömungsmechanik ist Teil des Lehrbuches und Nachschlagewerkes H. Oertel jr. (Hrsg.) Prandtl-Führer durch die Strömungslehre und bildet die mathematische Grundlage für die folgenden Kapitel der einzelnen Teilgebiete der Strömungsmechanik. Es werden die kontinuumsmechanischen Erhaltungsgleichungen der Masse-, Impuls- und Energieerhaltung am Volumenelement abgeleitet und die Erhaltungsform der Grundgleichungen für reibungsfreie und reibungsbehaftete, inkompressible und kompressible, laminare und turbulente Strömungen sowie für Strömungen mit konvektiver Wärme- und Stoffübertragung, mehreren Phasen, chemischen Reaktionen und Mikroströmungen formuliert.

1 Kontinuitätsgleichung

Die *Masseerhaltung am Volumenelement* $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ für inkompressible Strömungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,,$$

mit den Geschwindigkeitskomponenten u, v, w des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}$ wurde bereits in Abschn. 1 des Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit

Baden-Baden, Deutschland
E-Mail: herbert.oertel@t-online.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5_6

benutzt. In diesem Kapitel wird die Ableitung der Kontinuitätsgleichung am Volumenelement $\mathrm{d}V$ für instationäre und kompressible Strömungen ergänzt.

Ganz allgemein lässt sich die Masseerhaltung am Volumenelement formulieren:

Die zeitliche Änderung der Masse im Volumenelement =

$\sum$ *der einströmenden Massenströme in das Volumenelement* $-$

$\sum$ *der ausströmenden Massenströme aus dem Volumenelement.*

In Abb. 6.1 ist das Volumenelement $\mathrm{d}V$ dargestellt. Seine Kanten besitzen die Längen $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}z$. Durch die linke Oberfläche des Volumenelements mit der Fläche $\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ tritt der Massenstrom $\rho \cdot u \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ ein. Die Größe $\rho \cdot u$ ändert ihren Wert von der Stelle x zur Stelle $x + \mathrm{d}x$ in x-Richtung um $\partial(\rho \cdot u)/\partial x \cdot \mathrm{d}x$, so dass sich der durch die rechte Oberfläche $\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ des Volumenelements austretende Massenstrom mit dem Ausdruck

$$\left(\rho \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x\right) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$

angeben lässt. Für die y- und z-Richtung gelten die analogen Größen auf den entsprechenden Oberflächen $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z$ und $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$.

Die zeitliche Änderung der Masse innerhalb des betrachteten Volumenelements entspricht nach der Erhaltung der Masse der Differenz aus eintretenden und austretenden Massenströmen. Der Term

$$\frac{\partial(\rho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$

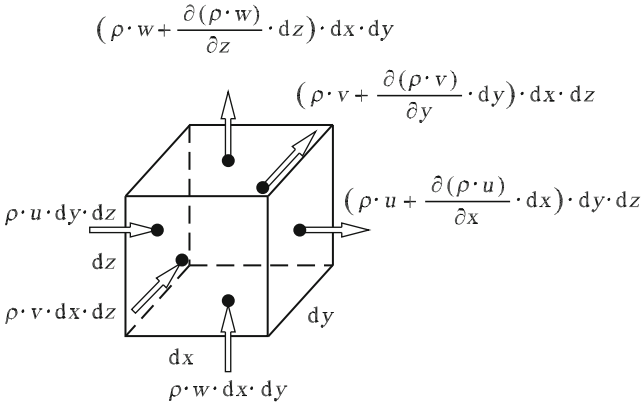


Abb. 6.1 Ein- und ausströmende Massenströme am Volumenelement $\mathrm{d}V$

entspricht dem mathematischen Ausdruck für die zeitliche Änderung der Masse im Volumenelement. Gemäß der vorigen Überlegungen gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = &\left(\rho \cdot u - (\rho \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x)\right) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \\ &+ \left(\rho \cdot v - (\rho \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y)\right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z \\ &+ \left(\rho \cdot w - (\rho \cdot w + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \cdot \mathrm{d}z)\right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \,.\end{aligned}$$

Damit erhält man die *Kontinuitätsgleichung* für kompressible Strömungen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \,. \tag{6.1}$$

Für eine *inkompressible Strömung* vereinfacht sie sich zu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \,. \tag{6.2}$$

In koordinatenfreier Vektorschreibweise lauten die hergeleiteten Gleichungen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \quad bzw. \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \,, \tag{6.3}$$

mit dem Operator $\nabla\cdot$ der Divergenz des jeweiligen Vektors. Der Nabla-Operator ∇ enthält die folgenden Komponenten:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T \,.$$

2 Navier-Stokes-Gleichungen

2.1 Laminare Strömungen

Die Navier-Stokes-Gleichung ergibt sich aus der *Impulserhaltung* am Volumenelement $\mathrm{d}V$. Sie wurde in Abschn. 1 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten für die reibungsbehaftete inkompressible Strömung abgeleitet. Im Folgenden wird die Ableitung am Volumenelement $\mathrm{d}V$ für die kompressible Strömung behandelt. Für das Volumenelement der Abb. 6.1 betrachtet man in analoger Weise zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung die zeitliche Änderung des Impulses innerhalb des Volumenelements. Der Impuls entspricht dem Produkt aus Masse und Geschwindigkeit. Das Fluid innerhalb des Volumens besitzt also den Impuls $\rho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot \boldsymbol{v}$, dessen

zeitliche Änderung sich mit dem Ausdruck

$$\frac{\partial(\rho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot \boldsymbol{v})}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \cdot \boldsymbol{v})}{\partial t} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \tag{6.4}$$

beschreiben lässt. Ganz allgemein gilt:

Die zeitliche Änderung des Impulses im Volumenelement =

$\sum$ *der eintretenden Impulsströme in das Volumenelement* −

$\sum$ *der austretenden Impulsströme aus dem Volumenelement* +

$\sum$ *der auf das Volumenelement wirkenden Scher- und Normalspannungen* +

$\sum$ *der auf die Masse des Volumenelements wirkenden Kräfte.*

Es soll zunächst nur eine Komponente des Impulsvektors $\rho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot \boldsymbol{v}$ betrachtet werden und zwar die Komponente, die in x-Richtung zeigt. Ihre zeitliche Änderung lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot u)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z\,. \tag{6.5}$$

Ähnlich wie bei der Betrachtung der Massenströme tritt pro Zeiteinheit durch die Oberflächen des Volumenelements ein Impuls in das Volumen ein bzw. aus. Bei der Herleitung der Kontinuitätsgleichung wurde die Größe ρ (Masse pro Volumen) verwendet. Nun wird die Größe $(\rho \cdot u)$ (Impuls pro Volumen) betrachtet. Analog zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung werden die ein- und ausströmenden Impulsströme angegeben.

Es wird wieder das Volumenelement, das zusammen mit den Impulsströmen in Abb. 6.2 dargestellt ist, betrachtet. Weiterhin beschränkt man sich zunächst auf die x-Richtung der zeitlichen Änderung des Impulses $\rho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot \boldsymbol{v}$.

Durch die linke Oberfläche $\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ des Volumenelements tritt der Impulsstrom

$$(\rho \cdot u) \cdot u \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = \rho \cdot u \cdot u \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \tag{6.6}$$

ein. Die Größe $\rho \cdot u \cdot u$ ändert ihren Wert in x-Richtung um

$$\frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x\,, \tag{6.7}$$

so dass sich der auf der rechten Oberfläche $\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ des Volumenelements austretende Impulsstrom mit dem Ausdruck

$$(\rho \cdot u \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \tag{6.8}$$

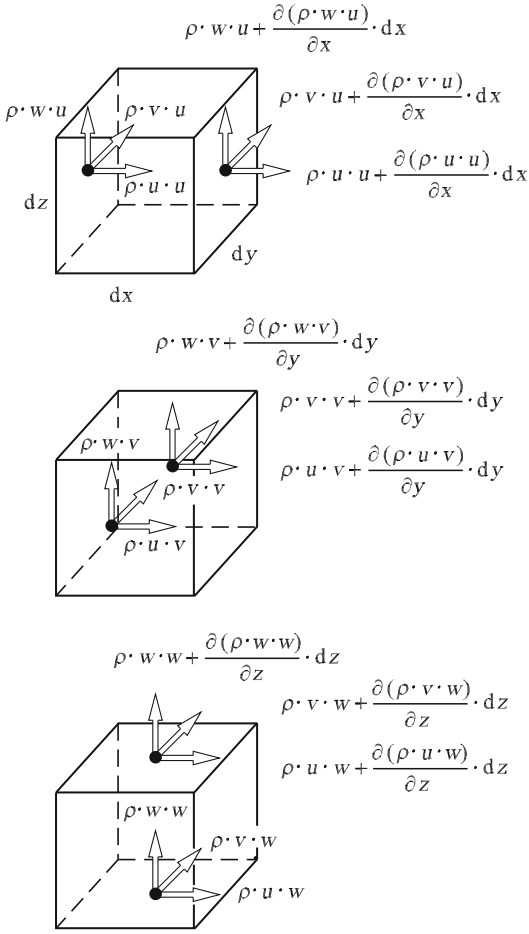


Abb. 6.2 Ein- und ausströmende Impulsströme am Volumenelement dV

bezeichnen lässt.

Es tritt der in x-Richtung wirkende Impuls $\rho \cdot u$ auch über die verbleibenden Oberflächen $dx \cdot dz$ und $dx \cdot dy$ ein bzw. aus, allerdings strömt er jeweils mit der Geschwindigkeitskomponente v bzw. w durch die entsprechenden Oberflächen.

Für die y- und z-Richtungen gelten die analogen Überlegungen, so dass sich insgesamt auf jeder Oberfläche drei Impulsströme angeben lassen (Abb. 6.2).

Nun sind die ein- und ausströmenden Impulsströme nicht die alleinige Ursache für die zeitliche Änderung des Impulses innerhalb des Volumenelements. Der Impuls innerhalb des Volumens wird zusätzlich durch die am Volumen angreifenden Kräfte geändert. Zu diesen Kräften gehören die Normal- und Schubspannungen. Sie sind in Abb. 6.3 dargestellt. Ihre Größen ändern sich in x-, y- und z-Richtung, so dass an den Stellen $x + dx$, $y + dy$ und $z + dz$ jeweils ihre Größen und die entsprechenden Änderungen eingezeichnet sind.

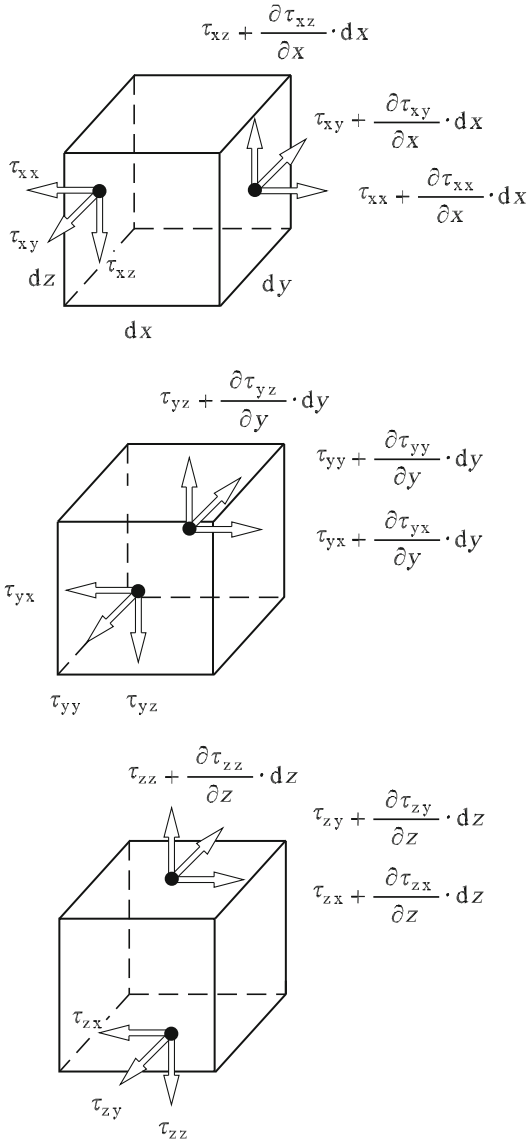


Abb. 6.3 Normal- und Schubspannungen am Volumenelement dV

Bezüglich der Bezeichnung und des Vorzeichens der Normal- und Schubspannungen gilt entsprechend Abschn. 1 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, dass der erste Index angibt, auf welcher Oberfläche die Spannung wirkt. Zeigt die Normale der Oberfläche auf der die betrachtete Spannung wirkt z. B. in x-Richtung, so wird dies mit einem x als erstem Index gekennzeichnet. Der zweite Index gibt

dann an in welche Koordinatenrichtung die aus der Spannung resultierende Kraft wirkt (Abb. 6.3).

Eine Kraft zeigt zur Herleitung der Gleichungen in positive Koordinatenrichtung, wenn die Normale der Oberfläche in positive Koordinatenrichtung zeigt. Sie zeigt in negative Richtung, wenn die Normale in negative Koordinatenrichtung weist.

Die Volumenkräfte wirken auf die Masse des Volumenelements. Zu ihnen gehören die Schwerkraft sowie elektrische und magnetische Kräfte, die auf eine Strömung wirken. Man bezeichnet sie als volumenbezogene Kraft mit $\boldsymbol{f} = (f_x, f_y, f_z)^T$.

Entsprechend dem Leitsatz zu Beginn des Kapitels gilt für die zeitliche Änderung des Impulses $\rho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot u$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = {} & \left(\rho \cdot u \cdot u - (\rho \cdot u \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x)\right) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z + \\
& \left(\rho \cdot u \cdot v - (\rho \cdot u \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y)\right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z + \\
& \left(\rho \cdot u \cdot w - (\rho \cdot u \cdot w + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} \cdot \mathrm{d}z)\right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + \\
& f_x \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z + \\
& \left(-\tau_{xx} + (\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x)\right) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z + \\
& \left(-\tau_{yx} + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y)\right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z + \\
& \left(-\tau_{zx} + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot \mathrm{d}z)\right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \,.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} = {} & \\
f_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \,. & \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

Für die y- und z-Richtung erhält man die entsprechenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot w)}{\partial z} &= f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \,, \\
\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot w)}{\partial z} &= f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \,.
\end{aligned}$$

Der Druck p schreibt sich als negative Spur des Spannungstensors:

$$p = -\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3} . \tag{6.11}$$

Das Minuszeichen berücksichtigt, dass der Druck als negative Normalspannung wirkt.

Die drei Normalspannungen τ_{xx}, τ_{yy} und τ_{zz} werden jeweils in zwei Anteile aufgespalten, dem Druck p und den Reibungsanteilen des Fluids σ_{xx}, σ_{yy} bzw. σ_{zz}.

$$\tau_{xx} = \sigma_{xx} - p , \qquad \tau_{yy} = \sigma_{yy} - p , \qquad \tau_{zz} = \sigma_{zz} - p . \tag{6.12}$$

Setzt man τ_{xx}, τ_{yy} und τ_{zz} gemäß der Gl. (6.12) in (6.10) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} \\ &\qquad = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} , \end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot w)}{\partial z} \\ &\qquad = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} , \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w^2)}{\partial z} \\ &\qquad = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} . \end{aligned} \tag{6.15}$$

Für Newtonsche Fluide gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) , \\ \sigma_{yy} &= 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) , \\ \sigma_{zz} &= 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) , \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} &= \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) , \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) , \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) , \end{aligned} \tag{6.16}$$

mit der Symmetriebedingung

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}\,, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}\,, \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}\,. \tag{6.17}$$

Setzt man die Normal- und Schubspannungen gemäß der Gl. (6.16) in die Impulserhaltungsgleichungen (6.13), (6.14) und (6.15) ein, erhält man die *Navier-Stokes-Gleichungen*:

$$\frac{\partial(\rho\cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\cdot u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\cdot u\cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\cdot u\cdot w)}{\partial z} = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right],$$

$$\frac{\partial(\rho\cdot v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\cdot v\cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\cdot v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\cdot v\cdot w)}{\partial z} = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right],$$

$$\frac{\partial(\rho\cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\cdot w\cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\cdot w\cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\cdot w^2)}{\partial z} = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right)\right].$$

Für *inkompressible Strömungen* erhält man mit der Kontinuitätsgleichung (6.2) $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ die Navier-Stokes-Gleichungen in konservativer Schreibweise:

$$\begin{aligned}
\rho\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u\cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(v\cdot u)}{\partial y} + \frac{\partial(w\cdot u)}{\partial z}\right) &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \\
\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right], \\
\rho\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(u\cdot v)}{\partial x} + \frac{\partial(v\cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(w\cdot v)}{\partial z}\right) &= f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \\
\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right], \\
\rho\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(u\cdot w)}{\partial x} + \frac{\partial(v\cdot w)}{\partial y} + \frac{\partial(w\cdot w)}{\partial z}\right) &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \\
\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right].
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Diese lassen sich wiederum mit der Kontinuitätsgleichung (6.2) in die nicht konservative Form umschreiben, wobei konstante Zähigkeit vorausgesetzt wird:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$
$$\rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$
$$\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \tag{6.19}$$

Diese kann man in koordinatenfreier Schreibweise zusammenfassen:

$$\boxed{\rho \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \right) = \boldsymbol{f} - \nabla p + \mu \cdot \Delta \boldsymbol{v}}, \tag{6.20}$$

mit ∇p für den Gradienten von p und $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)$ für das Skalarprodukt aus Geschwindigkeitsvektor und Nabla-Operator. Dies ergibt einen Konvektionsoperator, der auf jede Komponente des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}$ angewandt wird. $\Delta \boldsymbol{v}$ steht für den auf $\boldsymbol{v}$ angewandten Laplace-Operator.

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)^T, \qquad \boldsymbol{v} \cdot \nabla = u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial}{\partial z},$$
$$\Delta \boldsymbol{v} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2}. \tag{6.21}$$

Die Gl. (6.19) bilden zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (6.2) ein Gleichungssystem von *vier partiellen nichtlinearen Differentialgleichungen von zweiter Ordnung* für die *vier Unbekannten u, v, w und p*. Dieses muss für vorgegebene Anfangs- und Randbedingungen gelöst werden.

Betrachtet man hingegen eine kompressible Strömung, so muss als zusätzliche Unbekannte noch die Dichte ρ berücksichtigt werden. Dazu wird eine weitere Gleichung, die *Energiegleichung*, benötigt. Diese wird für laminare Strömungen in Abschn. 3.1 behandelt.

2.2 Reynolds-Gleichungen für turbulente Strömungen

Für turbulente Strömungen gilt der in Abschn. 4 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten eingeführte Reynolds-Ansatz (Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Gl. (22)). Um diesen auch für turbulente kompressible Strömungen anwenden zu können, führt man massengemittelte Größen ein:

$$\tilde{u} = \frac{\overline{\rho \cdot u}}{\bar{\rho}}, \qquad \tilde{v} = \frac{\overline{\rho \cdot v}}{\bar{\rho}}, \qquad \tilde{w} = \frac{\overline{\rho \cdot w}}{\bar{\rho}}. \tag{6.22}$$

Das Überstreichen der Produkte bedeutet gemäß (Kap. 4 ▸ Dynamik der Gase, Gl. (6.63)) die zeitliche Mittelung:

$$\overline{\rho \cdot u} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (\rho \cdot u) \cdot \mathrm{d}t \,, \tag{6.23}$$

die man auch *Favre-Mittelung* nennt.

Die Geschwindigkeitskomponenten u, v usw. lassen sich nun aus den zeitlichen Mittelwerten gemäß den Gl. (6.22) und einer Schwankungsgröße, die nachfolgend mit zwei Strichen gekennzeichnet wird, zusammensetzen. Dabei müssen der Druck p und die Dichte ρ nicht massengemittelt werden. Ihre Schwankungsgrößen werden mit nur einem Strich gekennzeichnet. Damit ergibt sich der *Reynolds-Ansatz* für kompressible Strömungen:

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho' \,, & p &= \bar{p} + p' \,, \\ u &= \tilde{u} + u'' \,, & v &= \tilde{v} + v'' \,, & w &= \tilde{w} + w'' \,. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Es ist wichtig zu vermerken, dass die zeitlich gemittelten Größen $\overline{f''}$ (f'' steht für eine beliebige Schwankungsgröße u'', v'', usw.) ungleich Null sind. Hingegen ist die Größe $\overline{\rho \cdot f''}$ gleich Null.

Es gelten die folgenden Rechenregeln für zwei beliebige Größen f und g:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} \,, \qquad \overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \,, \qquad \overline{\rho' \cdot \tilde{u}} = 0 \,, \qquad \overline{\rho \cdot u''} = 0 \,. \tag{6.25}$$

Die zeitliche Mittelung schreibt sich für die Kontinuitätsgleichung (6.1):

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho \cdot w)}{\partial z} \right) \cdot \mathrm{d}t = 0$$

oder

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho \cdot w)}{\partial z}} = 0 \,. \tag{6.26}$$

Setzt man in die Gl. (6.26) die Größen u, v und w gemäß der Gl. (6.24) ein, ergibt sich mit den Rechenregeln (6.25) und mit $\overline{\rho \cdot f''} = 0$:

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial [\rho \cdot (\tilde{u} + u'')]}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial [\rho \cdot (\tilde{v} + v'')]}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial [\rho \cdot (\tilde{w} + w'')]}{\partial z}} = 0 \,,$$

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{[\rho\cdot(\tilde{u}+u'')]}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{[\rho\cdot(\tilde{v}+v'')]}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{[\rho\cdot(\tilde{w}+w'')]}}{\partial z}=0\,,$$

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{[\rho\cdot(\tilde{u}_{\mathrm{i}}+u_{\mathrm{i}}'')]}}{\partial x_{\mathrm{i}}}=0\,.$$

Der zweite Summand beinhaltet die abkürzende Schreibweise für die drei Koordinaten- und Geschwindigkeitsrichtungen ($i=1,\ldots,3$). Es gilt:

$$\frac{\partial\overline{[\rho\cdot(\tilde{u}_{\mathrm{i}}+u_{\mathrm{i}}'')]}}{\partial x_{\mathrm{i}}}=\frac{\partial(\overline{\rho\cdot\tilde{u}_{\mathrm{i}}})}{\partial x_{\mathrm{i}}}+\frac{\partial(\overline{\rho\cdot u_{\mathrm{i}}''})}{\partial x_{\mathrm{i}}}=\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{u}_{\mathrm{i}})}{\partial x_{\mathrm{i}}}\,.$$

Die zeitlich gemittelte Kontinuitätsgleichung lautet also für kompressible Strömungen:

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{w})}{\partial z}=0\,. \tag{6.27}$$

Sie enthält jetzt nicht mehr die Größen ρ und u_{i}, sondern $\bar{\rho}$ und $\tilde{u}_{\mathrm{i}}$.

Für die inkompressible Strömung lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}=0\,. \tag{6.28}$$

Es folgt die zeitliche Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen, die in analoger Weise wie die Mittelung der Kontinuitätsgleichung durchgeführt wird. Es wird zunächst die Gleichung für die x-Richtung betrachtet. Aus Gl. (6.13) ergibt sich:

$$\overline{\frac{\partial(\rho\cdot u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\cdot u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\cdot u\cdot v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\cdot u\cdot w)}{\partial z}}=\overline{f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}}\,,$$

mit Gl. (6.16)

$$\sigma_{xx}=\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right)\,,\qquad\tau_{\mathrm{ij}}=\mu\cdot\left(\frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}}+\frac{\partial u_{\mathrm{j}}}{\partial x_{\mathrm{i}}}\right)\,.$$

Mit den eingeführten Rechenregeln Gl. (6.25) erhält man:

$$\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u)}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u^2)}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u\cdot v)}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u\cdot w)}}{\partial z}=$$

$$f_x-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\sigma}_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\tau}_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{\tau}_{zx}}{\partial z}\,. \tag{6.29}$$

Gemäß der Definition von $\tilde{u}$ ist $\overline{\rho \cdot u} = \bar{\rho} \cdot \tilde{u}$ und in Gl. (6.29) sind alle Summanden der linken und rechten Seite gemittelt bekannt außer drei Summanden der linken Seite, die die räumlichen partiellen Ableitungen enthalten. Diese werden nachfolgend weiter betrachtet, indem für u, v und w der Reynolds-Ansatz (6.24) eingesetzt wird. Man erhält:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\overline{[\rho\cdot(\tilde{u}+u'')^2]}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{[\rho\cdot(\tilde{u}+u'')\cdot(\tilde{v}+v'')]}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{[\rho\cdot(\tilde{u}+u'')\cdot(\tilde{w}+w'')]}}{\partial z}= \\
&\qquad\frac{\partial\overline{(\rho\cdot\tilde{u}^2)}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''^2)}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(2\cdot\rho\cdot\tilde{u}\cdot u'')}}{\partial x}+ \\
&\qquad\frac{\partial\overline{(\rho\cdot\tilde{u}\cdot\tilde{v})}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot\tilde{u}\cdot v'')}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot\tilde{v})}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot v'')}}{\partial y}+ \\
&\qquad\frac{\partial\overline{(\rho\cdot\tilde{u}\cdot\tilde{w})}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot\tilde{u}\cdot w'')}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot\tilde{w})}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot w'')}}{\partial z}= \\
&\qquad\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{u}^2)}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''^2)}}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{u}\cdot\tilde{v})}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot v'')}}{\partial y}+ \\
&\qquad\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{u}\cdot\tilde{w})}{\partial z}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot w'')}}{\partial z}\,.
\end{aligned}$$

Setzt man das Ergebnis in die Gl. (6.29) ein, erhält man die *Reynolds-Gleichung* für die x-Richtung

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{u})}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{u}^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{u}\cdot\tilde{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{u}\cdot\tilde{w})}{\partial z}=f_x-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} \\
&+\frac{\partial\bar{\sigma}_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\tau}_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{\tau}_{zx}}{\partial z}-\left(\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''^2)}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot v'')}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot w'')}}{\partial z}\right). \qquad (6.30)
\end{aligned}$$

Für die zeitlich gemittelten Normal- und Schubspannungen σ_{xx}, τ_{yx} und τ_{zx} erhält man mit einer einfachen zusätzlichen Rechnung die ergänzenden Gleichungen:

$$\bar{\sigma}_{xx}=\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}-\frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{v}})\right)+\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial u''}{\partial x}-\frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v}'')\right), \qquad (6.31)$$

$$\bar{\tau}_{ij}=\mu\cdot\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right)+\mu\cdot\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right). \qquad (6.32)$$

Die Ausdrücke $\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}$ und $\nabla\cdot\boldsymbol{v}''$ stehen für die Divergenzen

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}+\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}\,, \qquad \frac{\partial u''}{\partial x}+\frac{\partial v''}{\partial y}+\frac{\partial w''}{\partial z}\,.$$

Die Gl. (6.30) enthält im Vergleich zu der Navier-Stokes-Gleichung für laminare Strömungen (6.18) auf der rechten Seite zusätzliche Glieder, mit denen die Schwankungsbewegungen der Strömung berücksichtigt werden. Die zusätzlichen Terme in (6.30) müssen geeignet modelliert werden, da keine geschlossene Theorie der Turbulenzmodellierung bekannt ist.

Für die y- und z-Richtung gilt Entsprechendes, so dass sich die *Reynolds-Gleichungen* für turbulente kompressible Strömungen wie folgt angeben lassen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{u})}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{u}^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{u}\cdot\tilde{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{u}\cdot\tilde{w})}{\partial z}=f_x-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\\
&\quad+\frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z}-\left(\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''^2)}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot v'')}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot u''\cdot w'')}}{\partial z}\right), \qquad (6.33)\\
&\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{v})}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{v}\cdot\tilde{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{v}^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{v}\cdot\tilde{w})}{\partial z}=f_y-\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}\\
&\quad+\frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\sigma}_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial z}-\left(\frac{\partial\overline{(\rho\cdot v''\cdot u'')}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot v''^2)}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot v''\cdot w'')}}{\partial z}\right), \qquad (6.34)\\
&\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{w})}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{w}\cdot\tilde{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{w}\cdot\tilde{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{\rho}\cdot\tilde{w}^2)}{\partial z}=f_z-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}\\
&\quad+\frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}}{\partial z}-\left(\frac{\partial\overline{(\rho\cdot w''\cdot u'')}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot w''\cdot v'')}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\rho\cdot w''^2)}}{\partial z}\right), \qquad (6.35)
\end{aligned}$$

mit

$$\bar{\sigma}_{\mathrm{ii}}=\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial \tilde{u}_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{i}}}-\frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{v}})\right)+\mu\cdot\left(2\cdot\frac{\partial\overline{u_{\mathrm{i}}''}}{\partial x_{\mathrm{i}}}-\frac{2}{3}\cdot(\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{v}''})\right), \qquad (6.36)$$

$$\bar{\tau}_{\mathrm{ij}}=\mu\cdot\left(\frac{\partial \tilde{u}_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}}+\frac{\partial \tilde{u}_{\mathrm{j}}}{\partial x_{\mathrm{i}}}\right)+\mu\cdot\left(\frac{\partial\overline{u_{\mathrm{i}}''}}{\partial x_{\mathrm{j}}}+\frac{\partial\overline{u_{\mathrm{j}}''}}{\partial x_{\mathrm{i}}}\right). \qquad (6.37)$$

Für *inkompressible Strömungen* vereinfachen sich die Gl. (6.22) und (6.24):

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}=\bar{u} \quad , \quad \tilde{v}=\bar{v} \quad , \quad \tilde{w}=\bar{w}\,,\\
&u=\bar{u}+u' \quad , \quad v=\bar{v}+v' \quad , \quad w=\bar{w}+w'\,, \qquad p=\bar{p}+p'\,. \qquad (6.38)
\end{aligned}$$

Die *Kontinuitätsgleichung* lautet:

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z}=0\,. \tag{6.39}$$

Für die zeitlich gemittelten *Navier-Stokes-Gleichungen* inkompressibler Strömungen ergibt sich:

$$\begin{aligned}\rho\cdot\left(\frac{\partial(\bar{u})}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}\cdot\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{u}\cdot\bar{w})}{\partial z}\right)&=f_x-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}\\ +\frac{\partial\bar{\sigma}_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\tau}_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{\tau}_{zx}}{\partial z}-\rho\cdot\left(\frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{u'\cdot v'})}{\partial y}+\frac{\partial(\overline{u'\cdot w'})}{\partial z}\right)&,\end{aligned} \tag{6.40}$$

$$\begin{aligned}\rho\cdot\left(\frac{\partial(\bar{v})}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{v}\cdot\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{v}^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{v}\cdot\bar{w})}{\partial z}\right)&=f_y-\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}\\ +\frac{\partial\bar{\tau}_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\sigma}_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{\tau}_{zy}}{\partial z}-\rho\cdot\left(\frac{\partial(\rho\cdot\overline{v'\cdot u'})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\cdot\overline{v'^2})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\cdot\overline{v'\cdot w'})}{\partial z}\right)&,\end{aligned} \tag{6.41}$$

$$\begin{aligned}\rho\cdot\left(\frac{\partial(\bar{w})}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{w}\cdot\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{w}\cdot\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{w}^2)}{\partial z}\right)&=f_z-\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\\ +\frac{\partial\bar{\tau}_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\tau}_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{\sigma}_{zz}}{\partial z}-\rho\cdot\left(\frac{\partial(\overline{w'\cdot u'})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{w'\cdot v'})}{\partial y}+\frac{\partial(\overline{w'^2})}{\partial z}\right)&.\end{aligned} \tag{6.42}$$

3 Energiegleichung

3.1 Laminare Strömungen

Die für die stationäre reibungsfreie Flüssigkeit wurde bereits in Abschn. 3 des Kap. 4 ▸ Dynamik der Gase benutzt. Für die dreidimensionale Energiebilanz am Volumenelement $\mathrm{d}V$ der Abb. 6.4 gilt der Leitsatz:

Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie im Volumenelement =

$\sum$ der durch die Strömung ein- und ausfließenden Energieströme +

$\sum$ der durch Wärmeleitung ein- und ausfließenden Energieströme +

$\sum$ der durch die Druck-, Normalspannungs- und Schubspannungskräfte am Volumenelement geleisteten Arbeiten pro Zeit + der Energiezufuhr von außen +

Arbeit pro Zeit, die durch das Wirken der Volumenkräfte verursacht wird.

Die im Volumenelement befindliche Gesamtenergie E setzt sich aus der inneren Energie $\rho\cdot e\cdot\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z$ und der kinetischen Energie $\rho\cdot(V^2/2)\cdot\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z=(1/2)\cdot\rho\cdot(u^2+v^2+w^2)\cdot\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z$ zusammen ($\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=V^2$). Die zeitliche Änderung der Energie im Volumenelement schreibt sich:

$$\frac{\partial[\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z]}{\partial t} = \frac{\partial[\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right)]}{\partial t} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z\,. \qquad (6.43)$$

Die Energie im Volumenelement wird durch die mit der Strömung in das Volumenelement hinein- und heraustransportierte innere Energie pro Zeit verändert. Dieser Anteil wird mit $\mathrm{d}\dot{E}$ bezeichnet. In Abb. 6.4 sind die ein- und ausfließenden Energieströme dargestellt. Mit einer analogen Betrachtung wie bei der Herleitung der Navier-Stokes-Gleichung erhält man für den Term $\mathrm{d}\dot{E}$:

$$\mathrm{d}\dot{E} = \left[\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot u - \left(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot u)}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x\right)\right] \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z +$$

$$\left[\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot v - \left(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot v)}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y\right)\right] \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z +$$

$$\left[\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot w - \left(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot w + \frac{\partial\left(\rho \cdot (e + \frac{V^2}{2}) \cdot w\right)}{\partial z} \cdot \mathrm{d}z\right)\right] \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y\,,$$

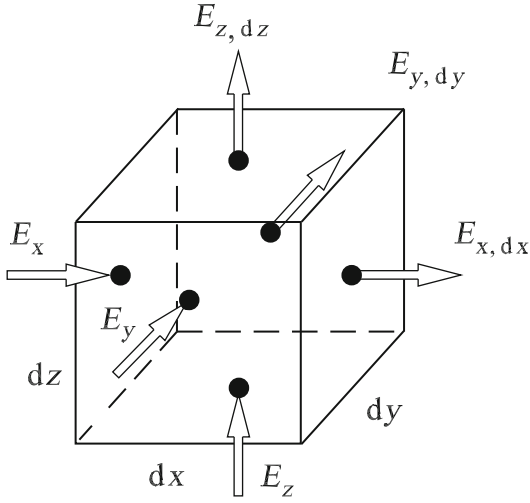


Abb. 6.4 Konvektive Energieströme am Volumenelement $\mathrm{d}V$

$$\mathrm{d}\dot{E} = -\left(\frac{\partial(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot w)}{\partial z} \right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z\,. \tag{6.44}$$

Die Energie im Volumenelement verändert sich durch den Transport von Energie, die pro Zeiteinheit durch Wärmeleitung in das Volumen ein- bzw. austritt. Dieser Anteil der Änderung wird nachfolgend mit $\mathrm{d}\dot{Q}$ bezeichnet. Gemäß des Fourierschen Wärmeleitungsgesetzes fließt die Wärmeenergie in Richtung abnehmender Temperaturen. Z. B. gilt für ein eindimensionales Wärmeleitungsproblem die Gleichung $\dot{q} = -\lambda \cdot (\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)$. $\dot{q}$ steht für den Wärmefluss pro Fläche und λ für die Wärmeleitfähigkeit, die im Allgemeinen von dem jeweiligen Fluid, dem Druck und der Temperatur abhängig ist. Wendet man das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz zur Berechnung des Anteils $\mathrm{d}\dot{Q}$ an, so erhält man für den gesamten Energiefluss durch Wärmeleitung in bzw. aus dem Volumenelement:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\dot{Q} = &\left(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - \left[-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) \cdot \mathrm{d}x\right]\right) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z + \\ &\left(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} - \left[-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right) \cdot \mathrm{d}y\right]\right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z + \\ &\left(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - \left[-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right) \cdot \mathrm{d}z\right]\right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y\,,\end{aligned} \tag{6.45}$$

$$\mathrm{d}\dot{Q} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right)\right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z\,. \tag{6.46}$$

Nachfolgend werden die Beziehungen für die durch die Druck-, Normalspannungs- und Schubspannungskräfte am Volumenelement geleisteten Arbeiten aufgestellt. Auf jeder Oberfläche des Volumenelements wirken drei Spannungen, die auf die Reibung zurückzuführen sind und der statische Druck. Die durch den Druck und die Spannungen resultierenden Kräfte leisten Arbeit an dem Volumenelement. Die Arbeit pro Zeit, auch als Leistung bezeichnet, ergibt sich jeweils aus dem Produkt der Geschwindigkeit und der Kraft, die in Richtung der jeweiligen Geschwindigkeitskomponente wirkt. Eine Arbeit pro Zeit wird mit einem positiven Vorzeichen berücksichtigt, wenn die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Druck-, Normalspannungs- bzw. Schubspannungskraft zeigt. Trifft dies nicht zu, wird die Arbeit pro Zeit mit einem negativen Vorzeichen versehen.

Zunächst wird die Leistung $\mathrm{d}\dot{A}_x$, die dem Volumenelement über die beiden Oberflächen mit dem Flächeninhalt $\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ zu- bzw. abgeführt wird, dargestellt:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\dot{A}_x = {} & p \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot u - \left(p \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot u + \frac{\partial(p \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot u)}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x \right) - \\ & \sigma_{xx} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot u + \left(\sigma_{xx} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot u + \frac{\partial(\sigma_{xx} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot u)}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x \right) - \\ & \tau_{xy} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot v + \left(\tau_{xy} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot v + \frac{\partial(\tau_{xy} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot v)}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x \right) - \\ & \tau_{xz} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot w + \left(\tau_{xz} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot w + \frac{\partial(\tau_{xz} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot w)}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x \right), \end{aligned} \tag{6.47}$$

$$\mathrm{d}\dot{A}_x = \left(-\frac{\partial(p \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xx} \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} \cdot v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz} \cdot w)}{\partial x} \right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z\,. \tag{6.48}$$

Für die y- und die z-Richtung erhält man entsprechende Ausdrücke für $\mathrm{d}\dot{A}_y$ und $\mathrm{d}\dot{A}_z$

$$\mathrm{d}\dot{A}_y = \left(-\frac{\partial(p \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yx} \cdot u)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{yy} \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz} \cdot w)}{\partial y} \right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z\,, \tag{6.49}$$

$$\mathrm{d}\dot{A}_z = \left(-\frac{\partial(p \cdot w)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zx} \cdot u)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zy} \cdot v)}{\partial z} + \frac{\partial(\sigma_{zz} \cdot w)}{\partial z} \right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z\,. \tag{6.50}$$

$\mathrm{d}\dot{A}$ ergibt sich nun aus der Summe von $\mathrm{d}\dot{A}_x$, $\mathrm{d}\dot{A}_y$ und $\mathrm{d}\dot{A}_z$.

Gemäß des Leitsatzes und den Gl. (6.43), (6.44), (6.46), (6.48), (6.49) und (6.50) sowie $(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ für die Leistung der Volumenkräfte lautet der *Energiesatz*:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho \cdot \left[e + \frac{V^2}{2} \right])}{\partial t} = \\ & \quad - \left(\frac{\partial(\rho \cdot \left[e + \frac{V^2}{2} \right] \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot \left[[e + \frac{V^2}{2} \right] \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot \left[e + \frac{V^2}{2} \right] \cdot w)}{\partial z} \right) + \\ & \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) + \\ & \quad \left(-\frac{\partial(p \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xx} \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} \cdot v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz} \cdot w)}{\partial x} \right) + \\ & \quad \left(-\frac{\partial(p \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yx} \cdot u)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{yy} \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz} \cdot w)}{\partial y} \right) + \end{aligned} \tag{6.51}$$

$$\left(-\frac{\partial(p\cdot w)}{\partial z}+\frac{\partial(\tau_{zx}\cdot u)}{\partial z}+\frac{\partial(\tau_{zy}\cdot v)}{\partial z}+\frac{\partial(\sigma_{zz}\cdot w)}{\partial z}\right)+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+\rho\cdot\dot{q}_s\,.$$

Mit dem Ansatz für die Normal- und Schubspannungen (6.16) und der Kontinuitätsgleichung (6.1) erhält man nach einiger Umrechnung bei Vernachlässigung der Strahlung:

$$\rho\cdot\left(\frac{\partial e}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial e}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial e}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial e}{\partial z}\right)=$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right]\right)-p\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{v})+\mu\cdot\Phi\,, \quad (6.52)$$

mit der Dissipationsfunktion Φ

$$\Phi=2\cdot\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2. \quad (6.53)$$

Sie enthält nur quadratische Glieder und ist deshalb an jeder Stelle im Strömungsfeld größer als Null.

Bei der Herleitung der Energiegleichung wurden bis jetzt noch keine Einschränkungen gemacht. Sie gilt allgemein und beschreibt den Energiehaushalt in einem kleinen Volumenelement auch für Strömungen, in denen z. B. chemische Prozesse ablaufen oder, was gleichbedeutend ist, Verbrennungsprozesse stattfinden. Es wurde vorausgesetzt, dass die Strömung homogen ist und dass das Fluid ein Newtonsches Medium ist. Nachfolgend wird die Energiegleichung für kalorisch ideale Gase aufgestellt.

Für ein kalorisch ideales Gas sind die spezifischen Wärmekapazitäten c_p und c_v keine Funktion der Temperatur und es gelten die folgenden thermodynamischen Beziehungen:

$$e=c_v\cdot T\,,\qquad h=e+\frac{p}{\rho}=c_p\cdot T\,, \quad (6.54)$$

oder

$$e=c_p\cdot T-\frac{p}{\rho}\,. \quad (6.55)$$

Die linke Seite der Gl. (6.55) in Gl. (6.52) für e eingesetzt, ergibt unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung (6.1) die *Energiegleichung* für ein *kalorisch ideales Gas*:

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) + \mu \cdot \Phi \,. \tag{6.56}$$

3.2 Turbulente Strömungen

Für die zeitliche Mittelung der Energiegleichung werden die massengemittelten Strömungsgrößen Gl. (6.22) ergänzt um

$$\tilde{T} = \frac{\overline{\rho \cdot T}}{\overline{\rho}} \,, \qquad \tilde{e} = \frac{\overline{\rho \cdot e}}{\overline{\rho}} \tag{6.57}$$

und der Reynolds-Ansatz Gl. (6.24) um

$$T = \tilde{T} + T'' \,, \qquad e = \tilde{e} + e'' \,. \tag{6.58}$$

Damit erhält man für die Energiegleichung bei Vernachlässigung der Dissipation Φ:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{e}_{\text{tot}})}{\partial t} + \frac{\partial[\tilde{u} \cdot (\bar{\rho} \cdot \tilde{e}_{\text{tot}} + \bar{p})]}{\partial x} + \frac{\partial[\tilde{v} \cdot (\bar{\rho} \cdot \tilde{e}_{\text{tot}} + \bar{p})]}{\partial y} + \frac{\partial[\tilde{w} \cdot (\bar{\rho} \cdot \tilde{e}_{\text{tot}} + \bar{p})]}{\partial z} = \\ &\frac{\partial(\bar{\tau}_{xx} \cdot \tilde{u} + \bar{\tau}_{xy} \cdot \tilde{v} + \bar{\tau}_{xz} \cdot \tilde{w})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{yx} \cdot \tilde{u} + \bar{\tau}_{yy} \cdot \tilde{v} + \bar{\tau}_{yz} \cdot \tilde{w})}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial(\bar{\tau}_{zx} \cdot \tilde{u} + \bar{\tau}_{zy} \cdot \tilde{v} + \bar{\tau}_{zz} \cdot \tilde{w})}{\partial z} - \bar{q}_x - \bar{q}_y - \bar{q}_z \\ &- \sum_{\mathrm{l}=1}^{3} \left[\overline{\tau_{\mathrm{ml}} \cdot u_{\mathrm{l}}''} - \tilde{u}_{\mathrm{m}} \cdot \bar{\rho} \cdot \widetilde{u_{\mathrm{l}}'' \cdot u_{\mathrm{m}}''} - \frac{1}{2} \cdot \bar{\rho} \cdot \widetilde{u_{\mathrm{l}}'' \cdot u_{\mathrm{l}}''} \cdot u_{\mathrm{m}}'' \right] - \overline{p \cdot u_{\mathrm{m}}''} - \overline{\rho \cdot e'' \cdot u_{\mathrm{m}}''} \,. \end{aligned} \tag{6.59}$$

Die volumenspezifische turbulente Gesamtenergie $\tilde{e}_{\text{tot}}$ ist aus der mittleren inneren Energie $\tilde{e}$, der kinetischen Energie der mittleren Strömung und der in den turbulenten Schwankungsbewegungen enthaltenen kinetischen Energie zusammengesetzt:

$$\tilde{e}_{\text{tot}} = \tilde{e} + \frac{1}{2} \cdot (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2) + \frac{1}{2} \cdot (\widetilde{u'' \cdot u''} + \widetilde{v'' \cdot v''} + \widetilde{w'' \cdot w''}) \,. \tag{6.60}$$

Der Reynolds-gemittelte Druck kann aus der Zustandsgleichung des idealen Gases berechnet werden:

$$\bar{p} = R \cdot \overline{\rho \cdot T} = R \cdot \bar{\rho} \cdot \tilde{T} \,,$$

wobei die auf der rechten Seite erscheinende Favre-gemittelte Temperatur direkt aus der ebenfalls Favre-gemittelten inneren Energie bestimmt werden kann:

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{e}}{c_v} .$$

Da der Wärmestrom Reynolds-gemittelt ist, die Temperatur jedoch Favre-gemittelt, ergeben sich aus der Umrechnung Zusatzterme:

$$\begin{aligned} \bar{q}_x &= -\lambda \cdot \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{T''}}{\partial x} \right) , \\ \bar{q}_y &= -\lambda \cdot \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{T''}}{\partial y} \right) , \\ \bar{q}_z &= -\lambda \cdot \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{T''}}{\partial z} \right) . \end{aligned} \tag{6.61}$$

Das gilt entsprechend für die Spannungen:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{\mathrm{ml}} = {} & \mu \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\mathrm{l}}}{\partial x_{\mathrm{m}}} + \frac{\partial \tilde{u}_{\mathrm{m}}}{\partial x_{\mathrm{l}}} \right) - \delta_{\mathrm{ml}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \\ & + \mu \cdot \left(\frac{\partial \overline{u''_{\mathrm{l}}}}{\partial x_{\mathrm{m}}} + \frac{\partial \overline{u''_{\mathrm{m}}}}{\partial x_{\mathrm{l}}} \right) - \delta_{\mathrm{ml}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{u}''} . \end{aligned} \tag{6.62}$$

Die Energiegleichung für eine inkompressible Strömung lautet mit $c = c_v$ und unter Vernachlässigung der Dissipation:

$$\begin{aligned} & \rho \cdot c_v \cdot \left(\frac{\partial(\bar{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{T} \cdot \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{T} \cdot \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{T} \cdot \bar{w})}{\partial z} \right) \\ & \quad = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \rho \cdot c \cdot \overline{T' \cdot u'} \right) \\ & \qquad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho \cdot c \cdot \overline{T' \cdot v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \rho \cdot c \cdot \overline{T' \cdot w'} \right) . \end{aligned} \tag{6.63}$$

Bei der Berechnung *inkompressibler Strömungen* ist die Energiegleichung von der Kontinuitätsgleichung und den Navier-Stokes-Gleichungen entkoppelt, d. h. man kann zuerst die Gl. (6.40) bis (6.42) lösen und benutzt anschließend mit der Kenntnis von $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ und $\bar{p}$ die Energiegleichung zur Bestimmung des Temperaturfeldes.

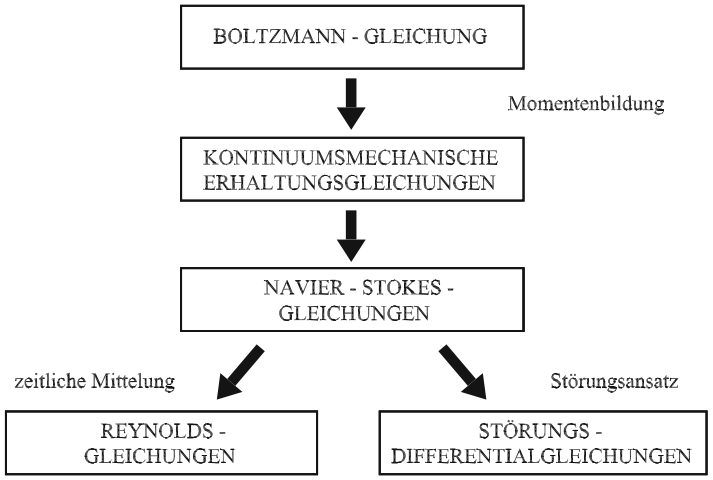


Abb. 6.5 Hierarchie der strömungsmechanischen Grundgleichungen

4 Grundgleichungen in Erhaltungsform

4.1 Hierarchie der Grundgleichungen

Die *kontinuumsmechanischen Erhaltungsgleichungen* für Masse, Impuls und Energie, die in den Abschn. 1, 2 und 3 abgeleitet wurden, ergeben sich in Abb. 6.5 durch Momentenbildung aus der *Boltzmann-Gleichung*, die das strömende Medium als eine Ansammlung von sich bewegenden und miteinander kollidierenden Fluidpartikeln beschreibt. Für Newtonsche Medien ergeben sich die *Navier-Stokes-Gleichungen* für kompressible und inkompressible Fluide. Die zeitliche Mittelung führte zu den *Reynolds-Gleichungen* turbulenter Strömungen. Die Berechnung kleiner Störungen im Strömungsfeld erfolgt über einen Störansatz mit den *Störungsdifferentialgleichungen*.

Die *Boltzmann-Gleichung* ist die Transportgleichung der Verteilungsfunktion f, die die statistische Verteilung der Partikel im Geschwindigkeitsraum $\boldsymbol{c} = c_\mathrm{m}$ und im physikalischen Raum $\boldsymbol{x} = x_\mathrm{m}$ mit $\mathrm{m} = 1, 2, 3$ beschreibt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{c}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\mathrm{koll}} . \tag{6.64}$$

Die linke Seite der Boltzmann-Gleichung stellt die substantielle Ableitung der Verteilungsfunktion f nach der Zeit im sechsdimensionalen Phasenraum dar, wobei der Term $(\boldsymbol{F}/m) \cdot (\partial f / \partial \boldsymbol{c})$ die Änderung der Verteilungsfunktion durch die Beschleunigung der Partikel aufgrund äußerer Kraftfelder $\boldsymbol{F}$ beschreibt. Die rechte Seite repräsentiert die Änderung der Verteilungsfunktion als Folge der Kollisionen der Partikel.

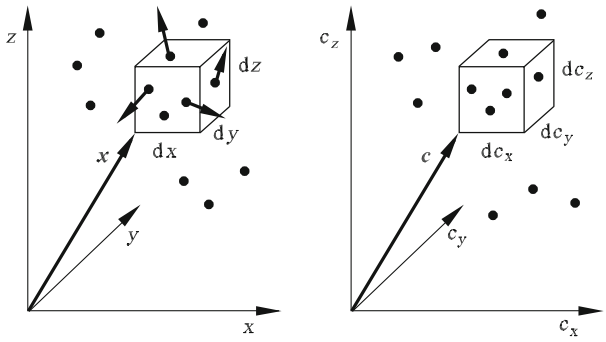


Abb. 6.6 Physikalischer Raum und Geschwindigkeitsraum

Bei der *mikroskopischen Beschreibung* einer Strömung werden die Molekülpositionen im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem, dem physikalischen Raum, festgelegt. Die Geschwindigkeiten der Moleküle, die sich im Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ befinden unterscheiden sich im Allgemeinen durch ihre Größe und Richtung. Zur Kennzeichnung der Geschwindigkeiten wird zusätzlich der Geschwindigkeitsraum eingeführt. Beide Räume sind in Abb. 6.6 dargestellt. Ein Punkt in diesem sechsdimensionalen Raum ist durch die Angabe der kartesischen Koordinaten $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ und den Geschwindigkeiten $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$ festgelegt und repräsentiert ein Molekül.

Ein Fluid mit N Teilchen wird demnach durch N Punkte im sechsdimensionalen Raum repräsentiert. Ein Mol eines Gases besitzt also $6 \cdot 10^{23}$ Bildpunkte. Zur Beschreibung der Teilchendichte im sechsdimensionalen Raum wird die Verteilungsdichtefunktion

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{c}} \tag{6.65}$$

definiert. Sie beschreibt die statistische Verteilung der Partikel auf den physikalischen und den Geschwindigkeitsraum. Dabei ist $\mathrm{d}N$ die Anzahl der Bildpunkte im Volumenelement $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}c_x \cdot \mathrm{d}c_y \cdot \mathrm{d}c_z$. Aus der Integration der Verteilungsfunktion über alle Geschwindigkeiten und Ortskoordinaten ergibt sich als Summe aller Bildpunkte die Gesamtzahl der Teilchen:

$$N = \int_{\boldsymbol{c}} \int_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}, t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{c} \,. \tag{6.66}$$

Aus der Kenntnis der mikroskopischen Struktur der Strömung in der Form der skalaren Verteilungsfunktion $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}, t)$ können alle Fluideigenschaften in Abhängigkeit der Zeit abgeleitet werden. Im Geschwindigkeitsraum kann eine Verteilungsfunktion über die Beziehung

$$\mathrm{d}N = N \cdot f(\boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{c} \tag{6.67}$$

definiert werden.

Makroskopische Größen werden zu einem bestimmten Zeitpunkt als Mittelwerte molekularer Eigenschaften aufgefasst. Die makroskopischen Größen ergeben sich durch Mittelung der molekularen Größen Q gewichtet mit der Verteilungsfunktion $f(\boldsymbol{c})$:

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \frac{1}{N} \cdot \int_N Q \cdot \mathrm{d}N \quad \text{, mit Gl. (6.166)} \\ \bar{Q} &= \frac{1}{N} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} Q \cdot f(\boldsymbol{c}) \cdot N \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{c}\,, \\ \bar{Q} &= \int_{-\infty}^{+\infty} Q \cdot f(\boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{c}\,. \end{aligned} \tag{6.68}$$

Die beschriebene Vorgehensweise wird als Bildung von Momenten der Verteilungsfunktion bezeichnet. Die wichtigsten Momente der Verteilungsfunktion sind die mittlere Strömungsgeschwindigkeit

$$\overline{\boldsymbol{c}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{c} \cdot f(\boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{c}\,, \tag{6.69}$$

der Druck p

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{3} \cdot \boldsymbol{c}^2 \cdot f(\boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{c} \tag{6.70}$$

und die Temperatur T

$$T = \frac{2}{3 \cdot n \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{2} \cdot \boldsymbol{c}^2 \cdot f(\boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{c}\,, \tag{6.71}$$

mit der Teilchendichte n (Anzahl der Teilchen pro Volumen), der Teilchenmasse m und der Boltzmann-Konstanten k. Mit den Gl. (6.69), (6.70) und (6.71) ist die Verknüpfung der mikroskopischen mit der makroskopischen Betrachtungsweise hergestellt.

Aus den kontinuumsmechanischen Navier-Stokes-Gleichungen leiten sich die in Abb. 6.7 dargestellten *vereinfachten Modellgleichungen* ab. Für reibungsfreie Strömungen ergibt sich die *Euler-Gleichung*. Ist die Strömung zusätzlich drehungsfrei gilt die *Potentialgleichung*. Strömungen bei geringen Mach-Zahlen führen zu den *Navier-Stokes-Gleichungen inkompressibler Fluide*. Ist die Dichte des Fluids nur von der Temperatur und nicht vom Druck abhängig, ergibt sich unter Berücksichtigung des hydrodynamischen Auftriebs die *Boussinesq-Gleichung*. Für Strömungen bei großen Reynolds-Zahlen ist die Dicke der wandnahen Grenzschicht klein gegenüber den geometrischen Abmessungen, daher können einzelne Terme

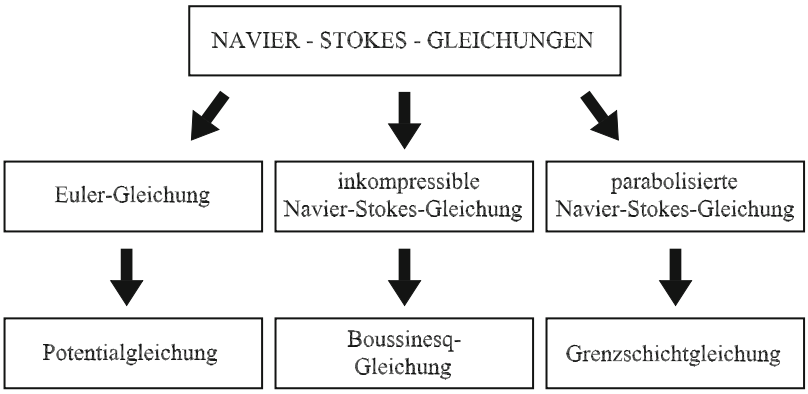


Abb. 6.7 Vereinfachte Modellgleichungen

innerhalb der Grenzschicht vernachlässigt werden. Dies führt zu den *parabolisierten Navier-Stokes-Gleichungen* und den *Grenzschichtgleichungen*.

4.2 Navier-Stokes-Gleichungen

Für die numerische Berechnung von Strömungen ist es von Vorteil die Grundgleichungen (6.1), (6.18) und (6.58) der vorangegangenen Kapitel in *Erhaltungsform* umzuschreiben. Dies bedeutet, dass in den Grundgleichungen die Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Energie als Divergenz der konvektiven Flüsse dieser Größen dargestellt werden. So enthält die Kontinuitätsgleichung als Divergenz den Ausdruck $\nabla \cdot (\rho \cdot \boldsymbol{v})$, die Impulsgleichungen als Divergenz den Ausdruck $\nabla \cdot (\rho \cdot \boldsymbol{v}\boldsymbol{v})$ und letztlich die Energiegleichung als Divergenz den Ausdruck $\nabla \cdot (\rho \cdot E \cdot \boldsymbol{v})$ mit der Gesamtenergie E.

Führt man dimensionslose Größen ein (*) ergibt sich für die dimensionslosen kartesischen Koordinaten

$$x_{\mathrm{m}}^* = \frac{x_{\mathrm{m}}}{l}\,, \qquad \mathrm{m} = 1, 2, 3\,,$$

mit einer für das gesamte Strömungsfeld charakteristischen *Bezugslänge* l.

Dabei steht x_{m}^* für

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}\,,$$

für die dimensionslose Zeit ist

$$t^* = \frac{t \cdot u_\infty}{l}\,,$$

mit einer für das gesamte Strömungsfeld charakteristischen *Bezugsgeschwindigkeit* u_∞. Die Größen x_m^* und t^* sind die vier *unabhängigen Variablen* in denen die Differentialgleichungen formuliert sind. Die *abhängigen Variablen* sind im *Lösungsvektor* zusammengefasst:

$$\boldsymbol{U}^*(x_\mathrm{m}^*, t^*) = \begin{pmatrix} \rho^* \\ \rho^* \cdot u_1^* \\ \rho^* \cdot u_2^* \\ \rho^* \cdot u_3^* \\ \rho^* \cdot E^* \end{pmatrix}, \tag{6.72}$$

mit der dimensionslosen *Dichte* ρ^*

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty}$$

einer für das gesamte Strömungsfeld charakteristischen Bezugsdichte ρ_∞, die Komponenten $\rho^* \cdot u_\mathrm{m}^*$ des dimensionslosen *Impulsvektors* pro Volumen

$$\rho^* \cdot \boldsymbol{u}^* = \frac{\rho \cdot \boldsymbol{u}}{\rho_\infty \cdot u_\infty} = \begin{pmatrix} \rho^* \cdot u_1^* \\ \rho^* \cdot u_2^* \\ \rho^* \cdot u_3^* \end{pmatrix}$$

und die dimensionslose spezifische *Gesamtenergie* pro Volumen E

$$\rho^* \cdot E^* = \frac{\rho \cdot E}{\rho_\infty \cdot u_\infty^2}$$

des Fluids. Die Größe $\boldsymbol{u}$ bezeichnet den *Geschwindigkeitsvektor* und E die Gesamtenergie pro Masse (innere Energie + kinetische Energie $(1/2) \cdot \boldsymbol{u}^2$).

Die dimensionslosen *Navier-Stokes-Gleichungen* für ein kompressibles Fluid lauten in *Erhaltungsform* (Masse-, Impuls- und Energieerhaltung):

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{U}^*}{\partial t^*} + \sum_{\mathrm{m}=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{F}_\mathrm{m}^*}{\partial x_\mathrm{m}^*} - \frac{1}{Re_l} \cdot \sum_{\mathrm{m}=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{G}_\mathrm{m}^*}{\partial x_\mathrm{m}^*} = \boldsymbol{0}}\,. \tag{6.73}$$

Man spricht von Erhaltungsform oder *konservativer Form*, da das Differentialgleichungssystem (6.73) an einem raumfesten Kontrollvolumen hergeleitet wurde, so dass jede Gleichung direkt die Massen-, Impuls- oder Energieerhaltung ausdrückt. Der Lösungsvektor Gl. (6.73) enthält in jeder Zeile die zu erhaltenden Variablen (*konservative Variablen*), bezogen auf das Volumen, also Masse pro Volumen ρ^*, Impuls pro Volumen $\rho^* \cdot \boldsymbol{u}^*$ und Gesamtenergie pro Volumen $\rho^* \cdot E^*$. Im Gegensatz zu den konservativen Variablen stehen die *primitiven Variablen* Geschwindigkeit, Druck, Temperatur, die in den vorangegangenen Kapiteln benutzt wurden.

In Gl. (6.73) ist $\boldsymbol{F}^*_{\mathrm{m}}$ der Vektor der *konvektiven Flüsse* in Richtung m:

$$\boldsymbol{F}^*_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} \rho^* \cdot u^*\mathrm{m} \\ \rho^* \cdot u^*_{\mathrm{m}} \cdot u^*_1 + \delta_{1m} \cdot p^* \\ \rho^* \cdot u^*_{\mathrm{m}} \cdot u^*_2 + \delta_{2m} \cdot p^* \\ \rho^* \cdot u^*_{\mathrm{m}} \cdot u^*_3 + \delta_{3m} \cdot p^* \\ u^*_{\mathrm{m}} \cdot (\rho^* \cdot E^* + p^*) \end{pmatrix}, \tag{6.74}$$

($\delta_{\mathrm{ij}} = 1$ für $i = j$; $\delta_{\mathrm{ij}} = 0$ für $i \neq j$) und $\boldsymbol{G}^*_{\mathrm{m}}$ der Vektor der *dissipativen Flüsse* in Koordinatenrichtung m

$$\boldsymbol{G}^*_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau^*_{\mathrm{m1}} \\ \tau^*_{\mathrm{m2}} \\ \tau^*_{\mathrm{m3}} \\ \sum\limits_{\mathrm{l}=1}^{3} u^*_{\mathrm{l}} \cdot \tau^*_{\mathrm{lm}} + \dot{q}^*_{\mathrm{m}} \end{pmatrix}, \tag{6.75}$$

mit der dimensionslosen *inneren Energie*

$$e^* = E^* - \frac{1}{2} \cdot \sum_{\mathrm{m}=1}^{3} u^{*2}_{\mathrm{m}},$$

dem dimensionslosen *Druck*

$$p^* = (\kappa - 1) \cdot \rho^* \cdot e^* = \frac{p}{\rho_\infty \cdot u^2_\infty},$$

der dimensionslosen *Temperatur*

$$T^* = (\kappa - 1) \cdot \kappa \cdot M^2_\infty \cdot e^* = \frac{T}{T_\infty},$$

den dimensionslosen *Spannungen*

$$\tau^*_{\mathrm{ij}} = \mu^* \cdot \left(\frac{\partial u^*_{\mathrm{i}}}{\partial x^*_{\mathrm{j}}} + \frac{\partial u^*_{\mathrm{j}}}{\partial x^*_{\mathrm{i}}} \right) - \frac{2}{3} \cdot \mu^* \cdot \sum_{\mathrm{k}=1}^{3} \frac{\partial u^*_{\mathrm{k}}}{\partial x^*_{\mathrm{k}}} \cdot \delta_{\mathrm{ij}}$$

und dem dimensionslosen *Wärmestrom* in Richtung m

$$\dot{q}^*_{\mathrm{m}} = \frac{\mu^*}{(\kappa - 1) \cdot M^2_\infty \cdot Pr_\infty} \cdot \frac{\partial T^*}{\partial x^*_{\mathrm{m}}} = \frac{\mu^* \cdot \kappa}{Pr} \cdot \frac{\partial e^*}{\partial x^*_{\mathrm{m}}} = \frac{\lambda^*}{(\kappa - 1) \cdot M^2_\infty \cdot Pr_\infty} \cdot \frac{\partial T^*}{\partial x^*_{\mathrm{m}}}.$$

Diese Gleichungen enthalten die *Stoffeigenschaften* $Pr_\infty = \nu_\infty / k_\infty$ Prandtl-Zahl, $\kappa = c_p/c_v$ Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten, μ^* dimensionslose dynamische Zähigkeit, welche für Luft unter atmosphärischen Bedingungen mit $Pr_\infty = 0,71$, $\kappa = 1,4$ und der *Sutherland-Formel*

$$\mu^* = (T^*)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1+S}{T^*+S}\,, \qquad S = \frac{110,4\ K}{T_\infty}$$

gegeben sind. Die Bezugsgröße T_∞ ist wiederum charakteristisch für die Strömung. Die folgenden *dimensionslosen Kennzahlen* charakterisieren das Strömungsfeld:

$$\begin{aligned} M_\infty &= \frac{u_\infty}{a_\infty} && \text{Mach-Zahl}\,, \\ Re_l &= \frac{\rho_\infty \cdot u_\infty \cdot l}{\mu_\infty} && \text{Reynolds-Zahl}\,, \\ Pr_\infty &= \frac{\nu_\infty}{k_\infty} && \text{Prandtl-Zahl}\,. \end{aligned}$$

Darin sind a_∞ eine charakteristische Schallgeschwindigkeit und μ_∞ eine charakteristische Zähigkeit.

Es handelt sich bei den Navier-Stokes-Gleichungen um ein System von fünf gekoppelten nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Da die Zeit als unabhängige Variable enthalten ist und räumlich gerichtete Transportmechanismen vorherrschen, sind die Gleichungen parabolisch.

Sind stationäre Strömungen von Interesse, so werden die Zeitableitungen weggelassen. Die Gleichungen sind dann elliptisch in Unterschallgebieten und hyperbolisch in Überschallgebieten. Man bezeichnet sie daher auch als von *gemischtem Typ*.

Die folgenden *Randbedingungen* sind zu berücksichtigen:

An einer *festen Wand* gilt die *Haftbedingung*

$$\boldsymbol{u}^* = \mathbf{0}$$

sowie entweder die Temperatur-Randbedingung der *isothermen Wand*

$$T^* = T^*_{\mathrm{w}}\,,$$

mit der vorgeschriebenen dimensionslosen Wandtemperatur T^*_{w} oder die Temperatur-Randbedingung der *adiabaten Wand*

$$\frac{\partial T^*}{\partial \boldsymbol{n}^*} = \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} \cdot n_1^* + \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} \cdot n_2^* + \frac{\partial T^*}{\partial x_3^*} \cdot n_3^* = 0\,,$$

mit dem dimensionslosen Vektor $\boldsymbol{n}^*$ in Wandnormalenrichtung.

Ein weiterer Rand ist der *Fernfeldrand*, welcher das Rechengebiet bei Umströmungsproblemen nach außen hin begrenzt. Ist der Fernfeldrand weit genug vom

umströmten Körper entfernt, herrscht dort die ungestörte Außenströmung $\boldsymbol{u}_\infty$, bzw. die Randbedingung der reibungsfreien Strömung von Abschn. 4.3.

Falls es nicht möglich ist den Fernfeldrand so festzulegen, so dass die Reibung keine Rolle spielt, z. B. wenn eine Grenzschicht, eine Ablöseblase oder eine Nachlaufströmung das Integrationsgebiet verlässt, so kann keine mathematisch exakte Randbedingung angegeben werden. In diesem Fall behilft man sich mit der Extrapolation von Strömungsgrößen im Strömungsfeld auf den Rand.

Der Lösungsvektor bei $t = t_0 = 0$ wird durch die *Anfangsbedingung*

$$\boldsymbol{U}^*(x_\mathrm{i}^*, 0) = \boldsymbol{U}_0^*(x_\mathrm{i}^*)$$

festgelegt.

4.3 Abgeleitete Modellgleichungen

Folgt man der Abb. 6.7, so erhält man durch Vernachlässigung von $\boldsymbol{G}^*$ in den Navier-Stokes-Gleichungen (6.73) die dimensionslose *Euler-Gleichung* in Erhaltungsform für laminare kompressible Strömungen

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{U}^*}{\partial t^*} + \sum_{\mathrm{m}=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{F}_\mathrm{m}^*}{\partial x_\mathrm{m}^*} = \boldsymbol{0}}\,, \tag{6.76}$$

mit den bereits angegebenen Definitionen $\boldsymbol{U}^*$ des Lösungsvektors Gl. (6.72) und den konvektiven Flüssen $\boldsymbol{F}_\mathrm{m}^*$ Gl. (6.74).

Es handelt sich um ein System von fünf gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Euler-Gleichungen beschreiben reibungslose Strömungen, in denen gekrümmte *Verdichtungsstöße* vorkommen können. Das Strömungsfeld wird durch die Mach-Zahl M_∞ charakterisiert.

An einer festen Wand gilt die *Gleitbedingung* als *Randbedingung*

$$\boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{n} = 0\,, \tag{6.77}$$

mit dem Wandnormalenvektor $\boldsymbol{n}$. Diese besagt, dass eine Wand nicht durchströmt wird und der Geschwindigkeitsvektor parallel zur Wand verläuft.

An den Berandungen des Strömungsfeldes ist die Ausbreitung von Informationen für die Angabe der Randbedingungen maßgeblich. Dazu muss zwischen Ein- und Ausströmrändern (je nach Richtung der Geschwindigkeit) und zwischen Unterschall- und Überschallrändern (je nachdem ob die lokale Mach-Zahl größer oder kleiner als eins ist) unterschieden werden. An den jeweiligen Rändern darf weder zu viel noch zu wenig Information vorgegeben werden, da dann das Problem mathematisch entweder über- oder unterbestimmt wäre. Die Anzahl der Randbedingungen liefert die Charakteristikentheorie.

	Einströmrand		Ausströmrand	
	Überschall	Unterschall	Überschall	Unterschall
Anzahl der vorzugebenden Variablen	5	4	0	1
Anzahl der zu berechnenden Variablen	0	1	5	4

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich wenn man annimmt, dass die Strömung zusätzlich *isentrop* ist. Dann darf die Strömung keine geraden oder gekrümmten Verdichtungsstöße mehr enthalten. Man kann zeigen, dass derartige Strömungen *drehungsfrei* sind, d. h. es gilt:

$$\boldsymbol{\omega}^* = \mathrm{rot}\boldsymbol{u}^* = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_3^*}{\partial x_2^*} - \dfrac{\partial u_2^*}{\partial x_3^*} \\ \dfrac{\partial u_1^*}{\partial x_3^*} - \dfrac{\partial u_3^*}{\partial x_1^*} \\ \dfrac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} - \dfrac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,,$$

in koordinatenfreier Schreibweise:

$$\boldsymbol{\omega}^* = \nabla \times \boldsymbol{u}^* = \mathbf{0}\,.$$

Für drehungsfreie Strömungen ist es sinnvoll, die *Potentialfunktion* Φ^* einzuführen:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_1^*} = u_1^*\,, \qquad \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2^*} = u_2^*\,, \qquad \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_3^*} = u_3^*\,. \tag{6.78}$$

Man erhält durch Einsetzen in die Euler–Gleichungen und nach diversen Vereinfachungen die dimensionslose linearisierte *Potentialgleichung*:

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x_3^{*2}} = 0\,, \qquad \Delta \Phi^* = 0\,. \tag{6.79}$$

Diese *skalare* Gleichung ist linear, von zweiter Ordnung und elliptisch. Strömungen die mit Hilfe der Potentialgleichung beschrieben werden können, nennt man auch *Potentialströmungen*, die bereits in Abschn. 5 des Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit eingeführt wurden.

Die Impulserhaltung ist für eine inkompressible Strömung durch Annahme der Drehungsfreiheit automatisch erfüllt. Die Energiegleichung stellt eine zusätzliche entkoppelte Gleichung dar.

Es gilt an einer festen Wand wie bei der Euler-Gleichung die Gleitbedingung als *Randbedingung*:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_1^*} \cdot n_1^* + \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2^*} \cdot n_2^* + \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_3^*} \cdot n_3^* = 0\,, \tag{6.80}$$

mit den Komponenten des Wandnormalenvektors n_1^*, n_2^* und n_3^*. Jede Stromlinie kann als feste Wand aufgefasst werden.

Am Fernfeldrand muss die durch einen Körper eingebrachte Störung abgeklungen sein, also

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_1^*} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2^*} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_3^*} = 0\,. \tag{6.81}$$

Durch diese Randbedingungen ist die Lösung erst bis auf eine Konstante bestimmt, da in Gl. (6.79) nur Ableitungen der Potentialfunktion vorkommen. Daher muss zusätzlich der Wert von Φ^* an einer beliebigen Stelle des Strömungsfeldes festgelegt werden.

Der Vorteil der Potentialgleichung besteht darin, dass sie linear ist. Dies bedeutet, dass jede Linearkombination bekannter Lösungen (z. B. Parallelströmung, Quelle, Senke, Potentialwirbel) wieder eine Lösung darstellt.

Für *inkompressible laminare* Strömungen gilt die *Navier-Stokes-Gleichung* (6.20). In dimensionsloser Form schreibt sie sich mit der Kontinuitätsgleichung (6.3):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{u}^* &= 0\,, \\ \frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t^*} + (\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla)\boldsymbol{u}^* &= \nabla p^* + \frac{1}{Re_l} \cdot \Delta \boldsymbol{u}^*\,. \end{aligned} \tag{6.82}$$

An festen Wänden gilt die Haftbedingung:

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{0}\,. \tag{6.83}$$

Das Druckniveau muss an einem beliebigen Punkt (x_1^*, x_2^*, x_3^*) festgelegt werden:

$$p^*(x_1^*, y_1^*, z_1^*) = p_1^*\,.$$

An Ein- und Ausströmrändern können die Richtung bzw. der Betrag der Geschwindigkeit vorgegeben werden. Dabei ist zu beachten, dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt sein muss.

Es kann wünschenswert sein, den Druck am Ein- bzw. Ausströmrand vorzugeben, z. B. bei Vorgabe eines bestimmten Druckunterschiedes zwischen zwei Querschnitten einer Rohrströmung. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass sich in diesen Querschnitten das Geschwindigkeitsprofil frei einstellen kann. Die Vorgabe von Geschwindigkeit und Druck an demselben Rand ist nur in Ausnahmefällen zulässig.

In Kap. 8 ▸ Konvektive Wärme- und Stoffübertragung werden *Strömungen mit Wärmeübertragung* behandelt. Dabei kann bei zahlreichen Anwendungsfällen die

Dichteänderung infolge Druckänderung vernachlässigt werden. Infolge Wärmeausdehnung ändert sich die Dichte jedoch mit der Temperatur. Zum Beispiel in *Konvektionsströmungen* ist dies die Ursache für eine *Auftriebskraft* $\rho^*(T) \cdot \boldsymbol{g}$.

Im Rahmen der *Boussinesq-Approximation* wird die Dichteänderung nur im Auftriebsterm berücksichtigt und in allen anderen Termen vernachlässigt. Dabei ist der Ansatz für die Dichte:

$$\rho(T) = \rho_0 \cdot [1 - \alpha \cdot (T - T_0)] \,, \tag{6.84}$$

mit dem *Wärmeausdehnungskoeffizienten* α, einer Bezugsdichte ρ_0 und einer Bezugstemperatur T_0. Die Zähigkeit wird als konstant angenommen. Zusätzlich wird die Dissipation in der Energiegleichung vernachlässigt. Führt man diese Annahmen in die Navier-Stokes-Gleichungen (6.18) und die Energiegleichung (6.56) ein und berücksichtigt die dem Wärmetransportproblem angepasste dimensionslose Größen

$$x_{\mathrm{m}}^* = \frac{x_{\mathrm{m}}}{l} \,, \qquad t^* = \frac{k_\infty \cdot t}{l^2} \,, \qquad \boldsymbol{u}^* = \frac{l}{k_\infty} \cdot \boldsymbol{u} \,,$$
$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_{\mathrm{w}} - T_\infty} \,, \qquad p^* = (p + \rho_\infty \cdot g \cdot x_3) \cdot \frac{l^2}{\rho_\infty \cdot \nu_\infty \cdot k_\infty} \,,$$

dann erhält man die dimensionslosen *Boussinesq-Gleichungen*:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{u}^* &= 0 \,, \\ \frac{1}{Pr_\infty} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t^*} + (\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla) \boldsymbol{u}^* \right) &= Ra_\infty \cdot T^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \nabla p^* + \Delta \boldsymbol{u}^* \,, \\ \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \boldsymbol{u}^* \cdot \nabla T^* &= \Delta T^* \,, \end{aligned} \tag{6.85}$$

mit der dimensionslosen Rayleigh-Zahl:

$$Ra_\infty = \frac{g \cdot l^3}{k_\infty \cdot \nu_\infty} \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) \,.$$

Je nach Größe der Prandtl-Zahl Pr_∞ ist ein unterschiedliches stationäres oder instationäres Verhalten der Strömung zu erwarten. Ist Pr_∞ klein (z. B. 0,71 für Luft, 10^{-2} für flüssige Metalle), so ist die Strömung instationär. Ist Pr_∞ groß (7 für Wasser, 10^3 für Öl), so erhält man eine stationäre Strömung in Form von Konvektionsrollen. Der instationäre Term besitzt in diesem Fall nur einen geringen Einfluss, da er mit einem kleinen Faktor $1/Pr_\infty$ multipliziert wird.

Berücksichtigt man zusätzlich die Massendiffusion in einer *zweikomponenten Flüssigkeitsschicht* (z. B. Salzlösung), so erhält man aufgrund der Konzentrationsgradienten einen zweiten Anteil der Auftriebskraft.

Zur Beschreibung des Massenaustauschs innerhalb eines Mehrkomponentengemisches, bestehend aus N Spezies, können N Massenbilanzgleichungen aufgestellt werden. Bedeutet m_k die Masse der Spezies k, so bezeichnet man die Größe ρ_k als *Partialdichte* der Spezies k im Gemisch. Die Dichte des Gemischs ρ ist definiert als

$$\rho = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \rho_\mathrm{k} \,. \tag{6.86}$$

Jede Spezies k besitzt zudem eine eigene Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}_\mathrm{k}$. Hiermit lassen sich in Analogie zum Einkomponentenfluid (N = 1) unter Ausschluss von Massenquellen oder Massensenken für jede einzelne Spezies die N Massenbilanzen

$$\frac{\partial \rho_\mathrm{k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\mathrm{k} \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{k}) = 0 \,, \qquad k = 1, \ldots, \mathrm{N} \tag{6.87}$$

formulieren. Summiert man diese *Komponenten-Kontinuitätsgleichungen*, so erhält man unter Einführung der *Massenkonzentration* $c_\mathrm{k} = \rho_\mathrm{k}/\rho$ der Spezies k ($\sum_{\mathrm{k}=1}^{N} c_\mathrm{k} = 1$) die folgende dimensionslose Beziehung für die Gemischdichte:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot \left(\rho^* \cdot \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{u}^* \right) = 0 \,, \tag{6.88}$$

mit der dimensionslosen Strömungsgeschwindigkeit des Gemischs

$$\boldsymbol{u}^* = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} c_\mathrm{k} \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{k}^* \,. \tag{6.89}$$

Mit dem dimensionslosen Druck $p^* = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} p_\mathrm{k}^*$ und der linearen thermischen Zustandsgleichung $\rho^* = 1 - (\alpha_\mathrm{m} \cdot (T^* - T_\mathrm{m})) \cdot (T^* - T_\mathrm{m}) - (\beta_\mathrm{m} \cdot (c - c_\mathrm{m})) \cdot (c - c_\mathrm{m})$ (Konzentrationsausdehnungskoeffizient β, m mittlere Temperatur bzw. Konzentration) für ein Zweikomponentengemisch, ergeben sich die folgenden dimensionslosen Boussinesq-Gleichungen für das Zweistoffgemisch:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{u}^* &= 0 \,, \\
Le_\infty \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial t^*} + (\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla c \right) &= \Delta c \,, \\
\frac{1}{Pr_\infty} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t^*} + (\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla) \boldsymbol{u}^* \right) &= \Delta \boldsymbol{u}^* - \nabla p^* + (Ra_\infty \cdot T^* + Ra_{D\infty} \cdot c) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,, \\
\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \boldsymbol{u}^* \cdot \nabla T^* &= \Delta T^* \,,
\end{aligned} \tag{6.90}$$

mit den zusätzlichen dimensionslosen Kennzahlen Diffusions-Rayleigh-Zahl $Ra_{D\infty} = -\beta_m \cdot (c - c_m) \cdot g \cdot l^3/(k_m \cdot \nu_m)$ und der Lewis-Zahl $Le = k_m/D_m$ (Diffusionskoeffizient D).

Betrachtet man eine Salzlösung ist es leicht erkennbar, dass für $c = 0$ (reines Wasser) oder $c = 1$ (d. h. auch $Ra_{D\infty} = 0$) (Salzwasser an der Löslichkeitsgrenze) das obige Gleichungssystem in das der Rayleigh-Bénard-Konvektion übergeht.

Die Euler-Gleichung (6.76) bildet die Basis für einige inkompressible Strömungsprobleme mit *frei beweglichen Grenzflächen* die in Kap. 9 ▸ Strömungen mit mehreren Phasen behandelt werden. Dabei geht man von der Annahme aus, dass auf beiden Seiten der Grenzfläche die Strömung wirbelfrei ist. Die Integration der Euler-Gleichung führt bei gleichzeitiger Einführung eines Geschwindigkeitspotentials $\boldsymbol{u} = -\nabla\Phi$ zur verallgemeinerten Bernoulli-Gleichung in der Form:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot (\nabla\Phi)^2 + \frac{p}{\rho} + \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} = \mathrm{C_k}\,, \tag{6.91}$$

wobei $\mathrm{C_k}$ eine Integrationskonstante ist, die in den Phasen k beiderseits der Trennfläche unterschiedliche Werte haben kann. Die Bernoulli-Gleichung (6.91) ist die Ausgangsgleichung für die Beschreibung von Wellenvorgängen in geschichteten inkompressiblen Medien. Sie kann ferner dazu benutzt werden, um die Dynamik eines druckbedingten Blasenwachstums in der Anfangsphase zu beschreiben.

Für kugelförmige Blasen wurde von Rayleigh (1917) und von Plesset und Zwick (1954) aus der Bernoulli-Gleichung eine Differentialgleichung für den Radius R_B einer Einzelblase unter Wirkung eines Druckfeldes abgeleitet. Dabei wird eine kugelförmige Gasblase in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit betrachtet. Die Massenbilanz ergibt ausgehend von einem sich zeitlich verändernden Blasenvolumen für die Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}(R_B, r, t)$ auf einem Radius r außerhalb der Blase die Beziehung:

$$\boldsymbol{u}(R_B, r, t) = \frac{R_B^2}{r^2} \cdot \frac{\mathrm{d}R_B}{\mathrm{d}t}\,. \tag{6.92}$$

Der Geschwindigkeit kann ein Potential zugeordnet werden in der Form:

$$\Phi = \frac{R_B^2}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}R_B}{\mathrm{d}t}\,.$$

Führt man diese Beziehung in die Bernoulli-Gleichung (6.91) ein, so folgt für die Zustände auf dem Blasenrand und in großer Entfernung vom Rand, also für $r \to \infty$ die *Rayleigh-Plesset-Gleichung*:

$$R_B \cdot \frac{\mathrm{d}^2 R_B}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}R_B}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{\rho_k} \cdot (p_R - p_\infty)\,. \tag{6.93}$$

Dabei kennzeichnen der Index k die flüssige Phase und die Indizes R und ∞ die Druckzustände auf dem Blasenrand bzw. im Unendlichen. Die Gleichung muss erweitert werden, wenn Phasenübergänge am Blasenrand auftreten, wenn Oberflächenspannungen oder Zähigkeitskräfte wirken oder wenn Gas und Flüssigkeit nicht im thermodynamischen Gleichgewicht sind.

Für Strömungen bei großen Reynolds-Zahlen führt die Tatsache, dass der Vorfaktor $1/Re_l$ von $\boldsymbol{G}^*_{\mathrm{m}}$ Gl. (6.73) klein ist, nicht zwangsläufig zur Vernachlässigung der dissipativen Flüsse. Für Strömungen mit Grenzschichtcharakter hängt die Größe der Reibungsterme davon ab, ob Geschwindigkeitsgradienten parallel oder senkrecht zur Körperkontur betrachtet werden.

Da die Körperkontur im Allgemeinen nicht parallel zu einer der Koordinatenachsen verläuft, werden die Navier-Stokes-Gleichungen (6.73) zunächst auf körperangepasste krummlinige Koordinaten transformiert. Die krummlinigen Koordinaten $\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*$ werden durch die Transformationsgleichungen

$$\xi_1^* = \xi_1^*(t^*, x_{\mathrm{m}}^*), \qquad \xi_2^* = \xi_2^*(t^*, x_{\mathrm{m}}^*), \qquad \xi_3^* = \xi_3^*(t^*, x_{\mathrm{m}}^*), \qquad t^* = \tau^*,$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial \tau^*} + \frac{\partial \xi_1^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1^*} + \frac{\partial \xi_2^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_2^*} + \frac{\partial \xi_3^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_3^*},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{m}}^*} = \frac{\partial \xi_1^*}{\partial x_{\mathrm{m}}^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1^*} + \frac{\partial \xi_2^*}{\partial x_{\mathrm{m}}^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_2^*} + \frac{\partial \xi_3^*}{\partial x_{\mathrm{m}}^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_3^*}.$$

dargestellt.

Die transformierten Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{U}}^*}{\partial t^*} + \sum_{\mathrm{m}=1}^{3} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{F}}^*_{\mathrm{m}}}{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*} - \frac{1}{Re_l} \cdot \sum_{\mathrm{m}=1}^{3} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{G}}^*_{\mathrm{m}}}{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*} = \boldsymbol{0}, \tag{6.94}$$

mit

$$\hat{\boldsymbol{U}}^* = J \cdot \boldsymbol{U}^*,$$

$$\hat{\boldsymbol{F}}^*_{\mathrm{m}} = J \cdot \left(\frac{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*}{\partial t^*} \cdot \boldsymbol{U}^* + \frac{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*}{\partial x_1^*} \cdot \boldsymbol{F}^*_1 + \frac{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*}{\partial x_2^*} \cdot \boldsymbol{F}^*_2 + \frac{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*}{\partial x_3^*} \cdot \boldsymbol{F}^*_3 \right),$$

$$\hat{\boldsymbol{G}}^*_{\mathrm{m}} = J \cdot \left(\frac{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*}{\partial x_1^*} \cdot \boldsymbol{G}^*_1 + \frac{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*}{\partial x_2^*} \cdot \boldsymbol{G}^*_2 + \frac{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*}{\partial x_3^*} \cdot \boldsymbol{G}^*_3 \right)$$

und mit der Jakobi-Determinante

$$J^{-1} = \frac{\partial x_1^*}{\partial \xi_1^*} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial \xi_2^*} \cdot \frac{\partial x_3^*}{\partial \xi_3^*} + \frac{\partial x_1^*}{\partial \xi_3^*} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial \xi_1^*} \cdot \frac{\partial x_3^*}{\partial \xi_2^*} + \frac{\partial x_1^*}{\partial \xi_2^*} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial \xi_3^*} \cdot \frac{\partial x_3^*}{\partial \xi_1^*}$$

$$- \frac{\partial x_1^*}{\partial \xi_1^*} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial \xi_3^*} \cdot \frac{\partial x_3^*}{\partial \xi_2^*} - \frac{\partial x_1^*}{\partial \xi_2^*} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial \xi_1^*} \cdot \frac{\partial x_3^*}{\partial \xi_3^*} - \frac{\partial x_1^*}{\partial \xi_3^*} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial \xi_2^*} \cdot \frac{\partial x_3^*}{\partial \xi_1^*}.$$

Diejenigen Terme in $\boldsymbol{G}^*$, welche Ableitungen parallel zur Körperkontur enthalten, sind im Allgemeinen klein (außer bei Strömungsablösung). Dies führt dazu, dass diese Terme vernachlässigt werden können.

Störungen breiten sich meist nur stromab aus, was einem parabolischen Ausbreitungsmechanismus entspricht. Den *stationären* Navier-Stokes-Gleichungen wird diese Eigenschaft vermittelt, indem der Druck der Grenzschicht aufgeprägt wird. Der Druckgradient in Wandnormalenrichtung ξ_3^* wird vernachlässigt.

Damit ergeben sich die dimensionslosen *parabolisierten Navier-Stokes-Gleichungen* für stationäre Grenzschichtströmungen:

$$\sum_{\mathrm{m}=1}^{3} \frac{\partial \hat{\hat{\boldsymbol{F}}}_{\mathrm{m}}^*}{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*} - \frac{1}{Re_l} \cdot \frac{\partial \hat{\hat{\boldsymbol{G}}}_3^*}{\partial \xi_3^*} = \boldsymbol{0}\,, \tag{6.95}$$

mit

$$\hat{\hat{\boldsymbol{F}}}_{\mathrm{m}}^* = J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho^* \cdot \hat{u}_{\mathrm{m}}^* \\ \rho^* \cdot \hat{u}_{\mathrm{m}}^* \cdot u_1^* + \frac{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*}{\partial x_1^*} \cdot p_s^* \\ \rho^* \cdot \hat{u}_{\mathrm{m}}^* \cdot u_2^* + \frac{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*}{\partial x_2^*} \cdot p_s^* \\ \rho^* \cdot \hat{u}_{\mathrm{m}}^* u_3^* + \frac{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*}{\partial x_3^*} \cdot p_s^* \\ \hat{u}_{\mathrm{m}}^* \cdot (\rho^* \cdot e_{tot}^* + p_s^*) \end{pmatrix}, \tag{6.96}$$

$$\hat{\hat{\boldsymbol{G}}}_3^* = J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\mathrm{l}=1}^{3} \frac{\partial \xi_3^*}{\partial x_{\mathrm{l}}^*} \cdot \tau_{1\mathrm{l}}^* \\ \sum_{\mathrm{l}=1}^{3} \frac{\partial \xi_3^*}{\partial x_{\mathrm{l}}^*} \cdot \tau_{2\mathrm{l}}^* \\ \sum_{\mathrm{l}=1}^{3} \frac{\partial \xi_3^*}{\partial x_{\mathrm{l}}^*} \cdot \tau_{3\mathrm{l}}^* \\ \sum_{\mathrm{l}=1}^{3} \frac{\partial \xi_3^*}{\partial x_{\mathrm{l}}^*} \cdot \left(\sum_{\mathrm{m}=1}^{3} u_{\mathrm{m}}^* \cdot \tau_{\mathrm{m}3}^* + \dot{q}_3^* \right) \end{pmatrix} \tag{6.97}$$

und

$$\hat{u}_{\mathrm{m}}^* = \frac{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*}{\partial x_1^*} \cdot u_1^* + \frac{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*}{\partial x_2^*} \cdot u_2^* + \frac{\partial \xi_{\mathrm{m}}^*}{\partial x_3^*} \cdot u_3^*\,, \qquad \mathrm{m} = 1, 2, 3\,.$$

Vernachlässigt man zusätzlich den Einfluss der Krümmung der Körperkontur, führt die von *L. Prandtl* durchgeführte Größenordnungsabschätzung zur Vernachlässigung aller Ableitungen nach x_1 und x_2 in den Reibungstermen von Gl. (6.95).

Dies ist gerechtfertigt, wenn bei Strömungen großer Reynolds-Zahlen die Grenzschichtdicke klein gegenüber den Körperabmessungen wird. Da der Druck der Grenzschicht aufgeprägt wird, entfällt mit $\partial p^*/\partial x_3^* = 0$ die dritte Impulserhaltungsgleichung und man erhält die *Prandtlschen Grenzschichtgleichungen* in den kartesischen Koordinaten x_{m}^*:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho^*\cdot u_1^*)}{\partial x_1^*} + \frac{\partial(\rho^*\cdot u_2^*)}{\partial x_2^*} + \frac{\partial(\rho^*\cdot u_3^*)}{\partial x_3^*} = 0\\
\rho^*\cdot&\left(u_1^*\cdot\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^*\cdot\frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} + u_3^*\cdot\frac{\partial u_1^*}{\partial x_3^*}\right) = -\frac{\partial p_s^*}{\partial x_1^*} + \frac{1}{Re_l}\cdot\frac{\partial}{\partial x_3^*}\left(\mu^*\cdot\frac{\partial u_1^*}{\partial x_3^*}\right)\\
\rho^*\cdot&\left(u_1^*\cdot\frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + u_2^*\cdot\frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} + u_3^*\cdot\frac{\partial u_2^*}{\partial x_3^*}\right) = -\frac{\partial p_s^*}{\partial x_2^*} + \frac{1}{Re_l}\cdot\frac{\partial}{\partial x_3^*}\left(\mu^*\cdot\frac{\partial u_2^*}{\partial x_3^*}\right) \qquad (6.98)\\
\rho^*\cdot&\left(u_1^*\cdot\frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + u_2^*\cdot\frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} + u_3^*\cdot\frac{\partial T^*}{\partial x_3^*}\right) = \frac{\mu^*}{(\kappa-1)\cdot Re_l\cdot Pr_\infty}\cdot\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_3^{*2}} +\\
&\frac{\mu*}{Re_l}\cdot\left[\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_3^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x_3^*}\right)^2\right] + u_1^*\cdot\frac{\partial p_s^*}{\partial x_1^*} + u_2^*\cdot\frac{\partial p_s^*}{\partial x_2^*}\,.
\end{aligned}
$$

4.4 Reynolds-Gleichungen für turbulente Strömungen

Schreibt man die *Reynolds-Gleichungen* (6.27), (6.33), (6.34), (6.35) und (6.59) entsprechend Abschn. 4.2 in *Erhaltungsform* erhält man mit den massengemittelten Strömungsgrößen die zeitlich gemittelten Grundgleichungen für die dimensionsbehafteten Strömungsgrößen:

$$
\frac{\partial\overline{\boldsymbol{U}}}{\partial t} + \sum_{\mathrm{m}=1}^{3}\frac{\partial\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{m}}}{\partial x_{\mathrm{m}}} - \frac{1}{Re_l}\sum_{\mathrm{m}=1}^{3}\frac{\partial\overline{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{m}}}{\partial x_{\mathrm{m}}} + \sum_{\mathrm{m}=1}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{R}_{\mathrm{m}}}{\partial x_{\mathrm{m}}} = \boldsymbol{0}\,, \qquad (6.99)
$$

mit dem Lösungsvektor

$$
\overline{\boldsymbol{U}}(x_{\mathrm{m}},t) = \begin{pmatrix} \overline{\rho}\\ \overline{\rho}\cdot\tilde{u}_1\\ \overline{\rho}\cdot\tilde{u}_2\\ \overline{\rho}\cdot\tilde{u}_3\\ \overline{\rho}\cdot\tilde{E}\end{pmatrix}. \qquad (6.100)
$$

Gegenüber den Navier-Stokes-Gleichungen in Erhaltungsform Gl. (6.73) ist aufgrund des Reynolds-Ansatzes und der zeitlichen Mittelung der Term $\boldsymbol{R}_{\mathrm{m}}$ hinzugekommen.

Der Vektor der zeitlich gemittelten konvektiven Flüsse schreibt sich

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} \overline{\rho} \cdot \tilde{u}_{\mathrm{m}} \\ \overline{\rho} \cdot \tilde{u}_{\mathrm{m}} \cdot \tilde{u}_1 + \delta_{1m} \cdot \overline{p} \\ \overline{\rho} \cdot \tilde{u}_{\mathrm{m}} \cdot \tilde{u}_2 + \delta_{2m} \cdot \overline{p} \\ \overline{\rho} \cdot \tilde{u}_{\mathrm{m}} \cdot \tilde{u}_3 + \delta_{3m} \cdot \overline{p} \\ \tilde{u}_{\mathrm{m}} \cdot (\overline{\rho} \cdot \tilde{e}_{tot} + \overline{p}) \end{pmatrix}, \tag{6.101}$$

der Vektor der gemittelten dissipativen Flüsse

$$\overline{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\tau}_{\mathrm{m1}} \\ \overline{\tau}_{\mathrm{m2}} \\ \overline{\tau}_{\mathrm{m3}} \\ \sum\limits_{\mathrm{l}=1}^{3} \tilde{u}_{\mathrm{l}} \cdot \overline{\tau}_{\mathrm{lm}} + \overline{\dot{q}}_{\mathrm{m}} \end{pmatrix} \tag{6.102}$$

und der hinzugekommene Vektor der turbulenten Flüsse

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\rho} \cdot \widetilde{u_1'' \cdot u_{\mathrm{m}}''} \\ \overline{\rho} \cdot \widetilde{u_2'' \cdot u_{\mathrm{m}}''} \\ \overline{\rho} \cdot \widetilde{u_3'' \cdot u_{\mathrm{m}}''} \\ R_{\mathrm{m,E}} \end{pmatrix}, \tag{6.103}$$

mit

$$R_{\mathrm{m,E}} = \sum_{\mathrm{l}=1}^{3} \left(\overline{\tau_{\mathrm{ml}} \cdot u_{\mathrm{l}}''} + \tilde{u}_{\mathrm{m}} \cdot \bar{\rho} \cdot \widetilde{u_{\mathrm{l}}'' \cdot u_{\mathrm{m}}''} - \frac{1}{2} \cdot \bar{\rho} \cdot u_{\mathrm{l}}'' \cdot \widetilde{u_{\mathrm{l}}'' \cdot u_{\mathrm{m}}''} \right) - \overline{p \cdot u_{\mathrm{m}}''} - \overline{\rho \cdot e'' \cdot u_{\mathrm{m}}''}$$

und der turbulenten Gesamtenergie

$$\tilde{E} = \tilde{e} + \sum_{\mathrm{m}=1}^{3} \frac{\tilde{u}_{\mathrm{m}}^2}{2} + K\,,$$

$$K = \sum_{\mathrm{m}=1}^{3} \frac{\widetilde{u_{\mathrm{m}}'' \cdot u_{\mathrm{m}}''}}{2}\,,$$

K ist die *turbulente kinetische Energie*.

Die in dem zusätzlichen Term $\boldsymbol{R}_{\mathrm{m}}$ vorkommenden Schwankungsgrößen sind unbekannt. Es ist offensichtlich, dass das Gleichungssystem mehr Unbekannte als Gleichungen besitzt, also *nicht geschlossen* ist. Das damit zusammenhängende

Schließungsproblem der Reynolds-Gleichungen für turbulente Strömungen führt dazu, dass die einzelnen Terme von $\boldsymbol{R}_{\mathrm{m}}$ für jedes Strömungsproblem mit empirischen Annahmen modelliert werden müssen.

4.5 Turbulenzmodelle

Impuls- und Wärmetransport finden in allen Strömungen als Folge der molekularen Diffusionsvorgänge auf einer mikroskopischen Skala statt. Sie werden durch die molekulare Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit repräsentiert. Es liegt nahe, auch die Austauschvorgänge der Turbulenz analog zu modellieren und eine turbulente Viskosität sowie eine turbulente Wärmeleitfähigkeit einzuführen. Für einfache eindimensionale Strömungen ist dies im klassischen Mischungsweg-ansatz von Prandtl verwirklicht (siehe Abschn. 5 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten).

Dieser Idee folgend lassen sich die Reynolds-Spannungen mit dem Boussinesq-Ansatz

$$-\overline{\rho}\cdot\widetilde{u_{\mathrm{i}}''\cdot u_{\mathrm{j}}''}=\mu_{\mathrm{t}}\cdot\left(\frac{\partial\tilde{u}_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}}+\frac{\partial\tilde{u}_{\mathrm{j}}}{\partial x_{\mathrm{i}}}\right)-\frac{2}{3}\cdot\overline{\rho}\cdot K\cdot\delta_{\mathrm{ij}} \tag{6.104}$$

modellieren. Darin ist μ_{t} die turbulente Zähigkeit oder *Wirbelviskosität*. Der rechte Term in Gl. (6.104) stellt den turbulenten Druck dar (mit $\delta_{\mathrm{ij}}=1$ für $\mathrm{i}=\mathrm{j}$ und $\delta_{\mathrm{ij}}=0$ für $\mathrm{i}\neq\mathrm{j}$), der proportional zur turbulenten kinetischen Energie pro Masse

$$K=\frac{1}{2}\cdot\widetilde{u_{\mathrm{i}}''\cdot u_{\mathrm{i}}''}=\frac{1}{2}\cdot\left(\tilde{u_1''^2}+\tilde{u_2''^2}+\tilde{u_3''^2}\right) \tag{6.105}$$

angenommen wird. Er kann für unsere weiteren Betrachtungen vernachlässigt werden.

Die Analogie zu den molekularen Austauschvorgängen sowie die charakteristischen Längenskalen einer turbulenten Strömung sind in Abb. 6.8 veranschaulicht, wobei links die kontinuumsmechanische Geschwindigkeit als Mittelwert der Molekülbewegung und rechts die Reynolds gemittelte Geschwindigkeit als Mittelwert der turbulenten Momentangeschwindigkeit skizziert ist. In beiden Fällen ist die zu betrachtende Geschwindigkeit als Mittelwert zahlreicher Einzelgeschwindigkeiten (der Moleküle oder der Wirbel) anzusehen. Dabei ist für die Betrachtung ein jeweils relevanter Größenmaßstab zugrunde zu legen, die mittlere freie Weglänge oder ein turbulentes Längenmaß.

Turbulenzmodelle die den beschriebenen Ansatz der Wirbelviskosität verwenden, bezeichnet man als *Wirbelviskositätsmodelle*. Der Aufwand ist damit gegenüber der unabhängigen Modellierung aller 6 Reynolds-Spannungen reduziert auf die Modellierung nur noch einer Größe, der Wirbelviskosität. Die Wirbelviskosität ist keine Stoffeigenschaft des Fluids sondern eine Eigenschaft der Turbulenz der jeweiligen Strömung.

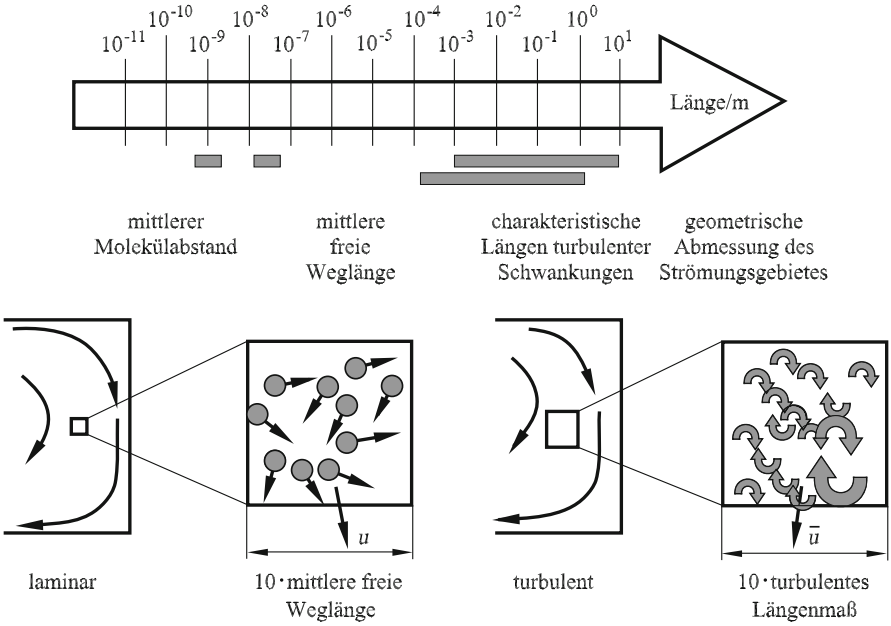


Abb. 6.8 Analogie der detaillierten und gemittelten Betrachtung der Molekülbewegung und der Turbulenz

Der Analogie folgend, können wir auch die turbulenten Wärmeströme entsprechend dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz mit dem Ansatz

$$-\rho \cdot c_v \cdot \overline{u_i' \cdot T'} = \lambda_t \cdot \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}, \qquad -\overline{u_i' \cdot T'} = a_t \cdot \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \tag{6.106}$$

modellieren. Sie werden also proportional zum Gradienten der mittleren Temperatur angenommen. Die Größe λ_t wird turbulente Wärmeleitfähigkeit und $a_t = \lambda_t/(\rho \cdot c)$ turbulente Temperaturleitfähigkeit genannt. Eine dieser Größen muss modelliert werden. Der turbulente Wärmetransport ist in den meisten Fällen erheblich größer als der molekulare und bestimmt unabhängig von den Stoffeigenschaften die Auswirkungen der Turbulenz auf die mittlere Strömung.

Die Wirbelviskosität und die turbulente Temperaturleitfähigkeit sind nicht unabhängig voneinander. Analog zur molekularen Prandtl-Zahl definiert man eine turbulente Prandtl-Zahl als Verhältnis der beiden Transportkoeffizienten:

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{a_t}. \tag{6.107}$$

Diese besitzt näherungsweise den Wert Eins. In der Praxis wird für Fluide geringer Wärmeleitfähigkeit (Luft, Wasser) meist $Pr_t = 0,9$ verwendet. Eine Ausnahme

bilden Fluide mit im Verhältnis zur Zähigkeit sehr hoher Wärmeleitfähigkeit, d. h. Fluide mit sehr niedriger molekularer Prandtl-Zahl (z. B. flüssige Metalle). Hier wirken sich die turbulenten Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes in geringerem Maße auf die turbulente Wärme- oder Temperaturleitfähigkeit als auf die turbulente Viskosität aus. Für solche Fluide ist also eine höhere turbulente Prandtl-Zahl zu wählen, etwa der Wert $Pr_t = 3$ für flüssige Metalle mit $Pr = 0,01$.

Damit reduziert sich die Turbulenzmodellierung auf die Aufgabe, die Wirbelviskosität in Abhängigkeit der gemittelten Strömung zu modellieren. Ist ν_t bekannt, so kann a_t mit Hilfe der angenommenen turbulenten Prandtl-Zahl berechnet werden.

Setzt man den Ansatz der Wirbelviskosität in die Reynolds-Gleichungen der inkompressiblen Strömung Gl. (6.40), (6.41) und (6.42) und die Energiegleichung (6.63) ein, so erhält man nach Division durch die Dichte:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_j \cdot \overline{u}_i\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \nu_t) \cdot \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\right], \tag{6.108}$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_j \cdot \overline{T}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(a + \frac{\nu_t}{Pr_t}\right) \cdot \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}\right]. \tag{6.109}$$

Die turbulenten Transportkoeffizienten treten also zu den molekularen hinzu. Der turbulente Druck wurde dabei vernachlässigt.

Die Annahme, dass die Intensität der turbulenten Durchmischung nur durch eine einzige Größe, die Wirbelviskosität repräsentiert wird, setzt voraus, dass die turbulenten Fluktuationen in allen Raumrichtungen gleich sind. Die Turbulenz ist *isotrop*. Isotrope Turbulenz kommt jedoch in der Praxis selten vor, allenfalls in der turbulenten Parallelströmung hinter einem Gitter. In Wandnähe und in freien Scherschichten ist die Turbulenz mehr oder weniger stark anisotrop. So sind beispielsweise in einer turbulenten Grenzschicht die Fluktuationen in wandparalleler Richtung doppelt so groß wie in Wandnormalenrichtung, da die Wand Normalbewegungen unterdrückt. Für die Beschreibung anisotroper turbulenter Strömungen sind erweiterte Turbulenzmodelle erforderlich.

Die Nachbildung des Fourierschen Wärmeleitungsgesetzes für die turbulenten Wärmeflüsse bedeutet anschaulich, dass einmal in der Strömung vorhandene Temperaturgradienten durch die Mischungsvorgänge ausgeglichen werden. Der turbulente Wärmestrom ist also dem Temperaturgradienten entgegen gerichtet. Lediglich Strömungen mit stark anisotroper Turbulenz erlauben einen Gegengradienten-Wärmetransport, z. B. die Fluidschicht mit inneren Wärmequellen. Der turbulente Wärmestrom verläuft dann in Richtung der höheren Temperatur. Dies kann mit den besprochenen Ansätzen nicht modelliert werden, da die Temperaturleitfähigkeit dann negativ wäre.

Für zahlreiche Strömungen mit Wärmetransport, die in Kap. 8 ▸ Konvektive Wärme- und Stoffübertragung behandelt werden, hat sich der Ansatz der turbulenten Prandtl-Zahl und die Annahme der Wirbelviskosität in der Praxis jedoch gut bewährt. Eine Analyse der Modellansätze erfolgt in Kap. 7 ▸ Instabilitäten und turbulente Strömungen.

Algebraische Turbulenzmodelle

Die algebraischen Wirbelviskositätsmodelle stellen die einfachste Klasse von Turbulenzmodellen dar. In einigen Scherströmungen entlang fester Wände, z. B. in der ausgebildeten Rohrströmung oder der Grenzschichtströmung entlang der ebenen Platte, kann die Ortsabhängigkeit der Wirbelviskosität auf eine einzige Koordinate reduziert werden, nämlich den Wandabstand. Dies liegt darin begründet, dass turbulente Grenzschichten ebenso wie laminare ähnlich sind und die Grenzschichtgleichung mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation lösbar wird. Dazu ist lediglich die Wirbelviskosität in Abhängigkeit des Wandabstandes anzugeben.

Dies wurde von Prandtl mit Hilfe des *Mischungswegansatzes* durchgeführt (siehe Abschn. 5 des Kap. 3 ▸ Dynamik der zähen Flüssigkeiten):

$$-\rho \cdot \overline{u' \cdot v'} = -\rho \cdot \overline{l \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \cdot l \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}} = \mu_\mathrm{t} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \,. \tag{6.110}$$

Daraus folgt die Wirbelviskosität:

$$\mu_\mathrm{t} = \rho \cdot l^2 \cdot \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right| \,. \tag{6.111}$$

$\overline{u}$ ist die mittlere Geschwindigkeitskomponente parallel zur Wand und z der Wandabstand. l wird als Prandtlscher Mischungsweg bezeichnet, der diejenige Strecke bezeichnet, die ein Turbulenzballen stromab zurücklegt, bis er sich vollständig mit seiner Umgebung vermischt hat.

Aus zahlreichen Messungen ergibt sich, dass für Scherströmungen der Mischungsweg mit guter Genauigkeit proportional zum Wandabstand angenommen werden kann:

$$l = 0,41 \cdot z \,, \tag{6.112}$$

wobei der Vorfaktor $0,41$ als von Kármán-Konstante bezeichnet wird. Im wandnahen Bereich (bis zu etwa $1/3$ der Grenzschichtdicke) gilt dies auch für Grenzschichten mit Druckgradient, für Kanal- und Rohrströmungen sowie für andere wandgebundene Scherströmungen.

Mit dem *Baldwin-Lomax-Turbulenzmodell* können Umströmungsprobleme mit Grenzschichtcharakter, wie z. B. die Tragflügelströmung der Abb. 6.9 berechnet werden. Das Modell geht davon aus, dass die Außenströmung reibungsfrei ist. Die Strömung wird in Abhängigkeit vom Wandabstand in zwei Schichten eingeteilt. In der inneren Schicht, welche die wandnahe Zone und die viskose Unterschicht umfasst, wird ein modifizierter Mischungswegansatz verwendet:

$$(\mu_\mathrm{t})_\mathrm{innen} = \rho \cdot l_\mathrm{mod}^2 \cdot |\overline{\omega}| \,. \tag{6.113}$$

Anstelle des Geschwindigkeitsgradienten tritt der Betrag der Drehung der mittleren Strömung:

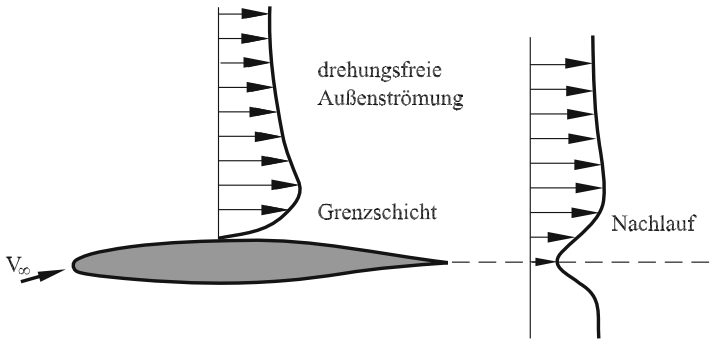


Abb. 6.9 Anwendungsbeispiel für das Baldwin-Lomax-Turbulenzmodell, Umströmung eines Tragflügelprofils mit Nachlauf

$$|\overline{\omega}| = |\nabla \times \overline{\boldsymbol{u}}| = \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_3} - \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_1}\right)^2}. \quad (6.114)$$

Der modifizierte Mischungsweg lautet:

$$l_{\text{mod}} = 0,41 \cdot z \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{z^+}{\text{A}^+}\right)\right], \quad (6.115)$$

mit dem van Driestschen Dämpfungsfaktor (Klammerausdruck). $z^+ = u_\tau/\nu \cdot z$ ist die mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit $u_\tau = \sqrt{\tau_\text{w}/\rho_\text{w}}$ gebildete dimensionslose Koordinate. Die Modellkonstante besitzt den Wert $\text{A}^+ = 26$. Der Dämpfungsfaktor besitzt außerhalb der viskosen Unterschicht etwa den Wert Eins, verändert also in der wandnahen Zone die Wirbelviskosität fast nicht. In der viskosen Unterschicht trägt dieser Faktor den veränderten Bedingungen Rechnung, indem er zu einer Reduzierung von l_mod und damit zu einer Reduzierung der Wirbelviskosität führt.

In der äußeren Schicht hängt die Stärke der Turbulenz von den Gegebenheiten der Außenströmung ab. Der Ansatz für die Wirbelviskosität lautet:

$$(\mu_\text{t})_\text{außen} = \rho \cdot \tilde{\text{K}} \cdot \text{C}_\text{CP} \cdot \text{F}_\text{Wake} \cdot \text{F}_\text{Kleb}\,, \quad (6.116)$$

wobei die Konstante $\tilde{\text{K}} = 0,0168$ und der Clauser-Parameter $\text{C}_\text{CP} = 1,6$ beträgt. In diesem Ansatz sind alle Größen mit Ausnahme von F_Kleb an der Stelle x konstant.

Zur Berechnung der Konstanten F_Wake betrachtet man die Funktion

$$\text{F}(z) = z \cdot |\overline{\omega}| \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{z^+}{\text{A}^+}\right)\right], \quad (6.117)$$

in der der van Driest-Dämpfungsfaktor näherungsweise Eins ist. Da der Faktor z zwar mit zunehmender Entfernung von der Wand ansteigt, die mittlere Drehung aber bis auf Null abfällt, besitzt diese Funktion ein Maximum F_{max} an der Stelle z_{max}, welches für die weitere Modellierung wie folgt geschrieben wird:

$$F_{Wake} = \min(z_{max} \cdot F_{max}, z_{max} \cdot \frac{u_{Dif}^2}{F_{max}}) , \tag{6.118}$$

mit der maximalen Geschwindigkeitsdifferenz

$$u_{Dif} = |\overline{\boldsymbol{u}}|_{max} - |\overline{\boldsymbol{u}}|_{min} .$$

Die Größe $|\overline{\boldsymbol{u}}|_{min}$ nimmt an der Wand wegen der Haftbedingung den Wert Null an. Baldwin und Lomax (1978) haben auch vorgesehen, das Turbulenzmodell auf Nachlaufströmungen von Tragflügeln anzuwenden. Dann wird die Geschwindigkeit in der Mitte des Nachlaufprofils genommen (Abb. 6.9).

Der Klebanoffsche Intermittenzfaktor

$$F_{Kleb} = \left[1 + 5,5 \cdot \left(\frac{C_{Kleb} \cdot z}{z_{max}} \right)^6 \right]^{-1} , \qquad C_{Kleb} = 0,3 \tag{6.119}$$

sorgt dafür, dass die Wirbelviskosität nach außen auf Null abfällt. Er trägt der Tatsache Rechnung, dass sich im Außenbereich einer Grenzschicht laminare und turbulente Phasen abwechseln, da die laminare Außenströmung kurzzeitig bis in die Grenzschicht hineinreichen kann bzw. die turbulenten Strukturen sich zeitlich und räumlich versetzt in die Außenströmung bewegen und erst dort abklingen (Intermittenz). Die in einer Grenzschicht ohne Druckgradient gemessenen Daten werden hier für alle Grenzschichten übernommen. Dabei wird die Größe z_{max} statt der Grenzschichtdicke verwendet.

In der inneren Schicht nimmt die Wirbelviskosität mit dem Wandabstand zu, in der äußeren nimmt sie ab. Die Grenze zwischen innerer und äußerer Schicht befindet sich am Schnittpunkt dieser beiden Verläufe. In der Praxis wird die Wirbelviskosität in beiden Bereichen berechnet und das Minimum genommen.

Wenn die Grenzschicht nicht von der Vorderkante an turbulent ist, sondern laminar beginnt und erst innerhalb eines Transitionsgebietes turbulent wird, so setzt das Turbulenzmodell am Ende des Transitionsbereiches ein. Der laminar-turbulente Übergang kann jedoch nicht mit Hilfe eines Turbulenzmodells bestimmt werden. Bei der Transition handelt es sich um ein Stabilitätsproblem der laminaren Strömung (siehe Abschn. 4 des Kap. 3 ▸ Dynamik der zähen Flüssigkeiten). Ist das Ende des Transitionsbereiches nicht aus Experimenten bekannt, ist ein Transitionsmodell erforderlich, das die Position des Abschlusses des Transitionsgebietes bestimmt (Oertel jr. und Delfs 2005).

Transportmodelle

Die bisher getroffene Annahme, dass die Turbulenz an einer Stelle im Strömungsfeld nur von den lokalen Gegebenheiten abhängt, bedeutet eine wesentliche Einschränkung. Häufig müssen auch die Mechanismen des Transports der Turbulenz berücksichtigt werden. In technischen Strömungen kommt es oft vor, dass die Turbulenz in bestimmten Bereichen des Strömungsfeldes entsteht und in andere Bereiche transportiert wird, wo sie die mittlere Strömung beeinflusst. Schließlich kann sie wieder in anderen Bereichen des Strömungsfeldes abklingen. Turbulenzmodelle, welche diese Transportmechanismen berücksichtigen, werden allgemein als Transportgleichungsmodelle bezeichnet.

Beim *Prandtlschen Ein-Gleichungsmodell* wird vorgeschlagen, die Wirbelviskosität mit

$$\mu_\mathrm{t} = \mathrm{C}_\mu \cdot \rho \cdot l \cdot \sqrt{K}\,, \qquad \mathrm{C}_\mu = 0,09 \tag{6.120}$$

zu modellieren. Darin ist $l = 0,41 \cdot z$ weiterhin der Prandtlsche Mischungsweg, jedoch wird die Scherung jetzt durch die Wurzel aus der turbulenten kinetischen Energie nach Gl. (6.105) ersetzt.

Der Transport der turbulenten kinetischen Energie K wird aus den Reynolds-Gleichungen (6.40), (6.41) und (6.42) abgeleitet. Die i-te Komponente der Reynolds-Gleichung wird mit der Geschwindigkeitsschwankung u_i' multipliziert:

$$\begin{aligned}\rho \cdot \frac{\partial(\overline{u}_\mathrm{i} + u_\mathrm{i}')}{\partial t} \cdot u_\mathrm{i}' + \rho \cdot (\overline{u}_\mathrm{j} + u_\mathrm{j}') \cdot \frac{\partial(\overline{u}_\mathrm{i} + u_\mathrm{i}')}{\partial x_\mathrm{j}} \cdot u_\mathrm{i}' = \\ - \frac{\partial(\overline{p} + p')}{\partial x_\mathrm{i}} \cdot u_\mathrm{i}' + \mu \cdot \frac{\partial^2(\overline{u}_\mathrm{i} + u_\mathrm{i}')}{\partial x_\mathrm{j}^2} \cdot u_\mathrm{i}'\,.\end{aligned} \tag{6.121}$$

Alle Terme werden ausmultipliziert und anschließend zeitlich gemittelt. Der jeweils erste Term ist mit einem entsprechenden Term der Reynolds-Gleichung identisch und kann gestrichen werden. Die Transportgleichungen werden sodann addiert und unter Benutzung der Identitäten

$$\frac{\partial u_\mathrm{i}'}{\partial t} \cdot u_\mathrm{i}' = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \cdot u_\mathrm{i}'^2\right), \qquad \frac{\partial u_\mathrm{i}'}{\partial x_\mathrm{j}} \cdot u_\mathrm{i}' = \frac{\partial}{\partial x_\mathrm{j}}\left(\frac{1}{2} \cdot u_\mathrm{i}'^2\right), \tag{6.122}$$

$$\frac{\partial^2 u_\mathrm{i}'}{\partial x_\mathrm{j}^2} \cdot u_\mathrm{i}' = \frac{\partial}{\partial x_\mathrm{j}}\left(\frac{\partial u_\mathrm{i}'}{\partial x_\mathrm{j}} \cdot u_\mathrm{i}'\right) - \left(\frac{\partial u_\mathrm{i}'}{\partial x_\mathrm{j}}\right)^2 \tag{6.123}$$

umgeformt.

Anschließend wird die Gleichung in K formuliert:

$$\rho \cdot \frac{\partial K}{\partial t} + \rho \cdot \overline{u}_\mathrm{j} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_\mathrm{j}} = -\frac{\partial \overline{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} \cdot \rho \cdot \overline{u_\mathrm{i}' \cdot u_\mathrm{j}'} + \frac{\partial}{\partial x_\mathrm{j}} \left(\mu \cdot \frac{\partial K}{\partial x_\mathrm{j}} - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \overline{u_\mathrm{i}' \cdot u_\mathrm{i}' \cdot u_\mathrm{j}'} - \overline{p' \cdot u_\mathrm{j}'} \right) - \mu \cdot \overline{\frac{\partial u_\mathrm{i}'}{\partial x_\mathrm{j}} \cdot \frac{\partial u_\mathrm{i}'}{\partial x_\mathrm{j}}} \quad (6.124)$$

Die Terme auf der linken Seite stellen die Konvektionsterme dar. Der erste Term auf der rechten Seite enthält die Transportgröße K nicht. Er wird daher als Produktionsterm (Quellterm) bezeichnet. Die weiteren Terme in Klammern stellen die molekulare Diffusion, die turbulente Diffusion und die Druckdiffusion dar. Der letzte Term ist immer negativ und stellt daher einen Senkenterm dar. Er repräsentiert die Aufzehrung und den Zerfall (Dissipation) der Turbulenz. Terme, welche die unbekannten Schwankungsgrößen enthalten, müssen modelliert werden.

Zunächst wird der Produktionsterm modelliert. Da sowohl i als auch j doppelt vorkommen, muss über beide Indices aufsummiert werden (9 Summanden). Jeder Summand besteht aus dem Produkt einer Komponente der Scherung und einer Reynolds-Spannung. Die Reynolds-Spannungen wurden bereits in Gl. (6.104) mit Hilfe der Wirbelviskosität modelliert und es liegt nahe, dies zu übernehmen. Dabei wird wiederum der turbulente Druck vernachlässigt:

$$-\frac{\partial \overline{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} \cdot \rho \cdot \overline{u_\mathrm{i}' \cdot u_\mathrm{j}'} = \mu_\mathrm{t} \cdot \frac{\partial \overline{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} \cdot \left(\frac{\partial \overline{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} + \frac{\partial \overline{u}_\mathrm{j}}{\partial x_\mathrm{i}} \right) . \quad (6.125)$$

Turbulenz wird nach diesem Modell dort produziert, wo die mittlere Strömung Geschwindigkeitsgradienten besitzt. Dies stimmt mit der Vorstellung überein, dass Scherschichten aufgrund ihrer Instabilität Turbulenz erzeugen.

Die turbulente Diffusion besitzt die Form eines Dreifachproduktes, wobei über i und j zu summieren ist (9 Terme). Die Ausbreitung der Turbulenz geschieht aufgrund ihrer eigenen Dynamik. Sie kann lediglich in vereinfachter Weise für jede Geometrieklasse neu modelliert werden. Es ist nahe liegend die Diffusion als Gradiententransport anzusehen. Dies bedeutet, dass Unterschiede in der Turbulenzintensität, also Gradienten in K abgeschwächt werden. Der dazu notwendige Transportkoeffizient ist proportional zur Wirbelviskosität:

$$-\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \overline{u_\mathrm{i}' \cdot u_\mathrm{i}' \cdot u_\mathrm{j}'} - \overline{p' \cdot u_\mathrm{j}'} = \frac{\mu_\mathrm{t}}{\sigma_\mathrm{k}} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_\mathrm{j}} , \quad (6.126)$$

wobei σ_k das Verhältnis zwischen der Wirbelviskosität und dem turbulenten Diffusionskoeffizienten analog zur turbulenten Prandtl-Zahl darstellt. Diese Modellkonstante kann näherungsweise als Eins angenommen werden. Die Druckdiffusion wird nicht separat modelliert, sondern zum Modell der turbulenten Diffusion mit hinzu genommen.

Die Modellierung der Dissipation erfolgt empirisch. Betrachtet man die Turbulenz in einer Parallelströmung hinter einem Gitter, so klingt diese mit wachsender Entfernung vom Gitter aufgrund der inneren Reibung der turbulenten Strukturen ab. Experimente haben gezeigt, dass die Dissipation proportional zu $K^{3/2}$ ist. Im Ein-Gleichungsmodell verwendet man daher

$$\mu \cdot \overline{\frac{\partial u_\mathrm{i}'}{\partial x_\mathrm{j}} \cdot \frac{\partial u_\mathrm{i}'}{\partial x_\mathrm{j}}} = \mathrm{C_D} \cdot \rho \cdot \frac{K^{\frac{3}{2}}}{l}\,, \qquad \mathrm{C_D} = 0,09\,. \tag{6.127}$$

Darin ist l wieder der Prandtlsche Mischungsweg der eingeführt wird, um die Dissipation in der Nähe fester Wände zu verstärken.

Die Modellgleichung für die turbulente kinetische Energie lautet damit:

$$\rho \cdot \frac{\partial K}{\partial t} + \rho \cdot \overline{u}_\mathrm{j} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_\mathrm{j}} = \mu_\mathrm{t} \cdot \frac{\partial \overline{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} \cdot \left(\frac{\partial \overline{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} + \frac{\partial \overline{u}_\mathrm{j}}{\partial x_\mathrm{i}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\mathrm{j}} \left(\mu \cdot \frac{\partial K}{\partial x_\mathrm{j}} + \frac{\mu_\mathrm{t}}{\sigma_\mathrm{k}} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_\mathrm{j}} \right) - \mathrm{C_D} \cdot \rho \cdot \frac{K^{\frac{3}{2}}}{l}\,. \tag{6.128}$$

Es werden zur Bestimmung von $K(x_1, x_2, x_3)$ Randbedingungen benötigt. An einer festen Wand verschwindet die turbulente kinetische Energie wegen der Haftbedingung. An einem Rand, an dem eine turbulente Strömung eintritt, muss K vorgegeben werden.

Beim Prandtlschen Ein-Gleichungsmodell gibt es Kritik an der Verwendung der Mischungsweglänge l. In der wandnahen Schicht spielen Transportvorgänge eine untergeordnete Rolle. Vernachlässigt man die entsprechenden Terme, so ergibt sich aus der verbleibenden Gleichung, dass l modifiziert werden muss, damit der hier verwendete Ansatz in das Prandtlsche Mischungswegmodell und damit z. B. für eine ebene Platte ohne Druckgradient in das logarithmische Wandgesetz übergeht. Außerdem ist festzustellen, dass ohne Vernachlässigung der Transportterme kein Übergang in den Mischungswegansatz stattfindet und damit die Verwendung einer Mischungsweglänge im Zusammenhang mit einem Ein-Gleichungsmodell nicht sinnvoll ist. Diesen Mangel beseitigt man mit einem Zwei-Gleichungstransportmodell.

Das *Zwei-Gleichungsmodell* (K-ε-*Modell*) berechnet die Wirbelviskosität mit dem Ansatz:

$$\mu_\mathrm{t} = \rho \cdot \mathrm{C}_\mu \cdot \frac{K^2}{\varepsilon}\,, \qquad \mathrm{C}_\mu = 0,09\,. \tag{6.129}$$

Damit erübrigt sich das Problem eine charakteristische Länge festlegen zu müssen.

$$\varepsilon = \nu \cdot \overline{\frac{\partial u_\mathrm{i}'}{\partial x_\mathrm{k}} \cdot \frac{\partial u_\mathrm{i}'}{\partial x_\mathrm{k}}} \tag{6.130}$$

ist die Dissipation, für die ebenfalls eine Transportgleichung formuliert wird. Diese kann auf ähnliche Weise wie die K-Transportgleichung aus den Reynolds-Gleichungen abgeleitet bzw. modelliert werden. Die beiden Transportgleichungen lauten:

$$\rho \cdot \frac{\partial K}{\partial t} + \rho \cdot \overline{u}_\mathrm{j} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_\mathrm{j}} = \mu_\mathrm{t} \cdot \frac{\partial \overline{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} \cdot \left(\frac{\partial \overline{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} + \frac{\partial \overline{u}_\mathrm{j}}{\partial x_\mathrm{i}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\mathrm{j}} \left(\mu \cdot \frac{\partial K}{\partial x_\mathrm{j}} + \frac{\mu_\mathrm{t}}{\sigma_\mathrm{k}} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_\mathrm{j}} \right) - \rho \cdot \varepsilon \,, \tag{6.131}$$

$$\rho \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \cdot \overline{u}_\mathrm{j} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\mathrm{j}} = \mathrm{C}_{\varepsilon 1} \cdot \frac{\varepsilon}{K} \cdot \mu_\mathrm{t} \cdot \frac{\partial \overline{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} \cdot \left(\frac{\partial \overline{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} + \frac{\partial \overline{u}_\mathrm{j}}{\partial x_\mathrm{i}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\mathrm{j}} \left(\mu \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\mathrm{j}} - \frac{\mu_\mathrm{t}}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\mathrm{j}} \right) - \mathrm{C}_{\varepsilon 2} \cdot \rho \cdot \frac{\varepsilon^2}{K} \,, \tag{6.132}$$

mit weiteren Modellkonstanten der ε-Gleichung $\mathrm{C}_{\varepsilon 1} = 1,44$, $\mathrm{C}_{\varepsilon 2} = 1,92$ und $\sigma_\varepsilon = 1.3$. Als Randbedingung wird die Ableitung von ε senkrecht zur Wand Null gesetzt. Eine Berechnung des Wertes von ε an der Wand ist dann nicht erforderlich. In einem Einströmquerschnitt muss ε, ebenso wie K, vorgegeben werden.

Die Charakterisierung der Turbulenz durch zwei Transportgrößen K und ε wird verständlich, wenn man sich die Vorgänge der Entstehung und Aufzehrung turbulenter Strukturen (Wirbel) als Energiekaskade vorstellt (siehe Abschn. 4 des Kap. 7 ▸ Instabilitäten und turbulente Strömungen). Als Folge von Instabilitäten der gemittelten Strömung entstehen zunächst großräumige Strukturen, diese sind jedoch selbst wieder instabil und zerfallen in kleinere Strukturen, welche wiederum zerfallen usw. Der größte Anteil der kinetischen Energie ist mit den großräumigen Wirbeln verbunden. Die Dissipation findet dagegen vorwiegend auf den kleinen Skalen statt. Die energietragenden Wirbel können im K-ε-Modell daher mit der Transportgröße K assoziiert werden, während die kleinen Wirbel eher mit ε verbunden sind.

Es sind zahlreiche Varianten des K-ε-Modells bekannt. Ein Beispiel ist das *Niedrig Reynolds-Zahl K-ε-Modell*. Wenn die Wandschubspannung, der Wandwärmestrom oder Strömungsablösung berechnet werden sollen, müssen die wandnahe Schicht und die viskose Unterschicht modelliert werden. Mit steigender Reynolds-Zahl werden diese Schichten immer dünner und damit eine Modellierung immer ungenauer. Damit ist man auf Strömungen geringer Reynolds-Zahlen beschränkt. Man bezeichnet die Alternative zum Standard K-ε-Modell daher als *Niedrig Reynolds-Zahl K-ε-Modell*. Zur Approximation der wandnahen Schicht müssen Modifikationen des Wirbelviskositätsansatzes und der Transportgleichungen vorgenommen werden.

Zunächst kann der Ansatz für die Wirbelviskosität um die Dämpfungsfunktion f_μ erweitert werden:

$$\mu_\mathrm{t} = \rho \cdot \mathrm{f}_\mu \cdot \mathrm{C}_\mu \cdot \frac{K^2}{\varepsilon} \,, \tag{6.133}$$

wobei eine Möglichkeit mit der van Driestschen Dämpfungsfunktion bereits bekannt ist. Da diese jedoch eine Funktion des Wandabstandes ist, muss nach Alternativen gesucht werden, denn der Wandabstand ist für komplexe Geometrien

nicht eindeutig definiert. Funktionen, die nur von K oder ε abhängen, sind als Dämpfungsfunktionen besser geeignet.

Die Gl. (6.131) und (6.132) können in der wandnahen Schicht nicht ohne Modifikation verwendet werden. Man kann zeigen, dass die wichtigste Reynolds-Spannung $\rho \cdot \overline{u_1' \cdot u_3'}$ an der Wand mit z^4 abklingt. Das K-ε-Modell liefert jedoch ein Abklingen proportional z^3. Außerdem besitzt ε am Rand der viskosen Unterschicht ein relatives Maximum, welches ohne weitere Modifikation nicht richtig wiedergegeben wird. Es gibt zahlreiche Niedrig-Reynolds-Zahl K-ε-Modelle, die eine modifizierte Dämpfungsfunktion und einen Zusatzterm in der ε-Gleichung verwenden, um diese Unzulänglichkeiten zu beheben.

So verwendet man z. B. die Dämpfungsfunktion:

$$\mathrm{f}_\mu = \exp\left(\frac{-3.4}{\left(1+\frac{\mathrm{R_t}}{50}\right)^2}\right), \qquad \mathrm{R_t} = \frac{K^2}{\nu \cdot \varepsilon} \tag{6.134}$$

und den Zusatzterm

$$D = 2 \cdot \nu \cdot \left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial z}\right)^2 \tag{6.135}$$

als zusätzliche Dissipation auf der rechten Seite der K-Gleichung (6.131).

Reynolds-Spannungsmodelle

Bei Strömungen mit stark anisotroper Turbulenz kann der Ansatz einer Wirbelviskosität nicht mehr verwendet werden, da die Turbulenz in ihrer Struktur und auch in Ihrer Wirkung auf die mittlere Strömung richtungsabhängig ist. Die turbulente kinetische Energie eignet sich nicht zur Turbulenzmodellierung, da sie diese Richtungsabhängigkeit nicht berücksichtigt.

So können Sekundärströmungen, z. B. in eckigen Rohren, eine direkte Folge der Anisotropie der Turbulenz sein. Die Entstehung der in Abb. 6.10 skizzierten Sekundärströmung kann mit einer Vergrößerung der Zähigkeit, wie beim Wirbelviskositätsansatz vorausgesetzt, nicht erklärt werden. Sie wird durch die richtungsabhängigen Reynolds-Spannungen hervorgerufen.

Zwei-Gleichungsmodelle sind auch dann nicht geeignet, wenn die Krümmung der Stromlinien eine Rolle spielt. Diese Krümmung kann die Turbulenz entweder verstärken oder abschwächen, je nachdem ob sie destabilisierend oder stabilisierend wirkt (siehe Abb. 6.11). Dies wird in einem Turbulenzmodell über den Produktionsterm berücksichtigt, der dann entweder positiv oder negativ sein muss. Im K-ε-Modell überwiegen die positiven Anteile, so dass die vorhergesagte Wirbelviskosität im Falle stabilisierender Krümmung z. B. in einem rotierenden System oder einem Wirbel zu groß ist.

Der Einfluss der Stromlinienkrümmung bewirkt entlang einer konvexen Oberfläche die Dämpfung der turbulenten Schwankungen. Bei Strömungen entlang einer

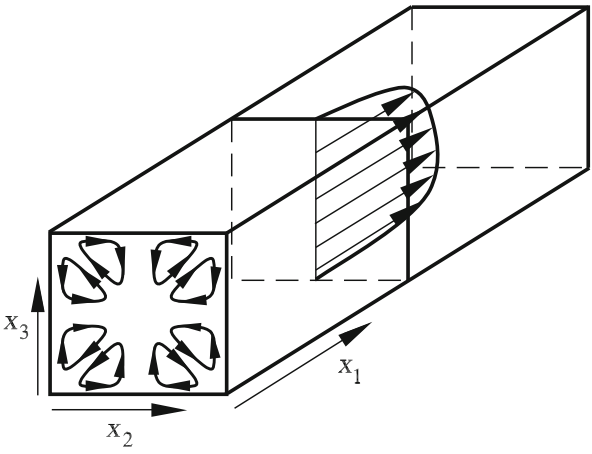


Abb. 6.10 Ausgebildete Strömung im quadratischen Rohr

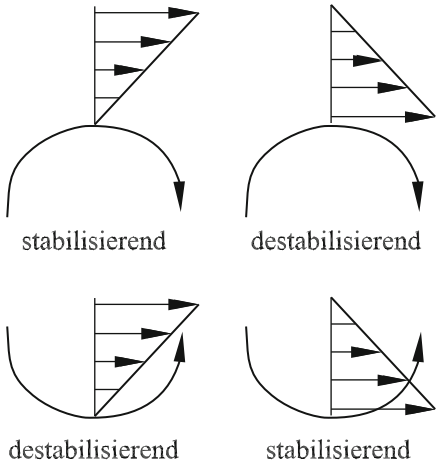


Abb. 6.11 Stabilisierende und destabilisierende Wirkung der Stromlinienkrümmung

konkaven Oberfläche werden sie angefacht. Die Stromlinienkrümmung kann also die Reynolds-Spannungen durchaus reduzieren, was durch den Wirbelviskositätsansatz nicht wiedergegeben wird. Aus diesem Grund versagen Wirbelviskositätsmodelle bei Strömungen mit Drall.

Der Ausweg besteht in der Berechnung der einzelnen Komponenten des Reynolds-Spannungstensors. Es werden isotherme Strömungen ohne Berücksichtigung der Energiegleichung vorausgesetzt. Damit sind anstatt einer Wirbelviskosität sechs Reynolds-Spannungen davon drei Normal- und drei Scherspannungen zu berechnen.

Es gibt bei den Reynolds-Spannungsmodellen wie bei den Wirbelviskositätsmodellen *algebraische Modelle*, bei denen alle Reynolds-Spannungen nur als Funktion der Geometrie modelliert werden, sowie *Transportgleichungsmodelle* bei denen für jede Reynolds-Spannung eine eigene Transportgleichung abgeleitet wird.

Die *Transportgleichung der Reynolds-Spannungen* ergibt sich aus den Navier-Stokes-Gleichungen

$$N(u_\mathrm{i}) = \rho \cdot \frac{\partial u_\mathrm{i}}{\partial t} + \rho \cdot u_\mathrm{k} \cdot \frac{\partial u_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{k}} + \frac{\partial p}{\partial x_\mathrm{i}} - \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x_\mathrm{j}} \left(\frac{\partial u_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} + \frac{\partial u_\mathrm{j}}{\partial x_\mathrm{i}} \right) = 0 \quad (6.136)$$

durch Multiplikation der Gleichung für die i-te Komponente mit der Schwankungsgeschwindigkeit u'_j und zeitlicher Mittelung:

$$\overline{u'_\mathrm{i} \cdot N(u_\mathrm{j}) + u'_\mathrm{j} \cdot N(u_\mathrm{i})} = 0\,. \quad (6.137)$$

Die Gleichung für die mittlere Strömung, die Reynolds-Gleichung, wird subtrahiert. Alle Terme, welche die Schwankungsgeschwindigkeit nur einmal enthalten, verschwinden aufgrund der Mittelung. Die verbleibenden Zweifachprodukte der Schwankungsgeschwindigkeit sind die Reynolds-Spannungen, also die abhängigen Variablen der jeweiligen Gleichung.

Die Transportgleichungen der Reynolds-Spannungen lauten also

$$\frac{\partial \tau^\mathrm{t}_\mathrm{ij}}{\partial t} + \overline{u}_\mathrm{k} \cdot \frac{\partial \tau^\mathrm{t}_\mathrm{ij}}{\partial x_\mathrm{k}} = - \tau^\mathrm{t}_\mathrm{ik} \cdot \frac{\partial \overline{u}_\mathrm{j}}{\partial x_\mathrm{k}} - \tau^\mathrm{t}_\mathrm{jk} \cdot \frac{\partial \overline{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{k}} - \varepsilon_\mathrm{ij} + \Pi_\mathrm{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\mathrm{k}} \left(\nu \cdot \frac{\partial \tau^\mathrm{t}_\mathrm{ij}}{\partial x_\mathrm{k}} + C_\mathrm{ijk} \right)\,. \quad (6.138)$$

Es handelt sich um neun Gleichungen für alle Kombinationen der Indices i und j, wobei aufgrund der Symmetrie nur sechs Gleichungen voneinander verschieden sind. Die durchgeführten mathematischen Operationen werden als die Bildung des zweiten Moments der Navier-Stokes Gleichungen bezeichnet. Deshalb heißen Reynolds-Spannungs-Transportgleichungsmodelle auch *Schließungen zweiter Ordnung*.

Neben den Zweifachprodukten, die als Reynolds-Spannungen identifiziert sind, treten zusätzliche Terme auf, der Dissipationstensor:

$$\varepsilon_\mathrm{ij} = 2 \cdot \mu \cdot \overline{\frac{\partial u'_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{k}} \cdot \frac{\partial u'_\mathrm{j}}{\partial x_\mathrm{k}}}\,, \quad (6.139)$$

die Druck-Scher-Korrelation oder Druckdilatation:

$$\Pi_\mathrm{ij} = \overline{p' \cdot \left(\frac{\partial u'_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} + \frac{\partial u'_\mathrm{j}}{\partial x_\mathrm{i}} \right)} \quad (6.140)$$

und die turbulente Diffusions-Korrelation:

$$C_\mathrm{ijk} = \rho \cdot \overline{u'_\mathrm{i} \cdot u'_\mathrm{j} \cdot u'_\mathrm{k}} + \overline{p' \cdot u'_\mathrm{i}} \cdot \delta_\mathrm{jk} + \overline{p' \cdot u'_\mathrm{j}} \cdot \delta_\mathrm{ik}\,, \quad (6.141)$$

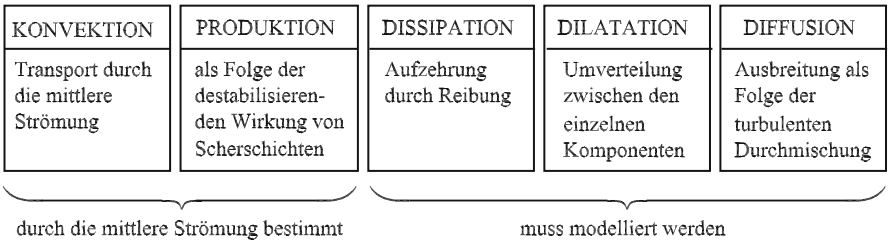


Abb. 6.12 Interpretation der Transportgleichungen für die Reynolds-Spannungen

die aus der turbulenten Diffusion und der Druckdiffusion besteht.

Auf der linken Seite der Transportgleichung erscheint die Konvektion der Reynolds-Spannungen mit der mittleren Strömung (Abb. 6.12). Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite

$$P_{ij} = -\tau_{ik}^{t} \cdot \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk}^{t} \cdot \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \tag{6.142}$$

sind Quellterme und stellen die Produktion d. h. die anfachende oder dämpfende Wirkung der mittleren Strömung auf die einzelnen Reynolds-Spannungen dar. Diese Terme können positiv oder negativ sein. Der Term ε_{ij} bedeutet die turbulente Dissipation, also Aufzehrung der Turbulenz. Im Gegensatz zu den meisten laminaren Strömungen muss die Dissipation als Folge der Schwankungsbewegungen in turbulenten Strömungen berücksichtigt werden. Diese beiden Terme erscheinen auch in der K-Gleichung.

Die Druckdilatation Π_{ij} nach Gl. (6.140) ist die Wechselwirkung der Druck- mit den Geschwindigkeitsschwankungen. Dieser Term war bei der Ableitung der K-Gleichung herausgefallen. Er ist daher nicht als Quelle oder Senke der Turbulenz zu interpretieren, sondern beschreibt nur eine Umverteilung der Reynolds-Spannungen untereinander. Diese Umverteilung kann dazu führen, dass bestimmte Reynolds-Spannungen auf Kosten anderer anwachsen oder unter Verstärkung anderer abklingen. Nur in Strömungen mit homogener Turbulenz findet keine Umverteilung statt.

Der letzte Term auf der rechten Seite von Gl. (6.138) besteht aus der Diffusion der Reynolds-Spannungen aufgrund der molekularen Zähigkeit sowie aus einem Term C_{ijk}, der auch Dreifachprodukte enthält. Dieser Term beschreibt die Diffusion der Reynolds-Spannungen aufgrund der turbulenten Durchmischung und kann in die so genannte turbulente Diffusion und die Druckdiffusion aufgeteilt werden.

Es geht nun darum, die unbekannten Terme der Gl. (6.139), (6.140) und (6.141) zu modellieren. Die Dissipation und die Diffusion kennen wir bereits aus der K-Gleichung. Der Unterschied besteht darin, dass diese Größen jetzt für jede Reynolds-Spannung getrennt formuliert werden müssen.

Dagegen ist die Druck-Scher-Korrelation neu. Man kann aus diesem Term den Druck eliminieren und zeigen, dass er bezüglich der Geschwindigkeiten aus zwei

Anteilen besteht. Einem Anteil $(\Pi_{ij})_1$, der nur die Schwankungsgeschwindigkeiten enthält und einem Anteil $(\Pi_{ij})_2$, der sowohl die Schwankungen als auch die mittlere Scherung enthält.

Der erste (langsame) Anteil, der von der mittleren Strömung unabhängig ist, kann mit dem Ansatz

$$(\Pi_{ij})_1 = -C_1 \cdot \frac{\varepsilon}{K} \cdot \left(\tau_{ij}^t - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot K \right), \qquad C_1 = 1,4 \tag{6.143}$$

modelliert werden, wobei C_1 eine Modellkonstante ist und ε/K den Kehrwert einer charakteristischen Abklingzeit der Turbulenz darstellt, welche für die Druckdilatation charakteristisch ist. K und ε sind in bekannter Weise definiert. Die Vorzeichen sind so gewählt, dass der Term stets eine Rückkehr zur Isotropie bewirkt. Dies bedeutet also, dass für die Turbulenz angenommen wird, dass eine einmal vorhandene Abweichung vom isotropen Zustand abnimmt und die Turbulenz langsam isotrop wird, wenn man sie sich selbst überlässt. Dies stimmt mit Beobachtungen fernab fester Wände gut überein.

Der zweite (schnelle) Anteil hängt von der mittleren Strömung ab und muss in Abhängigkeit von dieser modelliert werden z. B. durch

$$(\Pi_{ij})_2 = -C_2 \cdot \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \cdot P_k \cdot \delta_{ij} \right), \qquad C_2 = 0,6, \tag{6.144}$$

P_{ij} dem Produktionstensor nach Gl. (6.142) und P_k dem Produktionsterm der turbulenten kinetischen Energie. Die Umverteilung wird also in Abhängigkeit von der Produktion der Reynolds-Spannungen modelliert. Insbesondere in der Nähe einer Wand überwiegt dieser Einfluss der mittleren Strömung.

Von Grenzschichtströmungen ist bekannt, dass die Reynolds-Normalspannungen in Stromabrichtung etwa doppelt so groß sind wie in Wandnormalenrichtung, während die Normalspannung in Querrichtung etwa dazwischen liegt. Dies liegt darin begründet, dass die Wand die Normalkomponente der Schwankungen am Stärksten behindert. Transportvorgänge spielen in Wandnähe nur eine untergeordnete Rolle, daher kann diese Anisotropie durch Modifikation der Druck-Scher-Korrelation in Wandnähe der Turbulenz aufgeprägt werden z. B. durch den Wandeinflussterm:

$$(\Pi_{ij})_2^w = \left[0,125 \cdot \frac{\varepsilon}{K} \cdot \left(\overline{u_i \cdot u_j} - \frac{2}{3} \cdot K \cdot \delta_{ij} \right) + 0,015 \cdot (P_{ij} - D_{ij}) \right] \cdot f(z) \tag{6.145}$$

mit

$$D_{ij} = -\tau_{ik}^t \cdot \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_j} - \tau_{jk}^t \cdot \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i}, \tag{6.146}$$

wobei $f(z)$ eine Funktion des Wandabstandes z ist (Gewichtsfunktion), die von einem Wandwert 1 nach außen hin abklingt. Der Klammerausdruck ist so konstru-

iert, dass in Wandnähe die nichtisotrope Turbulenz, wie sie aus Messungen bekannt ist, reproduziert wird.

Die turbulente Diffusion und die Druckdiffusion der Reynolds-Spannungen lauten:

$$\frac{\partial C_{\mathrm{ijk}}}{\partial x_{\mathrm{k}}} = \frac{\partial(\rho \cdot \overline{u_{\mathrm{i}}' \cdot u_{\mathrm{j}}' \cdot u_{\mathrm{k}}'})}{\partial x_{\mathrm{k}}} + \frac{\partial(\overline{p' \cdot u_{\mathrm{i}}'} \cdot \delta_{\mathrm{jk}} + \overline{p' \cdot u_{\mathrm{j}}'} \cdot \delta_{\mathrm{ik}})}{\partial x_{\mathrm{k}}} \,. \tag{6.147}$$

Möglichkeiten zur Modellierung des zweiten Druckdiffusionsterms sind kaum bekannt. Dieser Term wird daher meist vernachlässigt. Der erste Term besteht aus einer Tripelkorrelation, wobei über den Index k summiert wird. Er lässt sich auf mehrere Arten modellieren, z. B. nach Shir (1973):

$$\rho \cdot \overline{u_{\mathrm{i}}' \cdot u_{\mathrm{j}}' \cdot u_{\mathrm{k}}'} = -\mathrm{C_s} \cdot \frac{K^2}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \overline{u_{\mathrm{i}} \cdot u_{\mathrm{j}}}}{\partial x_{\mathrm{k}}} \,, \tag{6.148}$$

nach Daly, F. H. Harlow (1970):

$$\rho \cdot \overline{u_{\mathrm{i}}' \cdot u_{\mathrm{j}}' \cdot u_{\mathrm{k}}'} = -\mathrm{C_s} \cdot \frac{K}{\varepsilon} \cdot \overline{u_{\mathrm{k}} \cdot u_{\mathrm{l}}} \cdot \frac{\partial \overline{u_{\mathrm{i}} \cdot u_{\mathrm{j}}}}{\partial x_{\mathrm{l}}} \tag{6.149}$$

oder nach Mellor und Herring (1973):

$$\rho \cdot \overline{u_{\mathrm{i}}' \cdot u_{\mathrm{j}}' \cdot u_{\mathrm{k}}'} = -\mathrm{C_s} \cdot \frac{K^2}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial \overline{u_{\mathrm{j}} \cdot u_{\mathrm{k}}}}{\partial x_{\mathrm{i}}} + \frac{\partial \overline{u_{\mathrm{k}} \cdot u_{\mathrm{i}}}}{\partial x_{\mathrm{j}}} + \frac{\partial \overline{u_{\mathrm{i}} \cdot u_{\mathrm{j}}}}{\partial x_{\mathrm{k}}} \right) , \tag{6.150}$$

wobei $\mathrm{C_s}$ wieder eine Modellkonstante und K/ε die Zeitskala der turbulenten Diffusion darstellt. Die turbulente Diffusion ist damit wieder auf die Reynolds-Spannungen selbst zurückgeführt. Das Modell von Shir (1973) ist dem Ansatz für das K-ε-Modell äquivalent. Von diesen Alternativen hat sich bisher keine durchsetzen können.

Während durch die Modellierung aller Reynolds-Spannungen die Richtungsabhängigkeit der Turbulenz als wichtige Eigenschaft modelliert wird, ist für die Dissipation die Annahme isotroper Turbulenz durchaus noch sinnvoll. Dies stimmt mit der Vorstellung überein, dass beim Zerfall der großen Strukturen in kleinere die Richtungsabhängigkeit verloren geht. Die Modellierung des Dissipationstensors mit Hilfe der skalaren Dissipation ergibt:

$$\varepsilon_{\mathrm{ij}} = \frac{2}{3} \cdot \delta_{\mathrm{ij}} \cdot \varepsilon \,. \tag{6.151}$$

Ein solches Modell bezeichnet man als τ-ε-*Modell*. Zur Berechnung von ε kann dieselbe Transportgleichung (6.132) herangezogen werden wie beim K-ε-Modell.

Jede Reynolds-Spannung wird in Abhängigkeit der mittleren Strömung getrennt erzeugt und durch Konvektion transportiert. Transport durch Diffusion spielt bei hohen Reynolds-Zahlen nur eine untergeordnete Rolle. Dissipiert werden aber

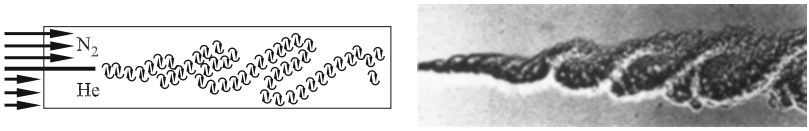
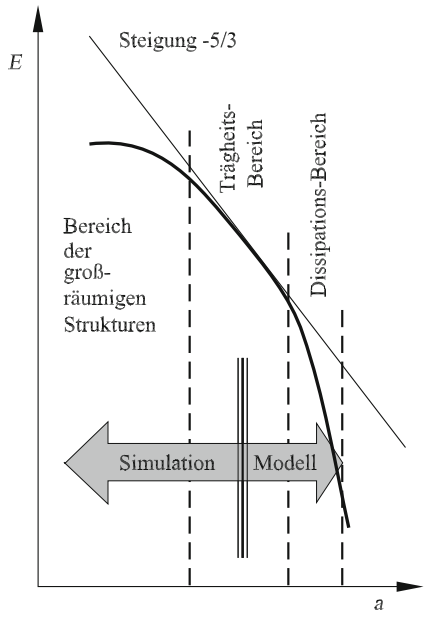


Abb. 6.13 Aufteilung der Turbulenz in großräumige und feinskalige Strukturen am Beispiel der Mischungsschicht, Roshko (1976)

Abb. 6.14 Energiespektrum der Turbulenz



nur die Normalspannungen, so dass die Scherspannungen vorwiegend durch Umverteilung reduziert werden. Der Druck-Scher-Korrelation kommt bei Reynolds-Spannungsmodellen eine besondere Bedeutung zu, so dass sich unterschiedliche Transportgleichungs-Reynolds-Spannungsmodelle vor allem in diesem Term unterscheiden. Weitere Varianten ergeben sich durch die Modellierung von Mechanismen, welche gerade diese Umverteilung und damit die Abweichung von der Isotropie bewirken z. B. der Einfluss einer Wand bei einer dreidimensionalen Strömung.

Grobstruktursimulation und Feinstrukturmodelle

Unterteilt man die turbulenten Strukturen von Strömungen hoher Reynolds-Zahlen in zwei Anteile, die großräumigen und die feinskaligen, so kommt man zu einer anderen Modellierung (siehe Abb. 6.13). Die großräumigen Strukturen einer turbulenten Strömung werden in ihrer zeitlichen und räumlichen Entwicklung direkt berechnet und nur die feinskaligen Strukturen werden modelliert. Diese Methode wird als *Grobstruktursimulation* (Large-Eddy-Simulation LES) bezeichnet.

Ein typisches logarithmisches Energie-Turbulenzspektrum E bei hohen Reynolds-Zahlen ist in Abb. 6.14 logarithmisch dargestellt. Es wird in verschiedene Bereiche unterteilt. Der Bereich niedriger Frequenzen f oder Wellenzahlen a wird durch die großräumigen energietragenden Wirbel hervorgerufen. Hier findet die Erzeugung der Turbulenz statt. Diese Strukturen beinhalten auch die stärkste Anisotropie, da sie im Stadium ihrer Entstehung eng mit der Geometrie des Strömungsgebietes verbunden sind. Diese Strukturen werden bei der Grobstruktursimulation direkt, also ohne Modell, berechnet.

Der Bereich mittlerer Frequenzen oder Wellenzahlen wird als der Trägheitsbereich bezeichnet. Hier findet der weitere Zerfall in immer kleinere Strukturen statt. Man kann zeigen, dass dafür die nichtlinearen Trägheitsterme verantwortlich sind. Die Reibung ist dabei von untergeordneter Bedeutung. Während des Zerfalls wird die Turbulenz mehr und mehr isotrop und die Geometrie des Strömungsgebietes tritt in den Hintergrund. Die Theorie isotroper Turbulenz nach Kolmogorov besagt, dass die Energie E mit der Wellenzahl a wie $E \sim a^{-5/3}$ abnimmt. Dies ist für zahlreiche Strömungen experimentell bestätigt worden. Der Trägheitsbereich ist umso ausgedehnter, je höher die Reynolds-Zahl ist. In diesem Bereich befindet sich die Grenze zwischen großräumigen und feinskaligen Strukturen im Sinne einer Grobstruktursimulation.

Im Bereich hoher Frequenzen bzw. Wellenzahlen geht der Trägheitsbereich allmählich in den Dissipationsbereich über, in dem der Abfall der Energie mit der Wellenzahl entsprechend $E \sim a^{-7/3}$ vom Betrag her zunimmt. Hier setzt sich der Zerfall fort. Zusätzlich spielt die turbulente Dissipation eine Rolle, da mit abnehmender Wirbelgröße die Reibungseinflüsse gegenüber den Trägheitseinflüssen mehr und mehr hervortreten. Dieser Größenbereich wird hinsichtlich seiner Auswirkungen auf die großräumigen Strukturen mit Hilfe eines Feinstruktur-Turbulenzmodells modelliert.

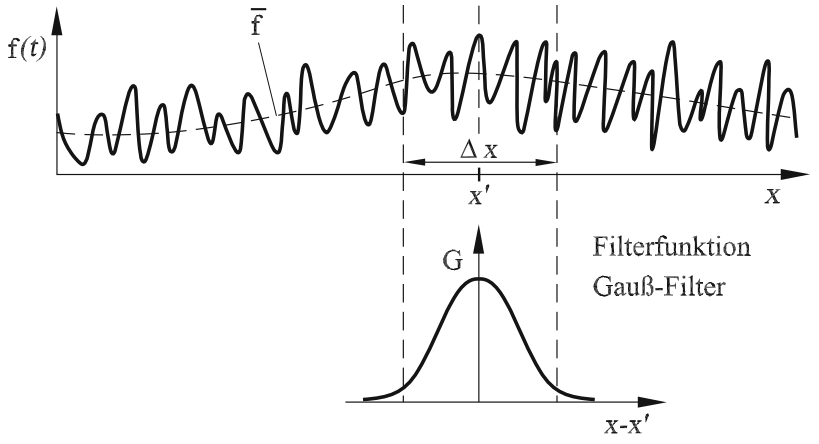


Abb. 6.15 Filterung einer Strömungsgröße

Für die Beschreibung der Methode betrachtet man in Abb. 6.15 die räumliche Verteilung eines Messsignals entlang einer Koordinate x. Die Skizze lässt erkennen, dass sowohl großräumige als auch feinskalige Strukturen vorhanden sind. Zur Trennung dieser nehmen wir eine mathematische Filterung vor. Diese bedeutet, dass an jeder Stelle x die Strömungsgröße f mit einer Filterfunktion $\mathrm{G}(x')$ multipliziert und anschließend über Δx integriert wird:

$$\bar{\mathrm{f}}(x,t) = \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \mathrm{f}(x - x', t) \cdot \mathrm{G}(x - x') \cdot \mathrm{d}x' \,. \tag{6.152}$$

Dabei ist x' die zugehörige Integrationsvariable. Das gefilterte Signal entspricht der gestrichelten Linie. Es handelt sich nicht um eine stationäre Größe, wie bei der Reynolds-Mittelung, sondern der gefilterte Wert ist selbst eine Funktion der Zeit. Die feinskaligen Schwankungen wurden jedoch herausgefiltert. Es sind unterschiedliche Filterfunktionen vorgeschlagen worden, von denen hier der Gauß-Filter betrachtet wird. Andere Filterfunktionen führen auf entsprechende Ergebnisse. Die Filterung wird in allen drei Raumrichtungen vorgenommen. Der Unterschied zur Mittelung besteht darin, dass vor der Integration mit der Filterfunktion multipliziert wird.

Wie bei der Reynolds-Mittelung wird jede lokale Strömungsgröße als Summe von gefiltertem Wert und Schwankungswert aufgefasst. Zum Beispiel erhält man für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$u_{\mathrm{m}}(x,t) = \overline{u}_{\mathrm{m}}(x,t) + u'_{\mathrm{m}}(x,t) \,, \tag{6.153}$$

wobei der gefilterte Wert überstrichen dargestellt ist. Im Unterschied zur Mittelung verschwindet die gefilterte Fluktuation nicht:

$$\overline{u'}_{\mathrm{m}} \neq 0 \,. \tag{6.154}$$

Unter Beachtung dieses Unterschieds, kann die Herleitung der Grundgleichungen der Grobstruktursimulation nun analog zur Herleitung der Reynolds-Gleichungen, z. B. für die inkompressible Strömung mit Wärmeübertragung durchgeführt werden. Der Mittelungsoperator hat die Bedeutung der Filterung. Es ergibt sich die gefilterte Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \overline{u}_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{i}}} = 0 \,, \tag{6.155}$$

die gefilterten Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \overline{u}_{\mathrm{i}}}{\partial t} + \frac{\partial \left(\overline{u}_{\mathrm{j}} \cdot \overline{u}_{\mathrm{i}} \right)}{\partial x_{\mathrm{j}}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_{\mathrm{i}}} +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mathrm{j}}\left[\mu\cdot\left(\frac{\partial\overline{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}}+\frac{\partial\overline{u}_\mathrm{j}}{\partial x_\mathrm{i}}\right)-\rho\cdot\left(\overline{u'_\mathrm{i}\cdot u'_\mathrm{j}}+\overline{\overline{u}_\mathrm{i}\cdot u'_\mathrm{j}}+\overline{u'_\mathrm{i}\cdot\overline{u}_\mathrm{j}}\right)\right] \tag{6.156}$$

und die gefilterte Energiegleichung:

$$\rho\cdot c\cdot\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}+\frac{\partial\left(\overline{u}_\mathrm{j}\cdot\overline{T}\right)}{\partial x_\mathrm{j}}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\mathrm{j}}\left[\lambda\cdot\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_\mathrm{j}}-\rho\cdot\left(\overline{u'_\mathrm{j}\cdot T'}+\overline{\overline{u}_\mathrm{j}\cdot T'}+\overline{u'_\mathrm{j}\cdot\overline{T}}\right)\right]. \tag{6.157}$$

Diese Gleichungen sind den Reynolds-Gleichungen formal ähnlich. Es treten jedoch die Feinstruktur-Spannungen als zusätzliche Terme auf:

$$-\rho\cdot\overline{u'_\mathrm{i}\cdot u'_\mathrm{j}}\,. \tag{6.158}$$

Die Zusatzterme der Energiegleichung sind die Feinstruktur-Wärmeströme:

$$-\rho\cdot\overline{u'_\mathrm{i}\cdot T'}\,, \tag{6.159}$$

welche die Wirkung der Feinstruktur-Turbulenz auf die gefilterte Strömung (Grobstruktur) repräsentieren. Diese Größen sind unbekannt und müssen durch ein Feinstruktur-Turbulenzmodell modelliert werden.

Weitere Terme, die so genannten Cross-Terme,

$$-\rho\cdot\left(\overline{\overline{u}_\mathrm{i}\cdot u'_\mathrm{j}}+\overline{u'_\mathrm{i}\cdot\overline{u}_\mathrm{j}}\right)\quad\text{und}\qquad-\rho\cdot\left(\overline{\overline{u}_\mathrm{j}\cdot T'}+\overline{u'_\mathrm{j}\cdot\overline{T}}\right) \tag{6.160}$$

sind ebenfalls unbekannt. Diese Größen werden in den meisten Grobstruktur-Simulationen vernachlässigt. Das verbleibende Gleichungssystem bei Vernachlässigung der Cross-Terme entspricht somit formal den Reynolds-Gleichungen.

Das einfachste *Feinstrukturmodell* ist das *Smagorinski-Modell*. Hier werden die Feinstruktur-Spannungen mit Hilfe der Feinstruktur-Wirbelviskosität modelliert:

$$\overline{u'_\mathrm{i}\cdot u'_\mathrm{j}}=\nu_\mathrm{SGS}\cdot 2\cdot S_\mathrm{ij}=\nu_\mathrm{SGS}\cdot\left(\frac{\partial\overline{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}}+\frac{\partial\overline{u}_\mathrm{j}}{\partial x_\mathrm{i}}\right). \tag{6.161}$$

Entsprechendes gilt für die Wärmeströme:

$$\overline{u'_\mathrm{i}\cdot T'}=a_\mathrm{SGS}\cdot\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_\mathrm{i}}\,,\qquad Pr_\mathrm{SGS}\cdot\frac{\nu_\mathrm{SGS}}{a_\mathrm{SGS}}\approx 0,4\,. \tag{6.162}$$

Die Wirbelviskosität wird algebraisch aus der Feinstrukturscherung ermittelt

$$\nu_\mathrm{SGS}=(\mathrm{C_s}\cdot h)^2\cdot\sqrt{S_\mathrm{ij}\cdot S_\mathrm{ij}}\,,\qquad h=\sqrt[3]{\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z}\,. \tag{6.163}$$

Darin ist $\mathrm{C_s}=0,17$ die Smagorinski-Konstante und h ein Maß für die Gitterweite eines strukturierten numerischen Netzes. Es wird angenommen, dass alle nicht

durch das numerische Gitter aufgelösten Strukturen (Größen der Subgitterskala, Index SGS) modelliert werden müssen.

Der theoretische Wert für die Smagorinski-Konstante hat sich in der Praxis nicht als universell einsetzbar erwiesen. Vielmehr zeigte sich, dass der Wert dieser Modellkonstante von Strömung zu Strömung stark variieren kann, so dass seine geeignete Wahl ein Problem darstellt. Daher wurden andere Modelle vorgeschlagen, in denen dieser Parameter an das jeweilige Turbulenzfeld angepasst wird (dynamisches Modell). Es sind auch Feinstruktur-Transportgleichungsmodelle formuliert worden.

Eine Einführung in die Theorie der Grobstruktursimulation wird in dem Buch von Sagaut (2006) gegeben.

4.6 Mehrphasenströmungen

Für Mehrphasenströmungen, die im Detail in Kap. 9 ▸ Strömungen mit mehreren Phasen behandelt werden, werden die Erhaltungsgleichungen für jede einzelne Phase k formuliert. In einer Eulerschen Betrachtungsweise genügt jede Größe Ψ_k, die mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}_\mathrm{k}$ transportiert wird, der folgenden Erhaltungsgleichung:

$$\frac{\partial(\rho_\mathrm{k}\cdot\Psi_\mathrm{k})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{k}\cdot\Psi_\mathrm{k})=\rho_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{f}_\mathrm{k}+\nabla\boldsymbol{j}_\mathrm{k}\,. \tag{6.164}$$

Die zeitliche Änderung einer volumenspezifischen Erhaltungsgröße $\rho_\mathrm{k}\cdot\Psi_\mathrm{k}$ mit dem konvektiven Fluss $\rho_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{k}\cdot\Psi_\mathrm{k}$ wird durch eine volumenspezifische Quelle oder Senke $\rho_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{f}_\mathrm{k}$ und die dissipativen Flüsse $\boldsymbol{j}_\mathrm{k}$ bestimmt. Die Bedeutung von $\boldsymbol{f}_\mathrm{k}$ und $\boldsymbol{j}_\mathrm{k}$ in Gl. (6.164) ist für die Erhaltungsgrößen $\rho_\mathrm{k}\cdot\Psi_\mathrm{k}$ der Masse, Impuls und Energie im Folgenden aufgeführt:

Φ_k	Bilanzgröße Ψ_k	Quelle/Senke $\boldsymbol{f}_\mathrm{k}$	Fluss $\boldsymbol{j}_\mathrm{k}$	Sprung $\boldsymbol{M}_\mathrm{i}$
Masse	1	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	0
Impuls	$\boldsymbol{u}_\mathrm{k}$	$\boldsymbol{g}$	$\boldsymbol{T}_\mathrm{k}=-p_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\tau}_\mathrm{k}$	$\boldsymbol{m}_\mathrm{i}^{\sigma}$
Energie	$E_\mathrm{k}=e_\mathrm{k}+\frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{k}^2$	$\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{k}+Q_\mathrm{k}$	$\boldsymbol{q}_\mathrm{k}=(-p_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\tau}_\mathrm{k})\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{k}+\boldsymbol{q}_\mathrm{wk}$	$\gamma_\mathrm{i}^{\sigma}$

Hier ist $\boldsymbol{g}$ der Gravitationsvektor, $\boldsymbol{I}$ der Einheitstensor, p_k der hydrodynamische Druck, $\boldsymbol{\tau}_\mathrm{k}$ der Schubspannungstensor, Q_k eine Volumenwärmequelle und $\boldsymbol{q}_\mathrm{k}$ und $\boldsymbol{q}_\mathrm{wk}$ sind Energie- bzw. Wärmeflüsse.

Zusätzlich zu den üblichen Bedingungen an den Rändern des Mehrphasen-Strömungsbereiches ergeben sich weitere Bedingungen an den Grenzflächen zwischen den einzelnen Phasen in Form von Unstetigkeits- oder Sprungbeziehungen zwischen spezifischen Phaseneigenschaften. So müssen die Phasenflüsse an den Grenzflächen folgenden Sprungbedingungen genügen:

$$([(\rho_\mathrm{k} \cdot \Psi_\mathrm{k}) \cdot (\boldsymbol{u}_\mathrm{k} - \boldsymbol{v}_\mathrm{i}) - \boldsymbol{j}_\mathrm{k})] \cdot \boldsymbol{n}_\mathrm{k}) = \boldsymbol{M}_\mathrm{i} \,. \tag{6.165}$$

Dabei bedeutet $\boldsymbol{M}_\mathrm{i}$ den Sprung, den die Bilanzgröße auf der linken Seite der Gleichung an der Phasengrenzfläche vollzieht. $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ bezeichnet die lokale Geschwindigkeit eines Punktes der Grenzfläche, $\boldsymbol{n}_\mathrm{k}$ ist der Normaleneinheitsvektor auf die Grenzfläche. Der Sprung $\boldsymbol{M}_\mathrm{i}$ hängt von der lokalen Deformation der Grenzfläche und der flüssigkeitsspezifischen Grenzflächenspannung σ ab. Die Terme $\boldsymbol{m}_\mathrm{i}^\sigma$ und γ_i^σ bezeichnen die spezifischen Sprünge von Impuls und Energie.

Die analytische Behandlung der Mehrphasenströmung erfordert die Einführung gemittelter Zustandsgrößen. Im Sinne einer allgemeingültigen statistischen Betrachtung ist eine Ensemble-Mittelung zweckmäßig. In der Strömungsmechanik werden aus messtechnischen Erwägungen aber zeitliche, räumliche oder raum-zeitliche Mittelungsprozesse bei der Modellierung komplexer Strömungen eingeführt. Sie ersetzen im Folgenden die Ensemble-Mittelung bei Strömungen deren Zustände in Zeit und Raum statistisch unabhängig sind und deren Mittelungsintervalle gegen ∞ streben. Diese Voraussetzung ist im Allgemeinen nicht erfüllt. Deshalb muss der Approximationsgrad von Fall zu Fall überprüft werden.

Indem man eine Gewichtsfunktion $X_\mathrm{k}(\boldsymbol{x}, t)$ für jede einzelne Phase einführt, lässt sich der raum-zeitliche Mittelwert einer Größe Φ_k in der Phase k wie folgt definieren:

$$\overline{\Phi_\mathrm{k}(\boldsymbol{x}, t)}^\mathrm{k} = \frac{\dfrac{1}{V} \cdot \displaystyle\int_V \left(\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} \mathrm{X_k} \cdot \Phi_\mathrm{k} \cdot \mathrm{d}t \right) \cdot \mathrm{d}V}{\dfrac{1}{V} \cdot \displaystyle\int_V \left(\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} \mathrm{X_k} \cdot \mathrm{d}t \right) \cdot \mathrm{d}V} \,. \tag{6.166}$$

Dabei wird die Integration über ein Kontrollvolumen V ausgeführt, das klein im Vergleich zum Gesamtströmungsbereich ist und über ein Zeitintervall Δt, das klein im Vergleich zur Gesamtzeit des betrachteten Strömungsvorgangs ist. Die Längen- und Zeitskalen für die Mittelung sind entsprechend der zu beschreibenden Strömungsphänomene zu wählen. Bei Mehrphasenströmungen ist es schwierig, Mittelwerte für jede Phase an einer bestimmten Position festzulegen, da verschiedene Phasen in unterschiedlichen Strömungszuständen an der gleichen Position zu verschiedenen Zeiten auftreten können. Mehrphasenströmungen sind im Allgemeinen in hohem Maße instationär. Es ist daher zweckmäßig, eine Phasenindikatorfunktion in Form einer Heaviside-Funktion einzuführen:

$$X_\mathrm{k}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{cases} 1 \;\; ; & x \in V_\mathrm{k} \,, \quad t \in t_\mathrm{k} \subset \Delta t \\ 0 \;\; ; & x \notin V_\mathrm{k} \,, \quad t \notin t_\mathrm{k} \subset \Delta t \end{cases} \,. \tag{6.167}$$

Insbesondere lässt sich eine Volumenfraktion ε_k der Phase k durch den raum-zeitlichen Mittelwert der Phasenindikatorfunktion als

$$\varepsilon_\mathrm{k} = \overline{X}^\mathrm{k}_\mathrm{k} = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_V \frac{1}{\Delta t} \cdot \int\limits_0^{\Delta t} \mathrm{X}_\mathrm{k} \cdot \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}V \tag{6.168}$$

definieren. Für turbulente Mehrphasenströmungen mit den spezifischen Turbulenzzeitskalen wird häufig aus praktischen Erwägungen eine sequenziell aufeinander folgende räumliche und zeitliche Mittelung angewandt.

Die allgemeine Form der Erhaltungsgleichung für die gemittelten Zustandsfunktionen wird hergeleitet, indem die Erhaltungsgleichung (6.164) mit der Phasenindikatorfunktion gliedweise multipliziert und anschließend eine Mittellungsprozedur entsprechend der Definitionsbeziehung (6.166) vorgenommen wird. Dabei sind Transformationsgesetze zwischen Volumen- und Flächenintegralen anzuwenden, die als Leibnitz- und Gauß-Beziehungen bekannt sind. Die gemittelte Erhaltungsgleichung (6.164) kann so in die folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\overline{X \cdot \rho_\mathrm{k} \cdot \Psi_\mathrm{k}}^\mathrm{k})}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{X \cdot \rho_\mathrm{k} \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{k} \cdot \Psi_\mathrm{k}}^\mathrm{k}) - \overline{\frac{1}{V} \cdot \int\limits_{A_\mathrm{i}} \rho_\mathrm{k} \cdot \Psi_\mathrm{k} \cdot ((\boldsymbol{v}_\mathrm{i} - \boldsymbol{u}_\mathrm{k}) \cdot \boldsymbol{n}_\mathrm{k}) \cdot \mathrm{d}S}^{\Delta t} \\
&\quad - \overline{\frac{1}{V} \cdot \int\limits_{A_\mathrm{wk}} \rho_\mathrm{k} \cdot \Psi_\mathrm{k} \cdot ((\boldsymbol{v}_\mathrm{i} - \boldsymbol{u}_\mathrm{k}) \cdot \boldsymbol{n}_\mathrm{k}) \cdot \mathrm{d}S}^{\Delta t} \\
&\quad = \overline{X \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{k}}^\mathrm{k} + \nabla \cdot \overline{X \cdot \boldsymbol{j}_\mathrm{k}}^\mathrm{k} - \overline{\frac{1}{V} \cdot \int\limits_{A_\mathrm{i}+A_\mathrm{wk}} (\boldsymbol{j}_\mathrm{k} \cdot \boldsymbol{n}_\mathrm{k}) \cdot \mathrm{d}S}^{\Delta t} .
\end{aligned} \tag{6.169}$$

Hier bezeichnen die Querstriche mit dem Superskript Δt eine zeitliche Mittelung der Oberflächenintegrale. Die Grenzen des Strömungsbereichs der Phase k besteht aus freien Grenzflächen zwischen den Phasen im Kern der Strömung mit einer instantanen Gesamtfläche A_i und aus flüssig-festen Grenzen zwischen der Phase k und den festen Rändern des gesamten Mehrphasen-Strömungsbereichs mit der instantanen Gesamtfläche A_wk.

Die freien Grenzflächen bewegen sich im Allgemeinen mit einer Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$, die von der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}_\mathrm{k}$ der Phase k verschieden ist. Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}_\mathrm{k}$ verschwindet an festen Wänden. Das zeitgemittelte erste Oberflächenintegral auf der linken Seite der Gl. (6.169) spiegelt daher mit dem Faktor $\boldsymbol{v}_\mathrm{i} - \boldsymbol{u}_\mathrm{k}$ die relative Bewegung der Phase k zur Grenzfläche wieder. Das zweite Oberflächenintegral verschwindet an festen ruhenden Wänden. Die rechte Seite der Gleichung erfasst in der Folge der Terme die phasenspezifische Körperkraft, die phasenspezifische Divergenz der Diffusionsflüsse und die zeitlich gemittelten Diffusionsflüsse über die gesamten Grenzflächen der Phase k, das heißt über die Flächen $A_\mathrm{i} + A_\mathrm{wk}$. Bei einer Mittelung der Sprungbedingungen Gl. (6.165) ist zu beachten, dass sich die Summe der Massenflüsse über alle Grenzflächen A_i gegenseitig aufheben. Für die gemittelten Werte der Grenzflächenspannungen und Grenzflächenenergien bleiben Sprungwerte erhalten.

Es hat sich als zweckmäßig erwiesen für die Mittelung einiger Erhaltungsgrößen anstatt $X_\mathrm{k}(\boldsymbol{x},t)$ als Gewichtsfunktion das Produkt $\rho_\mathrm{k}\cdot X_\mathrm{k}(\boldsymbol{x},t)$ in der Definitionsbeziehung Gl. (6.166) zu verwenden (siehe Drew und Passman (1999)). Das entspricht der massengewichteten Favre-Mittelung, die von der Behandlung turbulenter kompressibler Strömungen bekannt ist. Insgesamt hat sich in der einschlägigen Literatur folgender Satz von Definitionen für die Mittelwerte der Zustands- und Konstitutionsgrößen durchgesetzt:

$$\overline{\rho}_\mathrm{k}^\mathrm{k} = \frac{\overline{X_\mathrm{k}\cdot\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k}}{\varepsilon_\mathrm{k}} \qquad \text{Dichte,}$$

$$\overline{\boldsymbol{u}}_\mathrm{k}^{\rho\mathrm{k}} = \frac{\overline{X_\mathrm{k}\cdot\rho_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^\mathrm{k}}{\varepsilon_\mathrm{k}\cdot\overline{\rho}_\mathrm{k}^\mathrm{k}} \qquad \text{Geschwindigkeit,}$$

$$\overline{E}_\mathrm{k}^{\rho\mathrm{k}} = \frac{\overline{X_\mathrm{k}\cdot\rho_\mathrm{k}\cdot E_\mathrm{k}}^\mathrm{k}}{\varepsilon_\mathrm{k}\cdot\overline{\rho}_\mathrm{k}^\mathrm{k}} \qquad \text{Energie,}$$

$$-\overline{p}_\mathrm{k}^\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{\tau}}_\mathrm{k}^\mathrm{k} = \frac{\overline{X_\mathrm{k}\cdot(-p_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\tau}_\mathrm{k})}^\mathrm{k}}{\varepsilon_\mathrm{k}} \qquad \text{Druck und molekulare Schubspannungen,}$$

$$\overline{\boldsymbol{q}}_\mathrm{wk}^\mathrm{k} = \frac{\overline{X_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{q}_\mathrm{wk}}^\mathrm{k}}{\varepsilon_\mathrm{k}} \qquad \text{molekulare Wärmeflussdichte,}$$

$$\overline{Q}_\mathrm{k}^{\rho\mathrm{k}} = \frac{\overline{X_\mathrm{k}\cdot\rho_\mathrm{k}\cdot Q_\mathrm{k}}^\mathrm{k}}{\varepsilon_\mathrm{k}\cdot\overline{\rho}_\mathrm{k}^\mathrm{k}} \qquad \text{Wärmequelldichte.}$$

Mit diesen Definitionen für die Mittelwerte der relevanten Größen lassen sich die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie in der folgenden Form darstellen:

$$\frac{\partial(\varepsilon_\mathrm{k}\cdot\overline{\rho}_\mathrm{k}^\mathrm{k})}{\partial t}+\nabla\cdot(\varepsilon_\mathrm{k}\cdot\overline{\rho}_\mathrm{k}^\mathrm{k}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}_\mathrm{k}^{\rho\mathrm{k}}) = \Gamma_\mathrm{k}\,, \tag{6.170}$$

$$\frac{\partial(\varepsilon_\mathrm{k}\cdot\overline{\rho}_\mathrm{k}^\mathrm{k}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}_\mathrm{k}^{\rho\mathrm{k}})}{\partial t}+\nabla\cdot(\varepsilon_\mathrm{k}\cdot(\overline{\rho_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^\mathrm{k}+\overline{p}_\mathrm{k}^\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{\tau}}_\mathrm{k}^\mathrm{k})) = \varepsilon_\mathrm{k}\cdot\overline{\rho}_\mathrm{k}^\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{g}+\boldsymbol{M}_\mathrm{k}+\overline{\boldsymbol{u}_\mathrm{ik}\cdot\Gamma_\mathrm{k}}^\mathrm{k}\,, \tag{6.171}$$

$$\frac{\partial(\varepsilon_\mathrm{k}\cdot\overline{\rho}_\mathrm{k}^\mathrm{k}\cdot\overline{E}_\mathrm{k}^{\rho\mathrm{k}})}{\partial t}+\nabla\cdot(\varepsilon_\mathrm{k}\cdot(\overline{\rho_\mathrm{k}\cdot E_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^\mathrm{k}+\overline{p_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^\mathrm{k}-\overline{\boldsymbol{\tau}_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^\mathrm{k}+\overline{\boldsymbol{q}}_\mathrm{wk}^\mathrm{k})) = \varepsilon_\mathrm{k}\cdot\overline{\rho}_\mathrm{k}^\mathrm{k}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}_\mathrm{k}^{\rho\mathrm{k}}\cdot\boldsymbol{g}+\varepsilon_\mathrm{k}\cdot\overline{\rho}_\mathrm{k}^\mathrm{k}\cdot\overline{Q}_\mathrm{k}^{\rho\mathrm{k}}+W_\mathrm{k}+F_\mathrm{k}+\overline{E_\mathrm{ik}\cdot\Gamma_\mathrm{k}}^\mathrm{k}\,. \tag{6.172}$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen für Oberflächenintegrale eingeführt:

$$\Gamma_\mathrm{k} = \overline{\frac{1}{V}\cdot\int\limits_{A_\mathrm{i}} \rho_\mathrm{k}\cdot((\boldsymbol{v}_\mathrm{i}-\boldsymbol{u}_\mathrm{k})\cdot\boldsymbol{n}_\mathrm{k})\cdot\mathrm{d}S}^{\Delta t} \qquad \text{Grenzflächen Massenquellen,}$$

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{k} = -\overline{\frac{1}{V}\cdot\int\limits_{A_\mathrm{i}} ((\boldsymbol{\tau}_\mathrm{i}-p_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{n}_\mathrm{k})\cdot\mathrm{d}S}^{\Delta t} \qquad \text{Grenzflächen Impulsquellen,}$$

$$\overline{\boldsymbol{u}_\mathrm{ik}\cdot\Gamma_\mathrm{k}}^{\mathrm{k}} = \overline{\frac{1}{V}\cdot\int\limits_{A_\mathrm{i}} \rho_\mathrm{k}\cdot(\boldsymbol{u}_\mathrm{k}\cdot((\boldsymbol{v}_\mathrm{i}-\boldsymbol{u}_\mathrm{k})\cdot\boldsymbol{n}_\mathrm{k}))\cdot\mathrm{d}S}^{\Delta t} \qquad \text{Grenzflächen Energiequellen,}$$

$$W_\mathrm{k} = -\overline{\frac{1}{V}\cdot\int\limits_{A_\mathrm{i}} (((\boldsymbol{\tau}_\mathrm{i}-p_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{k})\cdot\boldsymbol{n}_\mathrm{k})\cdot\mathrm{d}S}^{\Delta t} \qquad \text{Arbeitsleistung der Grenzflächenspannungen,}$$

$$F_\mathrm{k} = \overline{\frac{1}{V}\cdot\int\limits_{A_\mathrm{i}+A_\mathrm{Wk}} (\boldsymbol{q}_\mathrm{k}\cdot\boldsymbol{n}_\mathrm{k})\cdot\mathrm{d}S}^{\Delta t} \qquad \text{Wärmequellen an Grenz- und Berandungsflächen,}$$

$$\overline{E_\mathrm{ik}\cdot\Gamma_\mathrm{k}}^{\mathrm{k}} = \overline{\frac{1}{V}\cdot\int\limits_{A_\mathrm{i}} \rho_\mathrm{k}\cdot(E_\mathrm{k}\cdot(\boldsymbol{v}_\mathrm{i}-\boldsymbol{u}_\mathrm{k})\cdot\boldsymbol{n}_\mathrm{k})\cdot\mathrm{d}S}^{\Delta t} \qquad \text{Energiequellen an Grenzflächen beim Massentransfer.}$$

Durch eine Mittelung der Sprungbedingungen Gl. (6.165) und unter Verwendung der oben eingeführten Definition gelangt man zu folgendem Satz von notwendigen Beziehungen an Grenzflächen:

$$\begin{aligned} \sum_\mathrm{k}\Gamma_\mathrm{k} &= 0\,, \\ \sum_\mathrm{k}(\boldsymbol{M}_\mathrm{k}+\overline{\boldsymbol{u}_\mathrm{ik}\cdot\Gamma_\mathrm{k}}^{\mathrm{k}}) &= \boldsymbol{m}_\mathrm{i}^{\sigma}\,, \\ \sum_\mathrm{k}(W_\mathrm{k}+F_\mathrm{k}+\overline{E_\mathrm{ik}\cdot\Gamma_\mathrm{k}}^{\mathrm{k}}) &= \gamma_\mathrm{i}^{\sigma}\,. \end{aligned} \tag{6.173}$$

Dabei stellt $\boldsymbol{m}_\mathrm{i}^{\sigma}$ den Sprung der Spannungen und $\gamma_\mathrm{i}^{\sigma}$ den Sprung der Energie an den Grenzflächen dar.

Im Zusammenhang mit der Beschreibung von Austauschprozessen an Phasengrenzen zum Beispiel bei Verdampfungs- und Kondensationsvorgängen in einkomponentigen Systemen hat es sich als zweckmäßig erwiesen, im Rahmen der raum-zeitlichen Mittelung eine Grenzflächenkonzentration durch das Integral

$$a_\mathrm{i} = \overline{\frac{1}{V} \cdot \int\limits_{A_\mathrm{i}} \mathrm{d}S}^{\Delta \mathrm{t}}$$

zu definieren. Lokal gemittelte Austauschflüsse, wie Massen- und Wärmeströme an den Grenzflächen, können dann als Produkt aus Mittelwerten für die Flussdichten und der Grenzflächenkonzentration dargestellt werden. Für makroskalig veränderliche Zwei- oder Mehrphasenströmungen eröffnet diese Betrachtungsweise eine signifikante Vereinfachung bei der Modellierung der lokalen Austauschprozesse. Sie impliziert allerdings, dass auch für die Grenzflächenkonzentration a_i eine Erhaltungsgleichung bereit gestellt und simultan mit den übrigen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie für das jeweilige Problem gelöst wird. Diese hat die Form:

$$\frac{\partial a_\mathrm{i}}{\partial t} + \nabla \cdot (a_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{v}_\mathrm{i}) = \sum_{\mathrm{j}=1}^{4} \Phi_\mathrm{j} + \Phi_\mathrm{ph} + \Phi_\mathrm{n} \,. \tag{6.174}$$

Hier sind $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ die lokal gemittelte Geschwindigkeit der Grenzfläche, Φ_j die Änderungsraten der Grenzflächenkonzentration durch Partikelzerfall und Koaleszenz und Φ_ph die Änderungsrate durch Phasenübergänge. Dabei besteht zwischen der dichtegemittelten Geschwindigkeit der Partikelphase $\boldsymbol{v}_\mathrm{p}$ und der der Grenzflächenkonzentration $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ ein Zusammenhang der von Fall zu Fall zu modellieren ist. Der weitere Quellterm Φ_n repräsentiert mögliche Nukleationsprozesse und Kompressibilitätseffekte einer Gasphase.

Zur Lösung praktischer Probleme müssen die Erhaltungsgleichungen (6.170) bis (6.172) mit der Ergänzungsgleichung (6.174) durch weitere konstitutive Beziehungen für Massen- und Wärmeübergänge an Grenz- und Berandungsflächen ergänzt werden. Dies stellt einen substanziellen Teil der Modellierung von Mehrphasenströmungen dar. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem Schließungsproblem, um die Zahl der zu ermittelnden Zustandsgrößen in Einklang mit den zur Verfügung stehenden Gleichungen zu bringen.

Für hochverdünnte Zweiphasenströmungen bestehend aus einer kontinuierlichen Trägerphase und einer kleinen Beimischung von dispersen Partikeln, wie sie beispielsweise in technischen Sprühsystemen, beim atmosphärischen Aerosoltransport oder in Sandstürmen auftreten, sind spezielle Modelle entwickelt worden. In diesen Modellen wird die Trägerströmung mit Hilfe der Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie in der Eulerschen Formulierung behandelt. Die Bewegung der einzelnen Partikel wird dagegen in Lagrangescher Form durch das Newtonsche Kraftgesetz beschrieben, das die lokale Partikelbeschleunigung zu den Reaktionskräften zwischen Partikel und Trägerphase in Beziehung setzt. Die Trajektorien aller Partikel oder zumindest eines repräsentativen Kollektivs können dann durch eine zweifache Zeitintegration der Partikelbeschleunigung beginnend von einem definierten Ausgangszustand für jedes Einzelpartikel ermittelt werden.

Hier kann auf die Darstellung der Erhaltungsgleichungen für die Trägerphase verzichtet werden, da dieser Aspekt ausführlich für einphasige Strömungen in den Abschn. 1, 2, 3 und 4 diskutiert werden. Sie können naturgemäß auch aus den obigen Erhaltungsgleichungen (6.170), (6.171) und (6.172) durch Vereinfachungen hergeleitet werden. Es wird jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Erhaltungsgleichungen für die Trägerphase um Quellterme zu ergänzen sind, wenn eine Rückwirkung der Partikelbewegung auf die Trägerphase berücksichtigt werden soll, etwa bei höheren Partikelkonzentrationen oder bei einem signifikanten Einfluss der Partikel auf die Turbulenz der Trägerströmung. Maxey und Riley (1983) haben eine Kräftebilanz für ein einzelnes Partikel mit der Masse m_p, dem Durchmesser d_p, dem Volumen V_p und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\mathrm{p}$ an einer Position $x_\mathrm{p}(t)$ in einer Trägerströmung mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}_\mathrm{c}$, der Dichte ρ_c und der Viskosität ν_c in der folgenden Form angegeben:

$$\begin{aligned} m_\mathrm{p} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} = & -V_\mathrm{p} \cdot \nabla p_\mathrm{c} - \frac{1}{2} \cdot \rho_\mathrm{c} \cdot V_\mathrm{p} \cdot C_\mathrm{A} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}_\mathrm{p} - \boldsymbol{u}_\mathrm{c}) \\ & -\frac{1}{2} \cdot \rho_\mathrm{p} \cdot V_\mathrm{p} \cdot C_\mathrm{D} \cdot |\boldsymbol{v}_\mathrm{p} - \boldsymbol{u}_\mathrm{c}| \cdot (\boldsymbol{v}_\mathrm{p} - \boldsymbol{u}_\mathrm{c}) - \rho_\mathrm{c} \cdot V_\mathrm{p} \cdot C_\mathrm{L} \cdot (\boldsymbol{v}_\mathrm{p} - \boldsymbol{u}_\mathrm{c}) \times \boldsymbol{\omega} \\ & -\frac{3}{2} \cdot d_\mathrm{p}^2 \cdot \rho_\mathrm{c} \cdot \sqrt{\nu_\mathrm{c}} \cdot C_\mathrm{H} \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\sqrt{t - t'}} \cdot \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{v}_\mathrm{p} - \boldsymbol{u}_\mathrm{c})}{\mathrm{d}t'} \cdot \mathrm{d}t' + \boldsymbol{F}_\mathrm{i}\,. \end{aligned} \tag{6.175}$$

Hier bezeichnet ∇p_c den lokalen Druckgradienten in der kontinuierlichen Phase und $\boldsymbol{\omega}$ ist eine Wirbelstärke, die sich im Allgemeinen aus der lokalen Wirbelstärke in der kontinuierlichen Phase $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{c} = \nabla \times \boldsymbol{u}_\mathrm{c}$ und einem Anteil von der Eigenrotation des Partikels $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{p}$ zusammensetzt. $\boldsymbol{F}_\mathrm{i}$ sind Potentialkräfte unter der Einwirkung äußerer Kraftfelder wie Gravitationskraft und elektromagnetische Felder. Die physikalische Bedeutung der verschiedenen Terme der Gl. (6.175) ist wie folgt: Der Term auf der linken Gleichungsseite beschreibt die Beschleunigungskraft auf das Partikel. Der erste Term auf der rechten Seite erfasst die Wirkung des Druckgradienten in der Trägerströmung auf das Partikel. Der zweite Term stellt eine Kraft dar, um das Trägerfluid zu verdrängen und die *virtuelle Zusatzmasse* in der unmittelbaren Umgebung des Partikels relativ zur Kernströmung des Kontinuums zu beschleunigen. Diese zusätzliche Masse ist gleich der halben Masse der kontinuierlichen Phase mit dem Volumen des Partikels. Der dritte Term erfasst den Widerstand des Partikels in der Umgebungsströmung infolge seiner Relativgeschwindigkeit. Der vierte Term stellt eine Kraft quer zur Bewegungsrichtung des Partikels dar und wirkt wie eine Auftriebskraft. Wie bereits erwähnt wird sie durch die Wirbelstärke der Trägerströmung und die Eigenrotation des Partikels relativ zur Strömung verursacht. Die Wirkung der letzteren Eigenschaft ist auch als Magnus-Effekt bekannt. Der fünfte Term repräsentiert die sogenannte *Basset-Kraft*. Sie verkörpert die Wirkung der Zähigkeit bei einer Beschleunigung des Partikels gegenüber dem Fluid und erfasst eine relaxierende Kraftwirkung aus der Bewegungsgeschichte des Partikels längs der Trajektorie.

Die Koeffizienten C_A, C_D, C_L und C_H hängen generell von den spezifischen Strömungsbedingungen in der kontinuierlichen Phase und von der Größe des Partikels ab. Das bedeutet, sie sind eine Funktion der Partikel-Reynolds-Zahl $Re_p = |\boldsymbol{v}_p - \boldsymbol{u}_p| \cdot d_p/\nu_c$. Die funktionalen Abhängigkeiten sind auf der Basis strömungsmechanischer Gegebenheiten zu modellieren.

Die Gl. (6.175) für die Bewegung des Einzelpartikels ist naturgemäß erheblichen Einschränkungen unterworfen. Zunächst muss für die verdünnte disperse Phase $\varepsilon_p \ll 1$ gelten. Fernerhin gilt für die Geschwindigkeiten $|\boldsymbol{v}_p - \boldsymbol{u}_c|/|\boldsymbol{u}_c| \ll 1$ und der charakteristische Partikeldurchmesser d_p ist klein im Vergleich zu den Distanzen signifikanter Zustandsvariationen in der kontinuierlichen Phase. Das bedeutet er ist kleiner als die Kolmogorovsche Mikrolänge $d_p < (\nu_c^3/\varepsilon_c)^{1/4}$ mit ε_c als Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie in der kontinuierlichen Phase.

Die Beziehung Gl. (6.175) berücksichtigt ferner keine Kräfte, die auf direkte oder indirekte Wechselwirkung zwischen einzelnen Partikeln zurückzuführen sind. Selbst eine Abhängigkeit von der Partikelkonzentration ε_p fehlt in dieser Beziehung. Demnach können Phänomene wie Clusterbildung von Partikeln, Partikelkoaleszenz oder Partikelzerlegung nicht von dem oben beschriebenen Euler-Lagrange-Modell für eine disperse Zweiphasenströmung erfasst werden.

Um solche gravierenden Mängel zu beseitigen sind fortschrittlichere statistische Modelle in der Entwicklung, die von Verteilungsfunktionen für Gruppen von Partikeln und zugeordneten Transportgleichungen ausgehen. Solche Modelle sind prinzipiell dazu geeignet direkte Partikelkollisionen, Konglomerationen und Zerlegungen zu beschreiben. Weitere Details über eine solche Modellbildung sind u. a. in den Textbüchern von Crowe et al. (2011) und Sirignano (2014) aufgeführt.

In vielen technischen Prozessen und bei zahlreichen geophysikalischen Ereignissen bestimmen turbulente Bewegungen die Transport- und Austauschprozesse in Mehrphasenströmungen. Als Beispiele seien hier die Dampf-Wasser-Strömungen in thermischen Kraftwerken, technische Sprühströmungen, Blasenströmungen, Staubstürme und der Sedimenttransport und dessen Ablagerung in Flüssen und Meeresbuchten angeführt. Die *Modellierung der Turbulenz* in einphasigen Strömungen wurde in Abschn. 4.5 beschrieben. Sie ist durch eine große Bandbreite von Längen- und Zeitskalen der Strömungswirbel charakterisiert. In mehrphasigen Strömungen vervielfachen sich die Längen- und Zeitskalen, die von der Vielfalt der möglichen Phasenverteilungen herrühren. Eine begründete theoretische Behandlung turbulenter Mehrphasenströmungen ist im Allgemeinen nur möglich, wenn eine Trennung der turbulenten Zeit- und Längenskalen von denen der Phasenverteilung vorliegt. Das trifft für verdünnte disperse Zweiphasenströmungen mit einer turbulenten kontinuierlichen Phase und mit einer Volumenfraktion der dispersen Phase mit $\varepsilon_p \ll 1$ zu. Die oben erwähnten Beispiele fallen in diese Klasse der Strömungen.

Die Turbulenz in der Trägerströmung ist in der Regel auf starke Schereffekte in nicht homogenen Hochgeschwindigkeitsströmungen oder auf pulsierende Strömungen durch Gitter und auf Ecken und Kantenumströmungen zurückzuführen. Die Partikel der dispersen Phase können je nach Größe und Gewicht dabei ein rein passives Verhalten beim konvektiven Transport zeigen oder durch Eigendynamik

auf die Trägerphase zurückwirken und dabei entweder den Turbulenzlevel in der Trägerströmung dämpfen oder auch verstärken. Welcher der beiden Effekte überwiegt, hängt weitgehend von einem Satz charakteristischer Parameter der dispersen Zweiphasenströmung ab. Die wichtigsten Partikelparameter können leicht anhand der Gleichung für die *Partikelbewegung* Gl. (6.175) identifiziert werden. Es sind dies das Massendichteverhältnis der Phasen $\beta_\mathrm{p} = \rho_\mathrm{p}/\rho_\mathrm{c}$, eine Partikel-Reynolds-Zahl $Re_\mathrm{p} = |\boldsymbol{v}_\mathrm{p} - \boldsymbol{u}_\mathrm{c}| \cdot d_\mathrm{p}/\nu_\mathrm{c}$ und ein Partikel-Zeitmaß, das als Relaxationszeit eines Partikels in einer viskosen Stokes-Strömung definiert wird:

$$\tau_\mathrm{p} = \frac{\rho_\mathrm{p}}{\rho_\mathrm{c}} \cdot \frac{d_\mathrm{p}^2}{18 \cdot \nu_\mathrm{c}} \,.$$

Diese Größen sind zu den relevanten Parametern der turbulenten Trägerströmung in Beziehung zu setzen. Dies sind die Fluss-Reynolds-Zahl $Re_\mathrm{c} = U_{0\mathrm{c}} \cdot D_\mathrm{c}/\nu_\mathrm{c}$ mit einer Volumenstromdichte $U_{0\mathrm{c}}$, einem charakteristischen hydraulischen Durchmesser D_c, die turbulente Reynolds-Zahl $Re_\mathrm{ct} = u' \cdot L/\nu_\mathrm{c}$ mit u' als der Wurzel aus der Varianz der Schwankungsgeschwindigkeiten und L einer spezifischen Länge für die energiereichen Wirbel. Letztere entspricht einem integralen Längenmaß der Turbulenz. Hinzu kommen zwei relevante Zeitmaße, die Wirbelumlaufzeit $\tau_\mathrm{e} = L/u'$ und die Dissipationszeit kleinster Wirbel nach Kolmogorov $\tau_\mathrm{k} = \nu_\mathrm{c}/\varepsilon_\mathrm{c}$, mit ε_c als Dissipationsrate der kontinuierlichen Phase. Für turbulente verdünnte disperse Zweiphasenströmungen gilt im allgemeinen $Re_\mathrm{p} \ll Re_\mathrm{c}$ und $Re_\mathrm{ct} \geq 1$. Um die Wechselwirkung zwischen den Phasen zu beschreiben ist es zweckmäßig die Partikel-Volumenfraktion ε_p und das Verhältnis der oben definierten charakteristischen Zeitskalen $\tau_\mathrm{p}/\tau_\mathrm{k}$ und $\tau_\mathrm{p}/\tau_\mathrm{e}$ einzuführen. Das letztere Zeitverhältnis wird Stokes-Zahl genannt. Abb. 6.16 zeigt die prinzipiellen Wechselwirkungsmechanismen zwischen den Phasen. Für sehr kleine Volumenfraktionen $\varepsilon_\mathrm{p} < 10^{-6}$ verhalten sich die Partikel passiv. Eine Rückwirkung der Partikelbewegung auf die Turbulenz der kontinuierlichen Phase ist vernachlässigbar (einseitige Kopplung zwischen den Phasen). Im Bereich $10^{-6} < \varepsilon_\mathrm{p} < 10^{-3}$ der Volumenfraktion beeinflussen die Partikel den Turbulenzgrad der kontinuierlichen Phase und zwar erhöhen sie diesen für $\tau_\mathrm{p}/\tau_\mathrm{e} > 1$ bzw. $\tau_\mathrm{p}/\tau_\mathrm{k} > 10^2$. Für $\tau_\mathrm{p}/\tau_\mathrm{e} < 1$ bzw. $\tau_\mathrm{p}/\tau_\mathrm{k} < 10^2$ wirken sie auf ihn dämpfend durch Anhebung der Dissipationsrate ε_c (zweiseitige Kopplung). Der Bereich $\varepsilon_\mathrm{p} < 10^{-3}$ wird als verdünnte Suspension klassifiziert. In ihm treten keine Wechselwirkungen zwischen Partikeln auf. Jenseits dieses Bereichs mit $\varepsilon_\mathrm{p} > 10^{-3}$ verringert sich der mittlere Abstand L_p zwischen den Partikeln, der etwa durch die Beziehung $d_\mathrm{p} = L_\mathrm{p} \cdot (6 \cdot \varepsilon_\mathrm{p}/\pi)^{1/3}$ definiert werden kann, so dass schließlich das Verhältnis $d_\mathrm{p}/L_\mathrm{p} > 0,1$ wird. Unter solchen Bedingungen treten die Partikel zueinander in Wechselwirkung, entweder indirekt durch die räumliche Wirkung ihrer Grenzschichten und Nachlaufströmungen oder sogar durch direkte Kontakte zwischen einzelnen Partikeln. Dieser Parameterbereich wird als dichte Suspension bezeichnet. Die Modellierung der Zweiphasenströmung erfordert hier eine vierfache Kopplung zwischen Partikeln und Trägerphase, die von einfachen mechanistischen Modellbetrachtungen, wie sie in Gl. (6.175) zugrunde liegt, nicht geleistet werden kann.

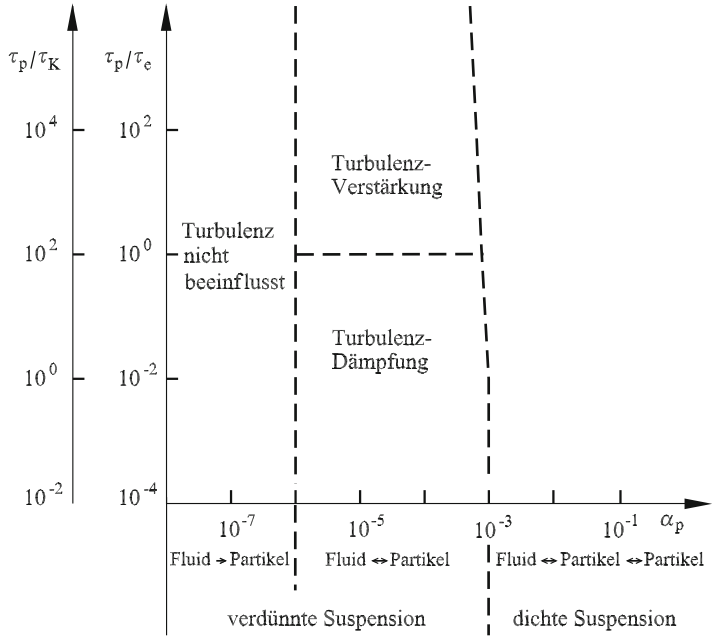


Abb. 6.16 Klassifikation der Wechselwirkung von Partikeln turbulenter Trägerphase, Elgobashi (1994)

Ein Kriterium für die Abgrenzung der Gebiete von Turbulenzverstärkung und von Turbulenzdämpfung, wie sie in Abb. 6.16 für $\tau_p/\tau_e = 1$ angedeutet wird, haben Hosokawa und Tomiyama (2004) auf der Basis experimenteller Untersuchungen vorgeschlagen. Als charakteristische Kennzahl führen sie das Verhältnis zweier turbulenter Zähigkeiten ν_{tp} und ν_{tc} ein, wobei die erstere den Beitrag der Partikelbewegung zur gesamten Turbulenz und die zweite den Anteil der allein durch Scherung in der kontinuierlichen Phase erzeugten Turbulenz erfasst. Dieses Verhältnis ν_{tp}/ν_{tc} ist dem Verhältnis der Partikel- und turbulenten Reynolds-Zahl Re_p/Re_{ct} äquivalent. Im Zusammenhang mit Kanalströmungen führen die Autoren querschnittsgemittelte Größen ein und benutzen die häufig verwendete Beziehung zwischen dem integralen Turbulenzlängenmaß L_c und dem Kanaldurchmesser D in der Form $L_{ct} = 0,2 \cdot D$. Das Kriterium hat die Form:

$$\frac{\nu_{tp}}{\nu_{tc}} = \frac{\overline{|\boldsymbol{v}_p - \boldsymbol{u}_c|}^k \cdot \overline{\boldsymbol{d}_p}^k}{0,2 \cdot \overline{\boldsymbol{u}_c'} \cdot D} = \begin{cases} \leq 1 & \text{Dämpfung} \\ \geq 1 & \text{Verstärkung} \end{cases} .$$

In technischen Anwendungsrechnungen haben sich die Methoden, wie sie für die Behandlung einphasiger turbulenter Strömungen in den Abschn. 2.2 und 4.4 entwickelt wurden, auch zur Beschreibung turbulenter, disperser Mehrphasenströmungen

bewährt. Ausgangsbasis für die Herleitung entsprechender Gleichungen sind die gemittelten Erhaltungsgleichungen (6.170), (6.171) und (6.172). Der Reynolds-Ansatz für die Mehrphasenströmungen schreibt sich:

$$\rho_\mathrm{k} = \overline{\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k} + \rho_\mathrm{k}' \ , \quad \boldsymbol{u}_\mathrm{k} = \overline{\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^{\rho\mathrm{k}} + \boldsymbol{u}_\mathrm{k}' \ , \quad p_\mathrm{k} = \overline{p_\mathrm{k}}^\mathrm{k} + p_\mathrm{k}' \ , \quad E_\mathrm{k} = \overline{E_\mathrm{k}'}^{\rho\mathrm{k}} + E_\mathrm{k}' \ . \tag{6.176}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die gemittelte Erhaltungsgleichung (6.169) ein, so erscheint ein neuer Satz von Zweifach- und Dreifach-Korrelationen der Schwankungsgrößen. Typische Beispiele dafür sind $\overline{X_\mathrm{k} \cdot \rho_\mathrm{k}' \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{k}'}^\mathrm{k}$, $\overline{X_\mathrm{k} \cdot \rho_\mathrm{k}' \cdot (\boldsymbol{u}_\mathrm{k}' \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{k}')}^\mathrm{k}$ und $\overline{X_\mathrm{k} \cdot \rho_\mathrm{k}' \cdot p_\mathrm{k}'}^\mathrm{k}$. Hier können die turbulenten Dichteschwankungen ρ_k' auch durch die Schwankungen der entsprechenden Volumenfraktion ε_k' über die Beziehung $\rho_\mathrm{k}' = \overline{\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k} \cdot \varepsilon_\mathrm{k}'$ ersetzt werden, wobei $\overline{\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k}$ die Materialdichte der Komponente k bedeutet. Für turbulente disperse Mehrphasenströmungen erhält man die Reynolds-Gleichungen in der folgenden Form:

$$\frac{\partial(\varepsilon_\mathrm{k} \cdot \overline{\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k})}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_\mathrm{k} \cdot \overline{\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k} \cdot \overline{\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^{\rho\mathrm{k}} + \boldsymbol{j}_\mathrm{k}^\mathrm{Re}) = \Gamma_\mathrm{k} \,, \tag{6.177}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varepsilon_\mathrm{k} \cdot \overline{\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k} \cdot \overline{\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^{\rho\mathrm{k}})}{\partial t} &+ \nabla \cdot (\varepsilon_\mathrm{k} \cdot (\overline{\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k} \cdot \overline{\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^{\rho\mathrm{k}} \cdot \overline{\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^{\rho\mathrm{k}} + \overline{p_\mathrm{k}}^\mathrm{k} \cdot \boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{\tau}_\mathrm{k}}^\mathrm{k} - \boldsymbol{\tau}_\mathrm{k}^\mathrm{Re})) \\ &= \varepsilon_\mathrm{k} \cdot \overline{\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k} \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{M}_\mathrm{k}^* + \overline{\boldsymbol{u}_\mathrm{ik} \cdot \Gamma_\mathrm{k}}^\mathrm{k} \,, \end{aligned} \tag{6.178}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varepsilon_\mathrm{k} \cdot \overline{\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k} \cdot (\overline{E_\mathrm{k}}^{\rho\mathrm{k}} + E_\mathrm{k}^\mathrm{Re}))}{\partial t} &+ \nabla \cdot (\varepsilon_\mathrm{k} \cdot (\overline{\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k} \cdot \overline{\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^{\rho\mathrm{k}} \cdot (\overline{E_\mathrm{k}}^{\rho\mathrm{k}} + E_\mathrm{k}^\mathrm{Re}) + \overline{p_\mathrm{k}}^\mathrm{k} \cdot \overline{\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^{\rho\mathrm{k}} + \overline{p_\mathrm{k}' \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{k}'}^\mathrm{k} \\ &- (\overline{\boldsymbol{\tau}_\mathrm{k}}^\mathrm{k} + \boldsymbol{\tau}_\mathrm{k}^\mathrm{Re}) \cdot \overline{\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^{\rho\mathrm{k}} + \overline{\boldsymbol{q}_\mathrm{wk}}^\mathrm{k} + \boldsymbol{q}_\mathrm{k}^\mathrm{Re})) \\ &= \varepsilon_\mathrm{k} \cdot \overline{\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k} \cdot (\overline{\boldsymbol{u}_\mathrm{k}}^{\rho\mathrm{k}} \cdot \boldsymbol{g} + \overline{Q}_\mathrm{k}^{\rho\mathrm{k}}) + W_\mathrm{k}^* + F_\mathrm{k}^* + \overline{E_\mathrm{ik} \cdot \Gamma_\mathrm{k}}^\mathrm{k} \,. \end{aligned} \tag{6.179}$$

Hier bezeichnen Terme mit einem Superskript Re Beiträge der Turbulenz zu den Flüssen, die explizit durch Zwei- oder Dreifach-Korrelationen dargestellt werden. Der zusätzliche turbulente Massenfluss $\boldsymbol{j}_\mathrm{k}^\mathrm{Re}$, die turbulenten Reynoldsschen Schubspannungen $\boldsymbol{\tau}_\mathrm{k}^\mathrm{Re}$, die turbulente kinetische Energie E_k^Re und die turbulenten Wärmeströme $\boldsymbol{q}_\mathrm{k}^\mathrm{Re}$ sind wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{j}_\mathrm{k}^\mathrm{Re} = \overline{\rho_\mathrm{k}' \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{k}'}^{\rho\mathrm{k}} = \overline{\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k} \cdot \overline{\varepsilon_\mathrm{k}' \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{k}'}^{\rho\mathrm{k}} \quad , \qquad \boldsymbol{\tau}_\mathrm{k}^\mathrm{Re} = \frac{\overline{\rho_\mathrm{k} \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{k}' \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{k}'}^\mathrm{k}}{\varepsilon_\mathrm{k}} \,,$$

$$E_\mathrm{k}^\mathrm{Re} = \frac{\overline{\rho_\mathrm{k} \cdot (\boldsymbol{u}_\mathrm{k}')^2}^\mathrm{k}}{2 \cdot \varepsilon_\mathrm{k} \cdot \overline{\rho_\mathrm{k}}^\mathrm{k}} \quad , \qquad \boldsymbol{q}_\mathrm{k}^\mathrm{Re} = \frac{\overline{\rho_\mathrm{k} \cdot E_\mathrm{k}' \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{k}'}^\mathrm{k} + \overline{p_\mathrm{k}' \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{k}'}^\mathrm{k} - \overline{\boldsymbol{\tau}_\mathrm{k}' \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{k}'}^\mathrm{k}}{\varepsilon_\mathrm{k}} \,.$$

Weitere Beiträge der turbulenten Schwankungen, die hier zur Vereinfachung der Darstellung nicht explizit aufgelöst werden, sind in den Volumen- und Flächen-

Quelltermen $\boldsymbol{M}_{\mathrm{k}}^{*}$, F_{k}^{*}, W_{k}^{*}, $\overline{\boldsymbol{u}_{\mathrm{ik}} \cdot \Gamma_{\mathrm{k}}}^{\mathrm{k}}$ und $\overline{E_{\mathrm{ik}} \cdot \Gamma_{\mathrm{k}}}^{\mathrm{k}}$ auf den rechten Seiten der Gleichungen vorhanden. Ihre Relevanz ist im Zusammenhang mit dem Einzelproblem zu diskutieren und dementsprechend in der Darstellung zu berücksichtigen. Offensichtlich übersteigt die Zahl der unbekannten Größen in den Erhaltungsgleichungen bei weitem deren Anzahl. Es liegt also ein Schließungsproblem vor. Wie beim Vorgehen für einphasige turbulente Strömungen müssen zur Problemlösung Schließungsbeziehungen für alle konstitutiven Größen auf der Basis physikalischer Überlegungen und rationaler Forderungen zur Darstellung funktionaler Abhängigkeiten bereitgestellt werden (siehe Drew und Wallis (1994)). Analog zur einphasigen turbulenten Strömung werden auch in Mehrphasenströmungen Mehrfachkorrelationen mit Hilfe von Gradienten der primitiven Variablen und dimensionslosen Kennzahlen in Form algebraischer Beziehungen dargestellt. Das bedeutet im Wesentlichen, dass Flüsse als Diffusionsprozesse modelliert werden. Das soll hier kurz am Beispiel des Massenflusses $\boldsymbol{j}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{Re}}$ in Gl. (6.177) für eine zweiphasige Partikelströmung erläutert werden.

Mit einem Gradientenansatz lässt sich der Partikelfluss z. B. in einer verdünnten Suspension in der Form

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{Re}} = \overline{\rho_{\mathrm{p}}}^{\mathrm{k}} \cdot \overline{\varepsilon_{\mathrm{p}}' \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}'}^{\mathrm{k}} = \overline{\rho_{\mathrm{p}}}^{\mathrm{k}} \cdot D_{\mathrm{p}} \cdot \nabla \varepsilon_{\mathrm{p}}$$

darstellen, wobei D_{p} einen turbulenten Partikel-Diffusionskoeffizient bezeichnet. D_{p} wird im Allgemeinen noch von den oben eingeführten relevanten Kennzahlen wie Re_{p}, St, Re_{c} abhängen. In der Literatur findet man den Vorschlag D_{p} auf eine turbulente Wirbelviskosität der kontinuierlichen Phase ν_{ct} und eine turbulente Partikel-Massendiffusionskennzahl, die Schmidt Zahl Sc_{p}, zurückzuführen und $D_{\mathrm{p}} = \nu_{\mathrm{ct}}/Sc_{\mathrm{p}}$ zu setzen. Wobei Sc_{p} empirisch festzulegen ist. Nun ist der obige Ansatz im Sinne einer rationalen Mechanik unvollständig, da eine eigentlich notwendige Abhängigkeit von Gradienten der Geschwindigkeit $\overline{\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}}^{\rho \mathrm{k}}$ in der Darstellung nicht ausgewiesen ist. Es ist deshalb durch physikalische Argumente im Einzelfall zu prüfen, ob diese letztere Abhängigkeit vernachlässigt werden kann.

In der Beziehung für den Diffusionskoeffizienten D_{p} kann die Wirbelviskosität ν_{ct} entweder mit Hilfe eines Mischungswegansatzes durch Gradienten der mittleren Geschwindigkeiten ausgedrückt werden oder sie kann mit Hilfe der Prandtl-Kolmogorov-Beziehung $\nu_{\mathrm{ct}} \sim E_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Re}}/\varepsilon_{\mathrm{c}}$ mit $E_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Re}}$ der turbulenten kinetischen Energie und der turbulenten Dissipation ε_{c} in der kontinuierlichen Phase verknüpft werden.

Ein algebraischer Gradientenansatz der im Beispiel beschriebenen Art reicht zur Beschreibung komplexerer Strömungen häufig nicht aus. Das trifft beispielsweise für Rezirkulationsströmungen hinter Stufen und im Bereich von plötzlichen Leitungserweiterungen zu, wo die Abmessungen der energietragenden Wirbel mit Distanzen vergleichbar werden, über die sich die Partikelkonzentration signifikant ändert. Für solche Situationen ist ein grundsätzlich anderes Vorgehen angezeigt, nämlich die raum-zeitliche Entwicklung des Partikelmassenflusses durch eine eigene Transportgleichung zu beschreiben. Dieses Vorgehen erzeugt seinerseits

weitere Komplikationen, da in der entsprechenden Transportgleichung neue Zweifachkorrelationen wie die Varianz der Partikelkonzentration $\overline{\varepsilon_{\mathrm{p}}'^2}^{\,\mathrm{k}}$ zusätzlich zu den bereits in den Basisgleichungen (6.177), (6.178) und (6.179) ausgewiesenen Mehrfachkorrelationen auftreten.

In Anlehnung an die Beschreibung turbulenter einphasiger Strömungen ist die Mehrgleichungsmethode zur Lösung des Schließungsproblems auch für Mehrphasenströmungen entwickelt worden. Sie basiert auf der Einführung weiterer Transportgleichungen für relevante Turbulenzgrößen wie die turbulente kinetische Energie, die Reynoldsschen Schubspannungen und die Dissipation in den einzelnen Phasen. Weitere Details dazu werden in Abschn. 4.6.

Im Prinzip ist das Mehrfluidmodell in der hier vorgestellten Eulerschen Beschreibungsweise in der Lage turbulente Dispersionsströmungen in einer zweiseitigen Kopplung zwischen den Phasen zu behandeln. Es kann daher entsprechend der Abb. 6.16 für Probleme mit Partikelkonzentrationen $\varepsilon_{\mathrm{p}} \sim 10^{-3}$ und darüber hinaus angewandt werden. Ereignisse wie Koaleszenz oder ein Aufbrechen von Partikeln etwa bei Blasen- oder Tropfenströmungen erfordern eine Erweiterung des Modells auf Gruppen von Partikelgrößen mit entsprechenden Quell- und Senkentermen in den Transportgleichungen für die verschiedenen Gruppen. Solche Modelle befinden sich im Stadium der Entwicklung.

Das zu Beginn des Kapitels vorgestellte Fluid-Partikel-Modell in der Euler-Lagrangeschen Form kann ebenso für turbulente Strömungen adaptiert werden, indem die Reynoldsschen Gleichungen zur Beschreibung der kontinuierlichen Phase eingesetzt werden. Die Dämpfung oder Anfachung der Turbulenz in der Trägerströmung durch die Partikelbewegung wird gegebenenfalls durch zusätzliche Quell- oder Senkenterme in diesen Gleichungen berücksichtigt. Diese Quell- bzw. Senkenterme hängen naturgemäß von den relevanten Kennzahlen der Suspensionsströmung Re_{p}, Re_{c}, St ab und sind auf Basis physikalischer Überlegungen als Schließungsbedingungen zu formulieren.

Die Gl. (6.175) für die Partikelbewegung im Trägerfluid formuliert nur eine Abhängigkeit von der aktuellen Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$ des Trägerfluids. Im Rahmen eines Turbulenzmodells für das Trägerfluid z. B. des $(k\text{-}\varepsilon)$-Modells muss die in Gl. (6.175) eingeführte aktuelle Geschwindigkeit aus der mittleren Geschwindigkeit $\overline{\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}}$ und der turbulenten kinetischen Energie $E_{\mathrm{c,kin}}^{\mathrm{Re}} = 0,5 \cdot \overline{\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}'^2}$ rekonstruiert werden, um das Problem zu schließen. Das wird durch Einführung einer geeigneten Verteilungsfunktion für die Geschwindigkeitsschwankungen $\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}'$, z. B. einer Gauß-Verteilung erreicht, mit einer Varianz, die dem Wert der turbulenten kinetischen Energie entspricht. Die Anwendung dieses Modells auf verdünnte Suspensionsströmungen ist auf eine schwachen Kopplung zwischen den Phasen beschränkt. Um die Wechselwirkung zwischen den Partikeln zu erfassen, wird die Erweiterung des Euler-Lagrange-Modells auf der Basis statistischer Methoden mit der Einführung von Verteilungsfunktionen für Partikelgruppen und der Bereitstellung der zugehörigen Entwicklungsgleichungen betrieben.

Der Vollständigkeit halber soll erwähnt werden, dass zur Untersuchung grundlegender Phänomene turbulenter disperser Mehrphasenströmungen die in Ab-

schn. 4.5 beschriebene Direkte Numerische Simulation (DNS) und die Large Eddy Simulation (LES) eingesetzt werden. Dabei wird bei der DNS die Bewegung der Phasengrenze und bei der LES der Transport der Wirbel mit einer zusätzlichen Transportgleichung beschrieben. Die Methoden sind naturgemäß durch die Begrenzung der numerischen Auflösung für große räumliche Gebiete in technischen Anwendungen nur beschränkt nutzbar, können aber bei der Herleitung und Validierung von Schließungsbedingungen für die Modellgleichungen von großem praktischen Nutzen sein.

4.7 Reaktive Strömungen

Die Beschreibung *laminarer* und *turbulenter reaktiver Strömungen* erfordert neben den in Abschn. 1, 2 und 3 eingeführten Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Gesamtenergie auch die Bilanzgleichungen der *partiellen Massendichte* ρ_i jeder reaktiven Teilchensorte i in der Strömung. Die lokale Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{u}_\mathrm{i}$ der Teilchensorte i setzt sich zusammen aus der *mittleren Strömungsgeschwindigkeit* $\boldsymbol{u}$ des Schwerpunktes und einer sogenannten *Diffusionsgeschwindigkeit* $\boldsymbol{U}_\mathrm{i}$ der Teilchensorte i, welche die Relativgeschwindigkeit der Sorte i zum Schwerpunkt des Teilchensystems darstellt.

Da durch chemische Reaktion jedoch Spezies ineinander umgewandelt werden, tritt ein *Quellterm* auf. Er ergibt sich als das Produkt aus der molaren Masse M_i der Spezies und der Bildungsgeschwindigkeit $\dot{\omega}_\mathrm{i}$ in der molaren Skala (z. B. in $mol/(m^3 \cdot s)$). Bezeichnet man $\rho_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{U}_\mathrm{i} = \boldsymbol{j}_\mathrm{i}$ als *Diffusionsstromdichte* bzw. *Diffusionsfluss*, so erhält man analog zur Beziehung Gl. (6.177) in Abschn. 4.6:

$$\frac{\partial \rho_\mathrm{i}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_\mathrm{i} = M_\mathrm{i} \cdot \dot{\omega}_\mathrm{i} \,. \tag{6.180}$$

Aus der Erhaltungsgleichung der Gesamtenergie $\rho \cdot E = \rho \cdot e + (1/2) \cdot \rho \cdot \boldsymbol{u}^2$ kann unter Verwendung der Impulsgleichung die Bilanzgleichung der *spezifischen inneren Energie e* bei Vernachlässigung der Schwerkraft in der Form

$$\frac{\partial (\rho \cdot e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot e \cdot \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_\mathrm{q} + \tau : \nabla \boldsymbol{u} = 0 \tag{6.181}$$

hergeleitet werden, wobei „ : “ die doppelte Verjüngung der beiden Tensoren τ und $\nabla \boldsymbol{u}$ bedeutet. Diese Gleichung lässt sich mit der Beziehung $\rho \cdot h = \rho \cdot e + p$ in eine Erhaltungsgleichung für die *spezifische Enthalpie* umformen:

$$\frac{\partial (\rho \cdot h)}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot h \cdot \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_\mathrm{q} + \tau : \nabla \boldsymbol{u} - \nabla \cdot (p \cdot \boldsymbol{u}) = 0 \,. \tag{6.182}$$

Detaillierte Modelle zur Berechnung des Diffusionsflusses $\boldsymbol{j}_\mathrm{i}$, des Wärmestroms $\boldsymbol{j}_\mathrm{q}$ des Schubspannungstensors τ und der Viskosität μ für Mehrkomponentenströmungen folgen in Kap. 10 ▸ Strömungen mit chemischen Reaktionen. Dort

werden auch die Enthalpie und die innere Energie als Funktion von Temperatur und Gemischzusammensetzung bestimmt.

Ist man bei *turbulenten* Strömungen an den zeitlichen Mittelwerten interessiert, nicht aber an den zeitlichen Fluktuationen, so lassen sich die gemittelten Reynolds-Gleichungen ableiten. Bei reaktiven Strömungen ist, wie bei der Behandlung kompressibler Strömungen in Abschn. 2.2 und Mehrphasenströmungen in Abschn. 4.6, die dichtegewichtete Favre-Mittelung zweckmäßig.

Für die Erhaltung der Masse der Teilchen i ergibt sich unter Verwendung der konstitutiven Beziehung $\boldsymbol{j}_{\mathrm{i}} = -D_{\mathrm{i}} \cdot \rho \cdot \nabla\omega_{\mathrm{i}}$:

$$\frac{\partial(\overline{\rho} \cdot \tilde{\omega}_{\mathrm{i}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \tilde{\omega}_{\mathrm{i}}) + \nabla \cdot (-\overline{\rho \cdot D_{\mathrm{i}} \cdot \nabla\omega_{\mathrm{i}}} + \overline{\rho \cdot \boldsymbol{u}'' \cdot \omega_{\mathrm{i}}''}) = \overline{M_{\mathrm{i}} \cdot \dot{\omega}_{\mathrm{i}}} \quad (6.183)$$

Für die Energieerhaltungsgleichung (6.182) ergibt sich entsprechend mit dem Ansatz $\boldsymbol{j}_{\mathrm{q}} = -\lambda \cdot \nabla T$:

$$\frac{\partial(\overline{\rho} \cdot \tilde{h})}{\partial t} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \tilde{h}) + \nabla \cdot (\overline{-\lambda \cdot \nabla T} + \overline{\rho \cdot \boldsymbol{u}'' \cdot h''}) = 0\,. \quad (6.184)$$

Dabei werden die Terme $\tau : \nabla\boldsymbol{u}$ und $\nabla \cdot (p \cdot \boldsymbol{u})$ vernachlässigt, da sie nur beim Auftreten von Stoßwellen oder Detonationen, d. h. bei extremen Druckgradienten wesentlich sind. Analog zu den ungemittelten Gleichungen benötigt man eine thermische Zustandsgleichung. Aus $p = \rho \cdot R \cdot T \cdot \sum_{\mathrm{i}}(\omega_{\mathrm{i}}/M_{\mathrm{i}})$ ergibt sich durch Mittelung:

$$\tilde{p} = R \cdot \sum_{\mathrm{i}=1}^{N} \left((\overline{\rho} \cdot \tilde{T} \cdot \tilde{\omega}_{\mathrm{i}} + \overline{\rho} \cdot T'' \cdot \omega_{\mathrm{i}}'') \cdot \frac{1}{M_{\mathrm{i}}} \right) . \quad (6.185)$$

Wenn die molaren Massen ähnlich sind kann näherungsweise angenommen werden, dass die mittlere molare Masse kaum fluktuiert. Nach Mittelung der idealen Gasgleichung erhält man:

$$\tilde{p} = \frac{\overline{\rho} \cdot R \cdot \tilde{T}}{\overline{M}} , \quad (6.186)$$

wobei in dieser Gleichung $\overline{M}$ die gemittelte mittlere molare Masse des betrachteten Gemisches ist.

In den Teilchenerhaltungsgleichungen treten Quellterme auf, deren Behandlung sich oft sehr schwierig gestaltet. Aus diesem Grund ist es zweckmäßig, *Element-Erhaltungsgleichungen* zu betrachten. Elemente werden bei chemischen Reaktionen weder gebildet noch zerstört, damit verschwinden in diesen Gleichungen die Quellterme. Man führt den *Element-Massenbruch*:

$$Z_{\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}} (\mu_{\mathrm{ij}} \cdot \omega_{\mathrm{j}}) , \qquad i = 1, ..., \mathrm{M} \quad (6.187)$$

ein, wobei N die Stoffzahl und M die Zahl der Elemente im betrachteten Gemisch ist. Die μ_{ij} bezeichnen den Massenanteil des Elementes i im Stoff j.

Nimmt man näherungsweise an, dass alle Diffusionskoeffizienten D_i in Gl. (6.183) gleich sind, so lassen sich die mit μ_{ij} multiplizierten Erhaltungsgleichungen summieren und man erhält die einfache Beziehung:

$$\frac{\partial(\rho \cdot Z_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot Z_i \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla \cdot (\rho \cdot D \cdot \nabla Z_i) = 0\,. \tag{6.188}$$

Diese Gleichung enthält wegen der Elementerhaltung $\sum(\mu_{ij} \cdot M_i \cdot \omega_i) = 0$ keinen Reaktionsterm mehr, was sich in Kap. 10 ▸ Strömungen mit chemischen Reaktionen vorteilhaft verwenden lässt. Durch zeitliche Mittelung ergibt sich aus Gl. (6.188) die ebenfalls quelltermfreie Gleichung:

$$\frac{\partial(\overline{\rho} \cdot \tilde{Z}_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \tilde{Z}_i) + \nabla \cdot (-\overline{\rho \cdot D \cdot \nabla Z_i} + \overline{\rho \cdot \boldsymbol{u}'' \cdot Z_i''}) = 0\,. \tag{6.189}$$

Während die Navier-Stokes-Gleichungen bei Verwendung der klassischen konstitutiven Beziehungen für die Stromdichten in sich geschlossen sind und damit numerisch gelöst werden können, treten bei den gemittelten Erhaltungsgleichungen Terme der Form $\overline{\rho \cdot \boldsymbol{v}'' \cdot q''}$ auf, welche nicht explizit als Funktionen der Mittelwerte bekannt sind. Es liegen demnach mehr Unbekannte als Bestimmungsgleichungen vor. Es handelt sich um das *Schließungsproblem* der Turbulenz, das in Abschn. 4.4 beschrieben wird.

Um zu einer Lösung des Problems zu gelangen, verwendet man Modelle, die die Reynolds-Spannungsterme $\overline{\rho \cdot \boldsymbol{v}'' \cdot q''}$ in Abhängigkeit von den Mittelwerten beschreiben. Die heute üblichen Turbulenzmodelle (siehe z. B. Launder und Spalding (1972); Jones und Whitelaw (1985)) interpretieren den Term $\overline{\rho \cdot \boldsymbol{v}'' \cdot q''}$ mit $q = w_i, \boldsymbol{v}, h, Z_i)$ in Gl. (6.181) als *turbulenten Transport* und modellieren ihn deshalb im Rahmen der Boussinesq-Approximation in Analogie zum laminaren Fall mit Hilfe eines *Gradientenansatzes*, nach dem der Term proportional zum Gradienten des Mittelwertes der betrachteten Größe ist:

$$\overline{\rho \cdot \boldsymbol{v}'' \cdot q_i''} = -\rho \cdot \nu_T \cdot \nabla \tilde{q}_i\,, \tag{6.190}$$

wobei ν_T als turbulenter Austauschkoeffizient bezeichnet wird. Dieser Ansatz versagt aber für bestimmte Strömungssituationen. In der Tat zeigen Experimente, dass auch ein turbulenter Transport entgegen dem Gradienten stattfinden kann Moss (1979).

Der turbulente Transport ist im Allgemeinen viel schneller als molekular diffusive Transportprozesse in laminarer Strömung. Aus diesem Grund lassen sich die gemittelten laminaren Transportterme in sehr vielen Fällen vernachlässigen.

Die Erhaltungsgleichungen turbulenter reaktiver Strömungen lassen sich numerisch lösen, wenn der turbulente Austauschkoeffizient ν_T bekannt ist. Es ist anzunehmen, dass er für die verschiedenen Gleichungen verschiedene Werte annimmt. Zur

Bestimmung dieses Austauschkoeffizienten existieren zahlreiche Modelle (siehe Abschn. 4.5). Am meisten verwendet wird das *k-ε-Turbulenzmodell* (Launder und Spalding (1972); Jones und Whitelaw (1985)), das eine Gleichung für die turbulente kinetische Energie k und die *Dissipationsgeschwindigkeit* ε der kinetischen Energie benutzt. Der turbulente Austauschkoeffizient ν_T ergibt sich dann zu

$$\nu_\mathrm{T} = C_\nu \cdot \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}} \,. \tag{6.191}$$

Vernachlässigt man in den Erhaltungsgleichungen den laminaren Transport, verwendet den Gradientenansatz und setzt voraus, dass die turbulenten Austauschkoeffizienten für alle Transportgrößen gleich sind, erhält man zusammen mit den Impulsgleichungen und den Gleichungen für $\tilde{k}$ und $\tilde{\varepsilon}$ die gemittelten Erhaltungsgleichungen reaktiver Strömungen:

$$\frac{\partial(\overline{\rho} \cdot \tilde{\omega}_\mathrm{i})}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \tilde{\omega}_\mathrm{i}) - \nabla \cdot (\overline{\rho} \cdot \nu_\mathrm{T} \cdot \nabla \tilde{\omega}_\mathrm{i}) = \overline{M_\mathrm{i} \cdot \dot{\omega}_\mathrm{i}} \,, \tag{6.192}$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho} \cdot \tilde{h})}{\partial t} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \tilde{h}) - \nabla \cdot (\overline{\rho} \cdot \nu_\mathrm{T} \cdot \nabla \tilde{h}) = 0 \,, \tag{6.193}$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho} \cdot \tilde{Z}_\mathrm{i})}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \tilde{Z}_\mathrm{i}) - \nabla \cdot (\overline{\rho} \cdot \nu_\mathrm{T} \cdot \nabla \tilde{Z}_\mathrm{i}) = 0 \,. \tag{6.194}$$

Diese Gleichungen sind dann im Rahmen der oben diskutierten Modellannahmen in sich geschlossen, wenn der mittlere Quellterm für die einzelnen Speziesgleichungen bestimmt werden kann. Hierfür existieren wieder zahlreiche Modelle unterschiedlicher Komplexität, die in Abschn. 4.5 vorgestellt werden.

Weiterführende Literatur

Anderson, J.D., Jr.: Computational Fluid Dynamics. McGraw-Hill, New York (1995)

Baldwin, B.S., Lomax, H.: Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. AIAA J., 78–257 (1978)

Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N.: Transport Phenomena. Wiley, New York (2006)

Boussinesq, J.: Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoires présentés par divers savant à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, **23**, 1–680 (1872)

Crowe, C.J., Schwarzkopf, J.D., Sommerfeld, M., Tsuji, Y.: Multiphase Flows with Droplets and Particles. CRC Press, Boca Raton/Boston/New York/London (2011)

Daly, B.J., Harlow, F.H.: Transport equations in turbulence. Phys. Fluids **13**, 2634–2649 (1970)

Drew, D.A., Wallis, G.: Fundamentals of two-phase flow modeling. Multiph. Sci. Technol. **8**, 1–67 (1994)

Drew, D.A., Passman, S.L.: Theory of Multicomponent Fluids. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1999)

Elgobashi, S.E.: On predicting particle-laden turbulent flows. Appl. Sci. Res. **52**, 309–329 (1994)

Ferziger, J.H., Peric, M.: Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (2002)

Hosokawa, S., Tomiyama, A.: Turbulence modification in gas-liquid and solid-liquid dispersed two-phase pipe. Int. J. Heat Fluid Flow **25**(3), 489–498 (2004)
Jones, W.P., Whitelaw, J.H.: Modelling and measurement in turbulent combustion. Proc. Combust. Inst. **20**, 233 (1985)
Launder, B.E., Spalding, D.B.: Mathematical Models of Turbulence. Academic Press, London/ New York (1972)
Laurien, E., Oertel, H., jr. Numerische Strömungsmechanik. Springer Vieweg, Wiesbaden (2013)
Lesieur, M.: Turbulence in Fluids. Springer, Berlin/ Heidelberg/New York (2008)
Lomax, H., Pulliam, T.H.: Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. Springer, Berlin/ Heidelberg/New York (2003)
Maxey, M., Riley, J.J.: Equation of motion for a small rigid sphere in a non-uniform flow. Phys. Fluids **26**, 883–889 (1983)
Mellor, G.L., Herring, H.J.: A survey of the mean turbulent closure models. AIAA J. **11**, 590–599 (1973)
Moss, J.B.: Simultaneous measurements of concentration and velocity in an open premixed turbulent flame. Combust. Sci. Technol. **22**, 115 (1979)
Navier, C.L.M.H.: Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. Mémoires de l'Académie des Sciences **6**, 389–416 (1823)
Newton, I., Sir: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, II. Innys, London (1726)
Oertel, H., jr., Böhle, M., Reviol, T.: Strömungsmechanik. Springer Vieweg, Wiesbaden (2015)
Oertel, H., jr., Delfs, J.: Strömungsmechanische Instabilitäten. Springer Berlin/Heidelberg (1996), Universitätsverlag, Karlsruhe (2005)
Plesset, M., Zwick, S.A.: The growth of vapour bubbles in superheated liquids. J. Appl. Phys. **25**(4), 493–501 (1954)
Rayleigh, J.W.S.: The solution for the motion of a bubble under constant pressure conditions. Phil. Mag. **34**, 94 (1917)
Roshko, A.: Structure of turbulent shear flows: a new look. AIAA J. **14**, 1349–1357 (1976)
Sagaut, P.: Large Eddy Simulation for Incompressible Flows. An Introduction. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (2006)
Shir, C.C.: A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows in the idealized planetry boundary layer. J. Atmos. Sci. **30**, 1327–1339 (1973)
Sirignano, W.A.: Fluid Dynamics and Transport of Droplets and Sprays. Cambridge University Press, Cambridge (2014)
Stokes, G.: On the theories of the internal friction of fluids in motion. Trans. Camb. Philos. Soc. **8**, 287–305 (1845)
Warnatz, J., Maas, U., Dibble, R.W.: Combustion. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (2006)

Instabilitäten und turbulente Strömungen 7

Katepalli R. Sreenivasan und Herbert Oertel Jr.

Zusammenfassung

Das Kapitel Instabilitäten und turbulente Strömungen ist Teil des Lehrbuches und Nachschlagewerkes H. Oertel jr. (Hrsg.) Prandtl-Führer durch die Strömungslehre. Es werden ergänzend zu Prandtls Grundlagenkapitel der Dynamik zäher Flüssigkeiten das Einsetzen der Turbulenz mit der linearen Stabilitätsanalyse zwei- und dreidimensionaler Grenzschichten, der Übergangsbereich zur Turbulenz und der Bereich ausgebildeter Turbulenz mit der Klassifikation turbulenter Strömungen behandelt.

Das Kapitel gibt einen Ausblick auf neue Entwicklungen und theoretische Ansätze der komplexen nichtlinearen Wechselwirkungen von kleinen und großen Turbulenzstrukturen und gibt Hinweise auf mögliche Wege zur Entwicklung einer universellen Turbulenztheorie.

1 Grundlagen turbulenter Strömungen

Strömt eine reibungsbehaftete Strömung mit relativ hoher Geschwindigkeit durch ein langes gerades Rohr, wird das Hagen-Poiseuille-Gesetz (Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Gl. (4)) der laminaren Rohrströmung durch das Gesetz der turbulenten Strömung abgelöst. Während der Druckabfall der laminaren Rohrströmung linear vom Volumenstrom abhängt, ist dieser für die turbulente Rohrströmung deutlich größer und nahezu proportional dem Quadrat des Volumenstroms. Beobachtet man das Strömungsfeld, so erscheint es im *laminaren* Hagen-Poiseuille-Bereich geradlinig und glatt. Bei größerer Strömungsgeschwindigkeit beobachtet man ein

K.R. Sreenivasan (✉)
Bobst Library, New York University, New York, NY, USA
E-Mail: katepalli.sreenivasan@nyu.edu

H. Oertel Jr.
Baden-Baden, Deutschland
E-Mail: herbert.oertel@t-online.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5_7

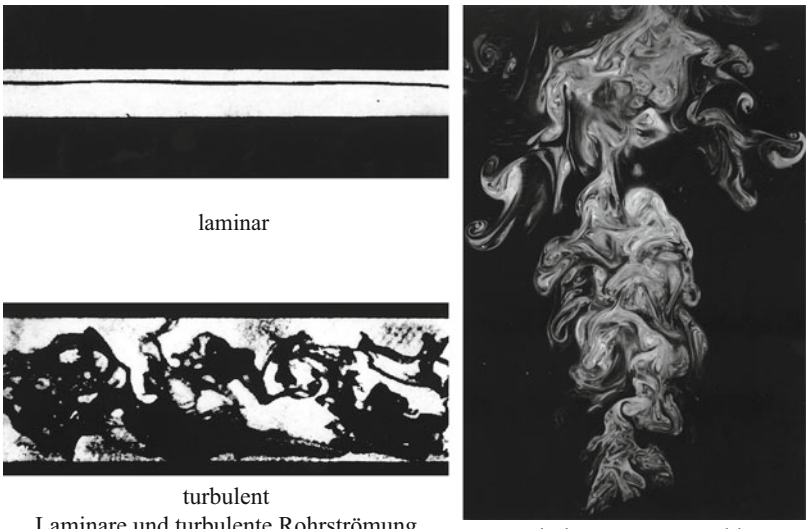


Abb. 7.1 Laminare und turbulente Strömungen

völligeres zeitlich gemitteltes Geschwindigkeitsprofil der *turbulenten* Rohrströmung mit einer überlagerten irregulären und verwirbelten Schwankungsbewegung. Gibt man in einem Glasrohr mit einer Injektionsspritze einen Farbfaden hinzu, bildet dieser bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten eine gerade und glatte Linie (Abb. 7.1 und Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Abb. 7.7). In der turbulenten Rohrströmung bricht der Farbfaden auf und verteilt sich nahezu gleichförmig im Strömungsfeld.

Als zweites Beispiel ist in Abb. 7.1 der in Abschn. 1 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik eingeführte Wasserstrahl (Abb. 1.3) gezeigt, der aus einer runden Öffnung in einen Tank ruhenden Wassers strömt. Bei geringer Ausströmgeschwindigkeit ist der Wasserstrahl laminar und stationär. Bei größerer Austrittsgeschwindigkeit entwickelt der turbulente Wasserstrahl Wirbel unterschiedlicher Größe und zunehmender Komplexität.

Die bisher gezeigten Abbildungen sind Momentaufnahmen turbulenter Strömungen. Sie geben kein adäquates Bild der dynamischen Wechselwirkungen im Strömungsfeld. Gelegentliche Beobachtungen turbulenter Strömungen legen die Schlussfolgerung nahe, dass Fluidelemente im Strömungsfeld während ihrer Entwicklung gedehnt, gefaltet und geneigt werden. Dabei verändern sie durch Anhäufung ihre Gestalt bzw. werden kontinuierlich neu gebildet. Diese Evolution und Entwicklung der turbulenten Strömung wiederholt sich nicht in allen Einzelheiten sondern verändert sich kontinuierlich. Insgesamt haben diese Eigenschaften turbulenter Strömungen einen erheblichen Einfluss auf den Wärme-, Massen- und Impulstransport. Bei entsprechenden Bedingungen beobachtet man turbulente

Strömungen bei den unterschiedlichsten Konfigurationen wie Grenzschichten, Nachlaufströmungen hinter Körpern, thermischen Konvektionsströmungen und geo- bzw. astrophysikalischen Strömungen. Dabei ist die Turbulenz in jedem Einzelfall im Detail unterschiedlich, jedoch in ihrer Auswirkung ähnlich.

In der Praxis spielt die Turbulenz in der Technik und bei der Wetter- und Klimaentwicklung eine wichtige Rolle. Ohne Turbulenz wäre die Durchmischung von Luft und Benzin im Kraftfahrzeugmotor in praktikablen Zeitskalen nicht möglich. Der Transport und die Verteilung der Wärme oder von Schadstoffen und der Impulstransport in der Atmosphäre und im Ozean würden deutlich schwächer ausfallen. Auf einen Nenner gebracht wäre das Leben auf der Erde, so wie wir es kennen, ohne Turbulenz nicht möglich. Die Turbulenz hat auch unerwünschte Auswirkungen. Sie vergrößert den Energieverbrauch in Pipelines, von Flugzeugen, Schiffen und Kraftfahrzeugen. Sie ist ein Phänomen, das bei der Flugsicherheit zu berücksichtigen ist. Sie verzerrt die Ausbreitung elektromagnetischer Signale in der Atmosphäre usw. Ein Hauptziel in der Praxis ist die Vorhersage und Beeinflussung der Turbulenz bei unterschiedlichen technischen Anwendungen wie z. B. Industriemischer und Brenner, Nuklearreaktoren, Flugzeugtriebwerke, Schiffe und in Raketendüsen. Ein Hauptziel der Physiker ist dabei das Verständnis des dynamischen Ursprungs der Turbulenz und deren komplexe zeitliche und räumliche Entwicklung, die Beschreibung und Quantifizierung ihrer Eigenschaften sowie das Verständnis von turbulenten Vorgängen gepaart mit anderen Phänomenen wie die Granulation einer Strömung, der Bruchmechanik bzw. der Vorhersage von Erdbeben.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Turbulenz sowohl ein Paradigma räumlicher und zeitlicher Komplexität darstellt als auch von praktischer Bedeutung für die industrielle Anwendung ist. Es sind drei Hauptaspekte zu betrachten: der Ursprung der Turbulenz, Phänomene in Strömungen mit ausgebildeter Turbulenz und die Turbulenzbeeinflussung bei einem vorgegebenen Strömungsproblem.

2 Einsetzen der Turbulenz

Während der vergangenen 140 Jahre wurde für das *Einsetzen der Turbulenz* nach intensiver mathematischer und experimenteller Forschung zumindest für einige Anwendungsbeispiele ein einheitliches Bild entwickelt (siehe Abschn. 4 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten). Der laminar-turbulente Übergang vollzieht sich qualitativ in einer Strömung, wenn der molekulare Impulsaustausch nicht genügend effizient den makroskopischen Transport der Geschwindigkeitsschwankungen ausgleichen kann. Osborne Reynolds (1894) folgte dem Gedanken der dynamischen Ähnlichkeit und postuliert, dass der laminar-turbulente Übergang beim Überschreiten einer dimensionslosen Kennzahl (Reynolds-Zahl) einsetzt. Die Reynolds-Zahl (Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Gl. (10) ist definiert als $Re_l = U \cdot l / \nu$, mit der charakteristischen Geschwindigkeit U, der charakteristischen Länge l und der kinematischen Viskosität des Fluids ν.

Der Sachverhalt ist jedoch etwas komplexer als ursprünglich von Reynolds angenommen. So hängt der Wert der kritischen Reynolds-Zahl vom Strömungsproblem und einer Anzahl anderer Einflussgrößen wie der Anfangsbedingung z. B. das Niveau der anfänglichen Störungen ab. Zusätzlich ist auch die korrekte Festlegung der charakteristischen Geschwindigkeit und Länge l ausschlaggebend. Die Vorstellung, dass Strömungen bis zu einer kritischen Reynolds-Zahl laminar und stabil oberhalb des kritischen Wertes turbulent sein sollen, erscheint für die praktische Anwendung zu einfach, konnte jedoch in Grenzschichten erfolgreich angewandt werden.

2.1 Strömungsmechanische Instabilitäten

Ein generischer Fall von Instabilität ist ein sorgfältig vorbereitetes Experiment in dem die Störungen, die die Instabilität verursachen, sehr klein sind. Derart wohl kontrollierte Experimente haben die Entwicklung der *linearen Stabilitätstheorie* veranlasst. Mit dieser Theorie berechnet man die kritische *Reynolds-Zahl* bei der die laminare Strömung instabil gegenüber kleinen Störungen wird. Ausgehend von Lord Rayleigh in den 1880iger Jahren, haben Reynolds (1883); Orr (1907); Sommerfeld (1908); Taylor (1923); Heisenberg (1924); Lin (1955); Chandrasekhar (1961) und andere (für Einzelheiten siehe z. B. Drazin und Reid 2004, Oertel und Delfs (2005)) bleibende Beiträge zur linearen Stabilitätstheorie geleistet.

Wenn die Instabilitäten in Strömungen bei größeren Reynolds-Zahlen angefacht werden, ist es nahe liegend die Strömung näherungsweise als reibungsfrei zu betrachten. In der Tat beschreibt die *reibungsfreie Stabilitätstheorie* einige Beobachtungen in reibungsbehafteten Strömungen. Dies erscheint insbesondere für Strömungen zu gelten, bei denen man das Wirbelstärkemaximum in der freien Strömung und nicht in der Nähe von Wänden vorfindet. Ein Beispiel dafür ist die so genannte Mischungsschicht, die sich beim Zusammentreffen zweier paralleler Strömungen unterschiedlicher Geschwindigkeit ausbildet.

Für einen Großteil der Strömungen liefert die reibungsfreie Stabilitätstheorie keine plausiblen Antworten. So ist die Couette-Strömung zwischen einer bewegten und einer ruhenden Wand für alle Reynolds-Zahlen stabil. Experimente zeigen aber, dass die Couette-Strömung bei einer kritischen Reynolds-Zahl der Größenordnung Tausend instabil wird. Dabei wird die Reynolds-Zahl mit der Geschwindigkeit der bewegten Platte und dem Plattenabstand gebildet. Dieses Phänomen verblüfft zunächst, da eine stabile reibungsfreie Strömung mit der dämpfenden Wirkung der reibungsbehafteten Strömung noch stabiler sein sollte. Die *Reibung* spielt jedoch eine subtile Rolle. Sie kann Instabilitäten hervorrufen, wie dies von Tollmien (1929) und ausführlicher von Lin (1955) erklärt wurde (siehe Drazin und Reid 2004).

Dieser Sachverhalt ist am besten für die Grenzschicht einer dünnen längs angeströmten Platte geklärt (siehe Abschn. 4 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten), für die eine umfangreiche Literatur verfügbar ist. Die Plattengrenzschicht ist ein wichtiger Anwendungsfall in der Praxis, da wie wir noch sehen werden, die Turbulenz oft in Grenzschichten auftritt. Orr (1907) und Sommerfeld (1908) haben aus

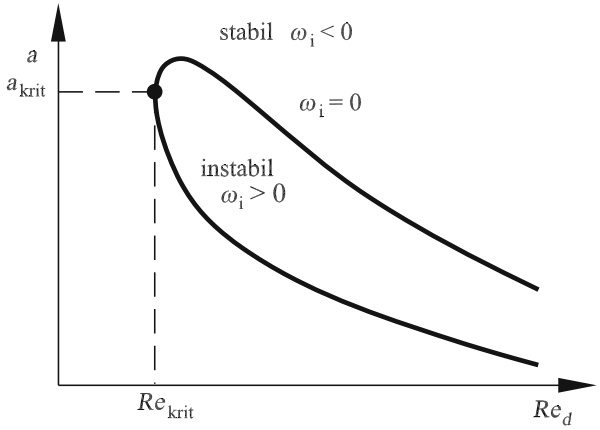


Abb. 7.2 Stabilitätsdiagramm der Tollmien-Schlichting-Wellen einer Plattengrenzschicht

den Navier-Stokes-Gleichungen eine nach ihnen benannte lineare Differentialgleichung (Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Gl. (32)) für die Anfachung lokaler Störungen in der Grenzschicht abgeleitet. Die Lösungen der Orr-Sommerfeld-Gleichung sind in Abb. 7.2 bzw. Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Abb. 12 dargestellt. Innerhalb der Neutralkurve ($\omega_i = 0$) sind zweidimensionale Wellenstörungen instabil ($\omega_i > 0$) und außerhalb stabil ($\omega_i < 0$). Im instabilen Bereich wachsen die Störungen exponentiell mit der Zeit an. Sie wachsen stromab räumlich exponentiell, wenn die Störungen an einem bestimmten Ort eingebracht werden oder zeitlich und räumlich, wenn die Störungen als Wellenpaket dargestellt werden können.

Weiterführende Untersuchungen haben gezeigt, dass eine zweite Schicht in der Grenzschicht existiert, bei der die Geschwindigkeit der Grenzschichtströmung mit der Phasengeschwindigkeit der Störungen übereinstimmt. Ohne Reibung würde dies zu einer Singularität der Bewegung von Strömungspartikeln führen, da sie für einen langen Zeitraum demselben Druckgradienten ausgesetzt sind. Mit Reibung ist die Strömung jedoch frei von Singularitäten. Dann existiert ein zweites Gebiet in der Grenzschicht mit einer Phasenverschiebung der Längsbewegung. Diese Phasenverschiebung hat eine dämpfende Wirkung, die in Verbindung mit der Anfachung in der sekundären Grenzschicht zu einer kritischen Reynolds-Zahl führt. Das Verdienst von Tollmien (1929) war es, dass er mit der Lösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung diese kritische Reynolds-Zahl bestimmt hat.

Die *Tollmien-Schlichting-Wellen* werden stromab räumlich angefacht. Der Übergang zur voll turbulenten Grenzschichtströmung erfolgt entsprechend Abschn. 5 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten über mehrere Zwischenzustände. Beim Überschreiten einer zweiten kritischen Reynolds-Zahl werden die ebenen Tollmien-Schlichting-Wellen gegenüber dreidimensionalen Störungen instabil und es bilden sich stromab sogenannte Lambda-Strukturen mit lokalen Scherschichten in der Grenzschichtströmung aus. Der Zerfall dieser lokalen Scherschichten leitet die

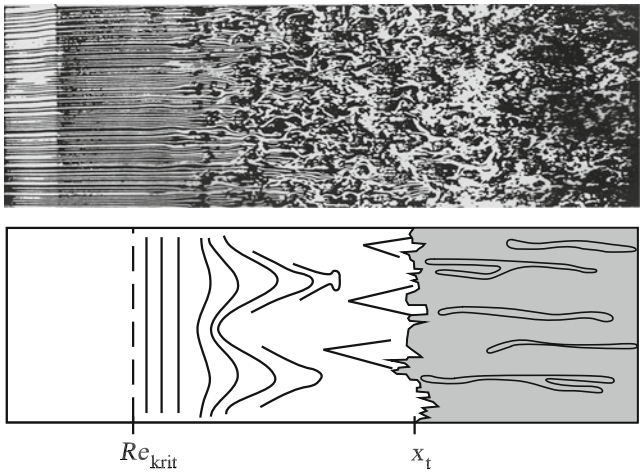


Abb. 7.3 Transitionsprozess in einer Plattengrenzschicht

Transition zur voll turbulenten Grenzschichtströmung ein (siehe Abb. 7.3 und Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Abb. 10).

In *dreidimensionalen Grenzschichten* z. B. eines gepfeilten Tragflügels eines Verkehrflugzeuges tritt aufgrund der Querströmungskomponente ergänzend zum Tollmien-Schlichting-Übergang eine weitere Instabilität auf. Diese *Querströmungs-Instabilitäten* treten stromab der Staulinie des Tragflügels auf. Sie führen zu laufenden Wellen als auch zu einem stationären Wirbelmuster entlang der Querströmungskomponente der dreidimensionalen Grenzschicht. Die dreidimensionalen Störwellen und die stationären Wirbelmuster (0-Hertz-Moden) zerfallen stromab der Staulinie mit den gleichen Transitionsmechanismen wie die Tollmien-Schlichting-Wellen.

Außer den Grenzschichtströmungen gibt es andere Strömungen, bei denen die lineare Stabilitätstheorie den Verlust der Stabilität richtig wiedergibt. Dieser wird entsprechend der Reynolds-Zahl mit dimensionslosen Kennzahlen beschrieben. z. B. beschreibt die Theorie sehr gut die kritische Taylor-Zahl, bei der zwischen zwei konzentrisch rotierenden Zylindern die Couette-Strömung ihre Stabilität verliert und sich ringförmige Wirbel im Zylinderspalt ausbilden (Taylor (1923)). Dabei ist die Taylor-Zahl das Quadrat der Reynolds-Zahl, gebildet mit der Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Zylinder, die Tiefe des Zylinderspaltes und der Viskosität des rotierenden Mediums.

Die lineare Stabilitätstheorie sagt ebenfalls die kritische Rayleigh-Zahl (Lord Rayleigh (1916)) voraus, bei der der Wärmetransport von der stationären Wärmeleitung zu hexagonalen Konvektionszellen beziehungsweise Konvektionsrollen ansteigt (siehe Abb. 7.5 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik und Abschn. 2 des Kap. 8 ▸ Konvektive Wärme- und Stoffübertragung). Dabei ist die Rayleigh-Zahl ein Maß für das Verhältnis der thermischen Auftriebskraft und

der Reibung. der Auftrieb beschleunigt ein Fluidelement gegen die Schwerkraft während die Reibung und die thermische Diffusion das Fluidelement verzögern. Das hat für ein Fluid zwischen zwei unendlich ausgedehnten von unten beheizten und von oben gekühlten horizontalen Platten die Konsequenz, dass bis zu einer Rayleigh-Zahl $Ra = 1708$ der Wärmetransport ausschließlich durch Wärmeleitung stattfindet. In der Ingenieur-Literatur wird in den Kapiteln über die freie Konvektion oft die Grashof-Zahl $Gr = Ra \cdot Pr$ benutzt, mit der Prandtl-Zahl $Pr = \nu/k$ und der Temperaturleitfähigkeit des Fluides k.

Für zahlreiche Strömungsprobleme, von denen wir einige beschrieben haben, ist der Verlust der linearen Stabilität des laminaren Grundzustandes der erste Schritt beim Übergang zur Turbulenz. Der nächste Schritt des Übergangprozesses ist nichtlinear, bei dem die Störungen zu einer genügend großen Amplitude anwachsen und die Wechselwirkung mit der Grundströmung dazu führt, dass sie exponentiell angefacht werden.

Von der Vielzahl strömungsmechanischer Instabilitäten werden in den folgenden Kapiteln die Instabilitäten der Grenzschicht im Detail behandelt. Es folgt die klassische lineare Stabilitätstheorie für die zwei- und dreidimensionalen Grenzschichten. Eine detaillierte Zusammenfassung der strömungsmechanischen Instabilitäten wird in der zweiten Auflage *Prandtl – Essentials of Fluid Mechanics* (2004) und in der Deutschen Auflage (Oertel jr. 2002) gegeben.

2.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Die Definition der strömungsmechanischen Instabilität geht von der zeitlichen und räumlichen Entwicklung der Störung aus. Als Beispiel ist in Abb. 7.4 die stationäre und laminare Konvektionsströmung an einer vertikalen, beheizten Platte gezeigt. Das Strömungsfeld wird mit einer harmonischen periodischen Störwelle w' kleiner Amplitude gestört:

$$w'(x, z, t) = \hat{w}(x) \cdot \exp(\mathrm{i} \cdot a \cdot z - \mathrm{i} \cdot \omega \cdot t). \tag{7.1}$$

Bei vorgegebener Wellenlänge $\lambda = 2 \cdot \pi/a$ bezeichnet man den laminaren Ausgangszustand als *zeitlich instabil* bezüglich dieser Wellenlänge, wenn die Strömung für eine zeitliche Anfachung der Wellenamplitude sorgt ($\mathrm{Im}(\omega(a)) > 0$). Wird die Störwelle zeitlich gedämpft ($\mathrm{Im}(\omega(a)) < 0$), so nennt man die laminare Ausgangsströmung *zeitlich stabil* bezüglich der gegebenen Wellenlänge. Als *zeitlich neutral* oder indifferent gilt der Grenzfall zeitlich konstanter Störamplitude. Anstatt der zeitlichen Störungsentwicklung kann aber auch der Stabilitätsbegriff bezüglich der rein räumlichen (ω reell, a komplex) oder allgemeiner der räumlich-zeitlichen (ω, a komplex) Entwicklung von Störungen definiert werden. Im letzteren Fall untersucht man die Aufteilung nach so genannten absoluten und konvektiven Instabilitäten. Eine *konvektive Instabilität* liegt vor, falls die zeitlich aufklingende Störenergie mit der Strömung stromab fortgeschwemmt wird. Verbleibt die Störung hingegen am Ort, so spricht man von *absoluter Instabilität*.

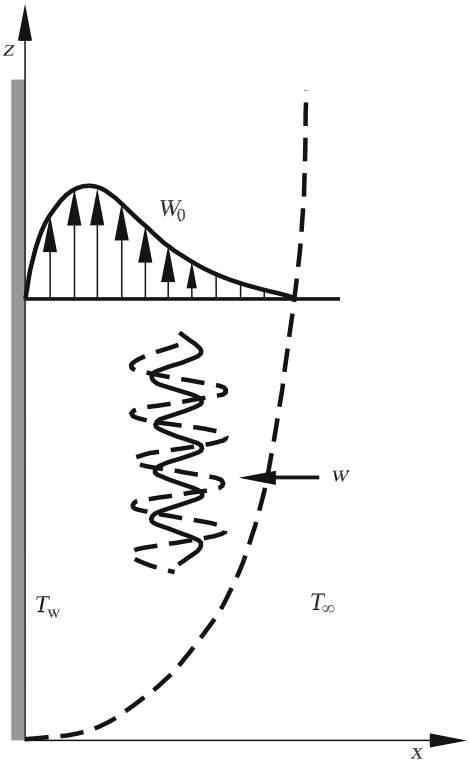


Abb. 7.4 Zum Stabilitätsbegriff in der Strömungsmechanik. Thermische Konvektion in der Grenztschicht einer vertikalen Wand mit $T_w > T_\infty$

Bei der mathematischen Stabilitätsdefinition geht man von einem stationären Strömungszustand $\boldsymbol{U}_0 = (x, y, z)$ aus, der z. B. durch seine Dichteverteilung ρ_0, Temperaturverteilung T_0 und die drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors (u_0, v_0, w_0) an jeder räumlichen Position (x, y, z) vollständig definiert ist. $\boldsymbol{U}_0 = (\rho_0, u_0, v_0, w_0, T_0)$ erfüllt die strömungsmechanischen Grundgleichungen. Hierbei stellt sich die Frage, ob weitere Lösungen, also zusätzliche Gleichgewichtszustände des Systems existieren. Um diese Frage beantworten zu können, lenkt man den Strömungszustand $\boldsymbol{U}_0$ aus seiner Gleichgewichtslage mit einer kleinen Störung $\boldsymbol{u}'(x, y, z, t)$ aus. Diese Auslenkung muss physikalisch möglich sein, d. h. der zum Zeitpunkt $t = 0$ neu entstandene gestörte Strömungszustand $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ muss den Randbedingungen des Strömungsproblems genügen.

Es resultiert der in Abschn. 4 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten eingeführte Ansatz (Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Gl. (7.26)):

$$\boldsymbol{u}(x, y, z, t) = \boldsymbol{U}_0(x, y, z) + \boldsymbol{u}'(x, y, z, t). \tag{7.2}$$

Die Größe der Störung wird mit

$$|\boldsymbol{u}'| = \int_V |\boldsymbol{u}'(x, y, z)^2| \cdot \mathrm{d}V \tag{7.3}$$

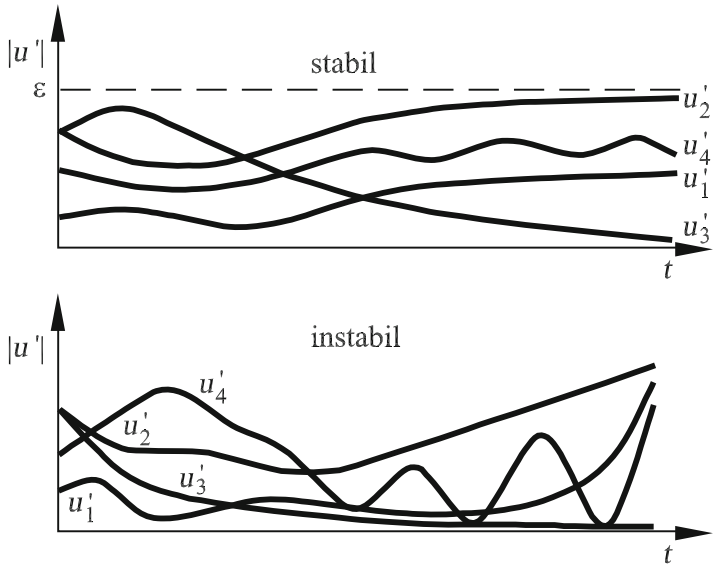


Abb. 7.5 Zur Definition von Stabilität

eingeführt, die ein Maß für die Abweichung der gestörten Strömung $\boldsymbol{u}$ von der Grundströmung $\boldsymbol{U}_0$ im gesamten Strömungsfeld V darstellt. $|\boldsymbol{u}'|$ wird im Folgenden auch als Störenergie im Strömungsfeld bezeichnet.

Die Grundströmung ist stabil, sofern die Größe einer Störung für alle Zeiten $t \geq 0$ kleiner als eine vorgegebene Zahl ε bleibt :

$$|\boldsymbol{u}'|_{\mathrm{t}} < \varepsilon \quad \text{mit} \qquad t \geq 0, \tag{7.4}$$

für alle Anfangsstörungen $\boldsymbol{u}'(x, y, z, t = 0)$, deren Störenergie kleiner als eine Konstante ist. Anderenfalls ist die Grundströmung instabil. Die Prinzipdiagramme Abb. 7.5 erläutern an Beispielen, wie nach der obigen Definition Strömungen nunmehr anhand des zeitlichen Verhaltens der Störenergie einer eingebrachten Störung in stabile und instabile Strömungen eingeteilt werden können. Dazu werden der Grundströmung $\boldsymbol{U}_0$ verschiedene Anfangsstörungen, z. B. $\boldsymbol{u}'_1(t = 0), \boldsymbol{u}'_2(t = 0)$, $\boldsymbol{u}'_3(t = 0)$, $\boldsymbol{u}'_4(t = 0)$ überlagert. Es sei darauf hingewiesen, dass unter den unendlich vielen möglichen Störungen auch bei instabiler Strömung Störungen angeregt werden können, die auf Dauer abklingen, wie z. B. für die Störung $\boldsymbol{u}'_3(t = 0)$. In der Regel werden Strömungen $\boldsymbol{U}_0$ auf sog. *asymptotische Stabilität* untersucht, die dann vorliegt, wenn jede beliebige Störung auf Dauer abklingt:

$$\lim_{t \to \infty} |\boldsymbol{u}'(t)| = 0. \tag{7.5}$$

In diesem Fall nimmt das gestörte System zeitasymptotisch wieder seinen Ursprungszustand $\boldsymbol{U}_0$ an. Dieser Fall ist in der Abb. 7.6 skizziert.

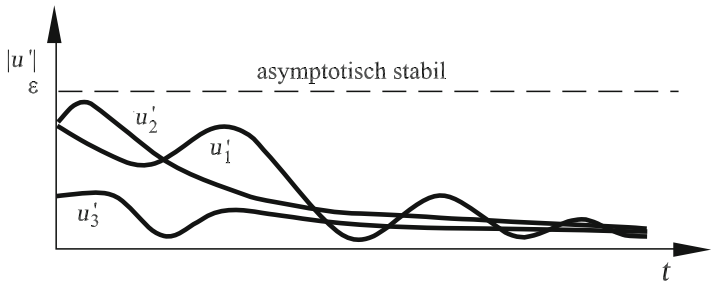


Abb. 7.6 Störverhalten bei asymptotisch stabiler Strömung

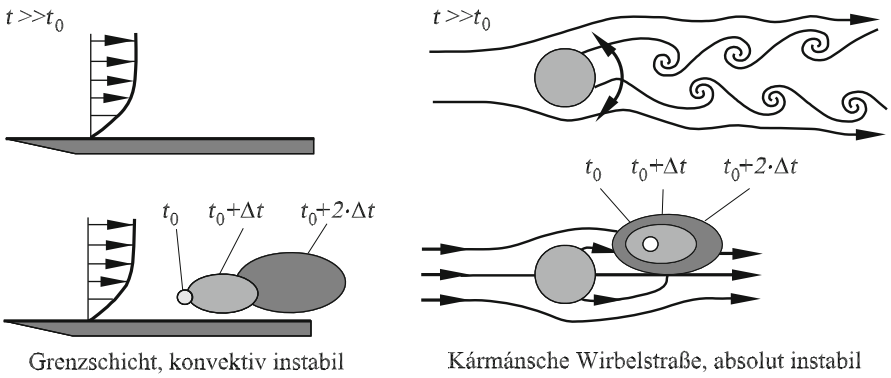


Abb. 7.7 Ausbreitung instabiler Störungen bei konvektiver und absoluter Instabilität

Mit der Definition der stabilen und instabilen Strömung ist jedoch noch keine Aussage über die räumlich-zeitliche Ausbreitung der instabilen Störungen gemacht.

Zur Erläuterung der Problematik vergleicht man zwei instabile Grundströmungen $\boldsymbol{U}_0$ miteinander, die ein qualitativ unterschiedliches Verhalten nach der Störungseinleitung aufweisen. Unter der idealisierenden Annahme der Störungsfreiheit könnte auch bei überkritischer Reynolds-Zahl ein stationärer Nachlauf hinter einem umströmten Körper erzeugt werden, so dass entgegen der Situation nach Abb. 7.7 keine Kármánsche Wirbelstraße entsteht. Ebenso würde bei ideal störungsfreier Längsanströmung einer ebenen Platte auch bei überkritischer Reynolds-Zahl eine zwar instabile, aber laminare Strömung vorliegen.

Wird nun im Beispiel der Nachlaufströmung zu einem Zeitpunkt t_0 kurzfristig eine lokale Störung etwa in der Umgebung des stationären Nachlaufgebiets des Körpers eingebracht, so bildet sich auf Dauer die Kármánsche Wirbelstraße aus. Eine solche Störung verhält sich in der instabilen Plattengrenzschichtströmung qualitativ vollkommen verschieden. Die Größe der Störung wächst zwar auch hier an, die Störung wird jedoch entsprechend der Skizze gleichzeitig stromab geschwemmt, verlässt also für immer den Ort der Störungseinleitung. Offenbar führt die Instabilität in der Nachlaufströmung zu einer selbsterregten Schwingung

des Systems am festen Ort, während in der Grenzschichtströmung Störungen am festen Ort auf Dauer verschwinden. Störenergie wird am festen Ort hier nur dann zu beobachten sein, wenn stromauf kontinuierlich Störenergie von außen eingebracht wird.

Um eine Aussage bezüglich des räumlichen Verhaltens der Störungen machen zu können, muss man offenbar ein Maß für die lokale Größe der Störungen einführen. Dazu verkleinert man das Integrationsgebiet V auf ein Teilgebiet. Diese Verkleinerung führt man solange durch, bis das Integrationsgebiet auf die infinitesimal kleine Größe $\mathrm{d}V$ geschrumpft ist. Entsprechend Gl. (7.3) ist dann:

$$\mathrm{d}|\boldsymbol{u}'| = |\boldsymbol{u}'|^2 \mathrm{d}V.$$

Teilt man durch das Volumenelement $\mathrm{d}V$, so erhält man schließlich eine Störenergiedichte A mit

$$A(x, y, z, t) = \frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{u}'|}{\mathrm{d}V} = |\boldsymbol{u}'|^2, \tag{7.6}$$

die im Folgenden als Maß für die Größe der Störung am Ort x, y, z zum Zeitpunkt t definiert wird. Wenn in einer anfänglich störungsfreien instabilen Strömung die Störenergiedichte A am Ort der Einleitung der lokalen Störanregung zeitasymptotisch abklingt, nennt man diese Strömung *konvektiv instabil*. Andernfalls heißt die Strömung *absolut instabil*. Die in der Abb. 7.7 dargestellte Nachlaufströmung ist danach absolut instabil, während die Plattengrenzschicht konvektiv instabiles Verhalten zeigt.

Instabilitäten der Grenzschichtströmung

Die Beschreibung des laminar-turbulenten Übergangs der Grenzschichtströmung kennen wir bereits aus Abschn. 4 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten. In der *Plattengrenzschicht* setzt die Instabilität mit zweidimensionalen *Tollmien-Schlichting-Wellen* bei der kritischen Reynolds-Zahl $Re_{x,\mathrm{krit}} = 5 \cdot 10^5$ beziehungsweise mit der charakteristischen Länge $d = \sqrt{\nu \cdot x / U_\delta}$ bei $Re_{d,\mathrm{krit}} = 302$ ein. Deren Wellenfronten sind in Abb. 7.10 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten und Abb. 7.3 gezeigt. Stromab wachsen die primären Störungsamplituden an, wodurch die Strömung in diesem Bereich instabil gegenüber dreidimensionalen *sekundären Störungen* (2) wird (siehe Abb. 7.8). Die Wirbellinien verformen sich wellenförmig. Weiter stromab werden die sich mit den Wirbellinien mitverformenden Wirbelröhren gestreckt und bilden die *Lambda-Strukturen* (3). Ein darauf folgender Zerfall dieser Strukturen und das räumlich und zeitlich unregelmäßige Auftreten von rasch anwachsenden *Turbulenzflecken* (4) beenden schließlich den Transitionsvorgang an der Stelle x_t, die man als den *Ort abgeschlossener Transition* bezeichnet. Daran schließt sich der Zustand (5) ausgebildeter Turbulenz an. Auch die ausgebildete Turbulenz ist nicht strukturlos, denn es werden längsstreifenförmige Gebiete mit stark verminderter Stromabkomponente der Geschwindigkeit (*streaks*) in Wandnähe beobachtet.

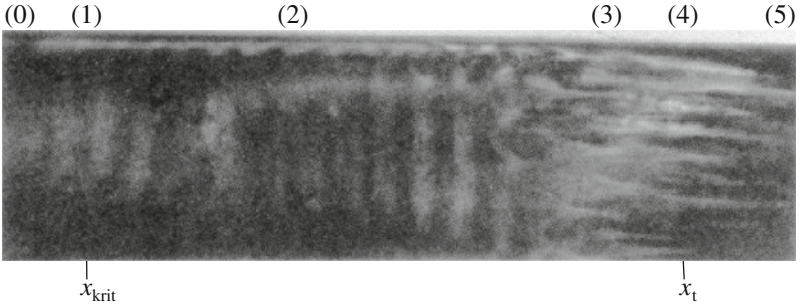


Abb. 7.8 Transitionsprozess in der Grenzschicht eines Rotationskörpers, Brown (1957)

Während des gesamten Transitionsprozesses (1)–(4) findet eine starke Aufdickung der Grenzschicht statt, weil infolge der immer weiter anwachsenden Störamplituden, insbesondere der Vertikalschwankungen, der Stromabimpuls im zeitlichen Mittel innerhalb der Grenzschicht gleichmäßiger verteilt wird. Die stärkste Schwankungsintensität findet dabei zunächst in unmittelbarer Nähe der Oberfläche statt was dazu führt, dass die zeitlich gemittelte Wandschubspannung im Transitionsgebiet sogar einen höheren Wert als in der ausgebildeten Turbulenz annimmt. Grundlegend ist, dass der beschriebene Übergang nicht an einem Ort stattfindet, sondern sich über eine stromab ausgedehnte Strecke $x_{krit} < x < x_t$ vollzieht.

Die instabile Primärstörung (1) der Laminarströmung (0) verändert nachhaltig das Strömungsfeld nur stromab der kritischen Position x_{krit}. Stromauf dieser Stelle bleibt die Strömung dauerhaft laminar. Bringt man an einem Punkt $x > x_{krit}$ eine lokale Störung in die Grenzschicht ein, so breitet sich das Störwellenpaket mit einer charakteristischen Geschwindigkeit stromab aus und fließt gleichzeitig auseinander, während seine Störintensität infolge der Instabilität anwächst. Die Instabilität der Grenzschicht ist demzufolge konvektiv instabil (siehe Abb. 7.7). Daher setzt die Turbulenz nicht schlagartig ein, wie z. B. die Rayleigh-Bénard- oder Taylor-Instabilität, sondern entwickelt sich innerhalb eines stromab ausgedehnten Transitionsbereiches. Das Einsetzen der Tollmien-Schlichting-Wellen in der zweidimensionalen Plattengrenzschicht wurde in Abschn. 4 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten als Eigenwertproblem der Orr-Sommerfeld-Gleichung (Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Gl. (32)) beschrieben. Das Stabilitätsdiagramm und die kritische Reynolds-Zahl Re_{krit} und Wellenzahl a_{krit} zeigt die Abb. 12 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten für die Blasius-Grenzschichtströmung. Im folgenden Kapitel wird deshalb die Stabilitätsanalyse auf dreidimensionale Störungen erweitert.

Die *Stabilitätsanalyse* beginnt mit dem Bestimmen der *Grundströmung*. Diese ergibt sich als Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen beziehungsweise der Grenzschichtgleichung.

Bei der Stabilitätsanalyse von Grenzschichtströmungen ist das Anwachsen der Grenzschichtdicke δ in Stromabrichtung x zu berücksichtigen. Die Strömungs-

größen sind demnach nicht nur von der Position z in der Normalenrichtung der Grenzschicht abhängig, sondern auch von x und y. Dadurch treten neben z auch x und y als nicht homogene Richtungen auf.

Werden jedoch Grenzschichtströmungen im Bereich großer Reynolds-Zahlen betrachtet, so verändert sich die Grenzschichtdicke $\delta(x, y)$ wenig (z. B. im Fall der Platte $\delta \sim x/\sqrt{Re_x}$). Damit ist die Strömungsgeschwindigkeit von x und y wesentlich schwächer als von z abhängig.

Aus experimentellen Ergebnissen weiß man, dass die Abhängigkeit der *Störungen* von den Parallelrichtungen x, y im Gegensatz zur Grundlösung keineswegs schwach ist. Alle Störgeschwindigkeiten werden auf die ungestörte Anströmung U_∞, die Längen auf δ sowie der Störddruck auf $\rho \cdot U_\infty^2$ bezogen. Der Störungsansatz für die *inkompressible Grenzschicht* lautet:

$$\begin{aligned} u &= U_\infty \cdot (u_0(\overline{x}, \overline{y}, z) + \varepsilon \cdot u'), \\ v &= U_\infty \cdot (v_0(\overline{x}, \overline{y}, z) + \varepsilon \cdot v'), \\ w &= U_\infty \cdot (\varepsilon \cdot w_0(\overline{x}, \overline{y}, z) + \varepsilon \cdot w'), \\ p &= \rho \cdot U_\infty^2 \cdot (p_0(\overline{x}, \overline{y}, z) + \varepsilon \cdot p'). \end{aligned} \tag{7.7}$$

ε ist der Störgrößenparameter, der für die Grenzschicht $\varepsilon = 1/Re_\delta$ gewählt wird. Das Problem hängt von zwei unterschiedlichen Längenskalen ab, nämlich einer langen Skala $\overline{d} = \delta/\varepsilon$ und einer sehr viel kürzeren Skala δ. Da diese Skalen so weit auseinander liegen liegt es nahe, die Abhängigkeit der Lösung von x bzw. y als separate Abhängigkeiten von sowohl einer großskaligen Variablen $\overline{x}$ bzw. $\overline{y}$ und einer kleinskaligen Variablen $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{y}$ zu formulieren. Dieses Vorgehen bezeichnet man als *Methode der multiplen Skalen*. Die Verbindung zur Originalvariable x bzw. y ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x, \qquad \overline{x} = \varepsilon \cdot x, \\ \tilde{y} &= y, \qquad \overline{y} = \varepsilon \cdot y, \end{aligned} \tag{7.8}$$

mit dem Verständnis, dass sämtliche Störgrößen Funktionen jeweils beider Variablen sind, also z. B. $u' = u'(t, x, y, z) = u'(t, \tilde{x}, \overline{x}, \tilde{y}, \overline{y}, z)$. Ableitungen nach x schreiben sich dadurch in der Form $\partial u'/\partial x = (\partial u'/\partial \tilde{x}) \cdot \mathrm{d}\tilde{x}/\mathrm{d}x + (\partial u'/\partial \overline{x}) \cdot \mathrm{d}\overline{x}/\mathrm{d}x = \partial u'/\partial \tilde{x} + \varepsilon \cdot \partial u'/\partial \overline{x}$.

Damit ergeben sich die linearisierten *Störungsdifferentialgleichungen*:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + v_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}z} \cdot w' + \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{1}{Re_d} \cdot \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right) = 0 \tag{7.10}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+u_0\cdot\frac{\partial v'}{\partial x}+v_0\cdot\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}z}\cdot w'+\frac{\partial p'}{\partial y}-\frac{1}{Re_d}\cdot\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}\right)=0 \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t}+u_0\cdot\frac{\partial w'}{\partial x}+v_0\cdot\frac{\partial w'}{\partial y}+\frac{\partial p'}{\partial z}-\frac{1}{Re_d}\cdot\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right)=0\,. \quad (7.12)$$

Es ist ganz wesentlich, dass die Koeffizienten z. B. $u_0(\overline{x},\overline{y},z)$ dieses homogenen linearen partiellen Differentialgleichungssystems in den Variablen t, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, z nur von den Variablen $\overline{x}$, $\overline{y}$, z abhängen und nicht von den Kleinskalenvariablen $\tilde{x}$, $\tilde{y}$. Man erkennt, dass in Gl. (7.9), (7.10), (7.11) und (7.12) keine expliziten Ableitungen nach $\overline{x}$ oder $\overline{y}$ auftreten. Im Rahmen der vorliegenden Approximation ist also auch die Lösung des Differentialgleichungssystems nur algebraisch und nicht differentiell von den Ortsvariablen $\overline{x}$, $\overline{y}$ abhängig. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer *lokalen Stabilitätsanalyse*. Denn man gibt die bzgl. der kurzskaligen Parallelkoordinaten $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ konstante Grundlösung am gewählten und festgehaltenen Ort $\overline{x}$, $\overline{y}$ vor und führt hier lokal die Stabilitätsanalyse durch. Man beachte außerdem, dass die Störungsdifferentialgleichung homogen in t, $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ ist.

Bei der Ableitung der Störungsdifferentialgleichungen ist die Abhängigkeit von der Normalenkomponente w_0 der Grundströmung herausgefallen. Dies bezeichnet man als *Parallelströmungs-Annahme*. Deren Gültigkeit wurde von Herbert und Bertolotti (1987) für die Plattengrenzschichtströmung bestätigt.

Die Störungen erfüllen die *Randbedingungen* an der Wand $z = z_\mathrm{w}$:

$$u'(x,y,z=z_\mathrm{w},t)=v'(x,y,z=z_\mathrm{w},t)=0, \qquad w'(x,y,z=z_\mathrm{w},t)=0 \quad (7.13)$$

und zusätzlich die Fernfeldrandbedingung:

$$v'(x,y,z\to\infty,t)=0, \qquad p'(x,y,z\to\infty,t)=0, \quad (7.14)$$

Das Störungs-Differentialgleichungssystem Gl. (7.9), (7.10), (7.11) und (7.12) ist homogen in $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und t. Man kann einen Separationsansatz (Wellenansatz)

$$\begin{pmatrix}\tilde{u}'(\tilde{x},\tilde{y},z,t;\overline{x},\overline{y})\\ \tilde{v}'(\tilde{x},\tilde{y},z,t;\overline{x},\overline{y})\\ \tilde{w}'(\tilde{x},\tilde{y},z,t;\overline{x},\overline{y})\\ \tilde{p}'(\tilde{x},\tilde{y},z,t;\overline{x},\overline{y})\end{pmatrix}=\mathrm{F}_x(\tilde{x};\overline{x},\overline{y})\cdot\mathrm{F}_y(\tilde{y};\overline{x},\overline{y})\cdot\mathrm{F}_t(t;\overline{x},\overline{y})\cdot\begin{pmatrix}\hat{u}(z;\overline{x},\overline{y})\\ \hat{v}(z;\overline{x},\overline{y})\\ \hat{w}(z;\overline{x},\overline{y})\\ \hat{p}(z;\overline{x},\overline{y})\end{pmatrix} \quad (7.15)$$

durchführen, da die Randbedingungen nur von z abhängen. Setzt man Gl. (7.15) in die Kontinuitätsgleichung Gl. (7.9) ein so folgt:

$$\left(\frac{1}{\mathrm{F}_x}\cdot\frac{\mathrm{dF}_x}{\mathrm{d}\tilde{x}}\right)\cdot\hat{u}+\frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}z}+\left(\frac{1}{\mathrm{F}_y}\cdot\frac{\mathrm{dF}_y}{\mathrm{d}\tilde{y}}\right)\cdot\hat{v}=0,$$

wobei die zwei rechten Summanden unabhängig von $\tilde{x}$ und die zwei linken Summanden unabhängig von $\tilde{y}$ sind, so dass die geklammerten Ausdrücke jeweils bezüglich $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ Konstanten darstellen. In gleicher Weise kann mit der Funktion F_t verfahren werden. Einsetzen des Separationsansatzes in Gl. (7.12) ergibt:

$$\frac{1}{\mathrm{F}_x}\cdot\frac{\mathrm{dF}_x}{\mathrm{d}\tilde{x}}=\mathrm{i}\cdot a(\overline{x},\overline{y}),\qquad \frac{1}{\mathrm{F}_y}\cdot\frac{\mathrm{dF}_y}{\mathrm{d}\tilde{y}}=\mathrm{i}\cdot b(\overline{x},\overline{y}),\qquad \frac{1}{\mathrm{F}_t}\cdot\frac{\mathrm{dF}_t}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{i}\cdot\omega(\overline{x},\overline{y}),$$

wo die drei Separationsparameter a, b und ω eingeführt werden, die noch Funktionen der Langskalenvariablen sind. Aus den Gleichungen für F_x, F_y und F_t folgt:

$$\begin{pmatrix}\tilde{u}'(\tilde{x},\tilde{y},z,t)\\ \tilde{v}'(\tilde{x},\tilde{y},z,t)\\ \tilde{w}'(\tilde{x},\tilde{y},z,t)\\ \tilde{p}'(\tilde{x},\tilde{y},z,t)\end{pmatrix}=\exp(\mathrm{i}\cdot a\cdot\tilde{x}+\mathrm{i}\cdot b\cdot\tilde{y}-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot t)\begin{pmatrix}\hat{u}(z)\\ \hat{v}(z)\\ \hat{w}(z)\\ \hat{p}(z)\end{pmatrix},\tag{7.16}$$

wobei die Abhängigkeit der Funktionen von $\overline{x}$ und $\overline{y}$ nicht gekennzeichnet wurde. Der Exponent $a(\overline{x},\overline{y})\cdot\tilde{x}+b(\overline{x},\overline{y})\cdot\tilde{y}-\omega(\overline{x},\overline{y})\cdot t$ wird als *Phase* bezeichnet. Die Separationsparameter a, b und ω sind zunächst irgendwelche, i. d. R. komplexe Zahlen.

Einsetzen des Wellenansatzes Gl. (7.16) in das Gleichungssystem Gl. (7.9), (7.10), (7.11) und (7.12) ergibt:

$$a\cdot\hat{u}+b\cdot\hat{v}=\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}z},\tag{7.17}$$

$$(a\cdot u_0+b\cdot v_0-\omega)\cdot\hat{u}-\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}z}\cdot\hat{w}=-a\cdot\hat{p}+\frac{\mathrm{i}}{Re_d}\cdot\left(a^2+b^2-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\right)\hat{u},\tag{7.18}$$

$$(a\cdot u_0+b\cdot v_0-\omega)\cdot\hat{v}-\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}z}\cdot\hat{w}=-b\cdot\hat{p}+\frac{\mathrm{i}}{Re_d}\cdot\left(a^2+b^2-\frac{\mathrm{d}^2}{z^2}\right)\hat{v},\tag{7.19}$$

$$(a\cdot u_0+b\cdot v_0-\omega)\cdot\hat{w}=\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{i}}{Re_d}\cdot\left(a^2+b^2-\frac{\mathrm{d}^2}{z^2}\right)\hat{w}.\tag{7.20}$$

Mit den Randbedingungen Gl. (7.13) und (7.14)

$$\hat{u}(z=z_\mathrm{w})=\hat{v}(z=z_\mathrm{w})=0\,,\qquad \hat{w}(z=z_\mathrm{w})=0,\tag{7.21}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}(z\to\infty)=0\,,\qquad \hat{p}(z\to\infty)=0\tag{7.22}$$

ist das Eigenwertproblem für die *Wellen-Instabilitäten* formuliert. Es ist ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem, welches die vier Parameter Re_d, a, b

und ω enthält. Dabei wird die Reynolds-Zahl als reelle Zahl vorgegeben. Von der trivialen Lösung abgesehen, ist das Gleichungssystem nur für bestimmte a, b und ω lösbar. Es definiert damit eine wechselseitige Beziehung zwischen diesen drei Größen, die man als *Dispersionsrelation* bezeichnet:

$$D(a, b, \omega) = 0. \tag{7.23}$$

Bei dem beschriebenen *Eigenwertproblem* werden jeweils zwei der Größen a, b und ω vorgegeben und die fehlende als Eigenwert aus den Gleichungen berechnet.

Die *Stabilitätsanalyse* befasst sich mit der Änderung der Störamplitude $|\boldsymbol{u}'|$ einer in eine Strömung $\boldsymbol{U}_0$ eingebrachten Störung $\boldsymbol{u}'$. Entsprechend der Einführung zu Beginn des Kapitels definiert man die Stabilität anhand der zeitlichen Anfachung der Störamplituden. In Grenzschichten werden die Störungen als Wellen dargestellt, die entlang der Parallelrichtung x und y laufen:

$$\boldsymbol{u}'(x, y, z, t) = \boldsymbol{u}(z) \cdot \exp(\mathrm{i} \cdot a \cdot x + \mathrm{i} \cdot b \cdot y - \mathrm{i} \cdot \omega \cdot t). \tag{7.24}$$

Die Tilde-Symbole über x und y wurden der Übersichtlichkeit wegen fortgelassen. Im Sinne der eingeführten Definition von Stabilität gibt man eine Eigenform vor, die durch die Wellenzahlkomponenten a und b repräsentiert sind und berechnet aus dem Eigenwertproblem den dazugehörigen Wert $\omega = \omega_\mathrm{r} + \mathrm{i} \cdot \omega_\mathrm{i}$. Werden räumlich periodische Wellen (d.h. reelle $a = a_\mathrm{r}$ und $b = b_\mathrm{r}$) vorgegeben, spricht man von einer *zeitlichen Stabilitätsanalyse*. Da das System sich nur in der positiven Zeitrichtung weiterentwickeln kann, wird eine aufgebrachte Wellenstörung mit vorgegebenem $a = a_\mathrm{r}$ und $b = b_\mathrm{r}$ zeitlich genau dann instabil, wenn ihre Amplitude zeitlich angefacht wird, d.h. $\omega_\mathrm{i} > 0$ ist. ω_i ist die *zeitliche Anfachungsrate*. Eine Störung, für die $\omega_\mathrm{i} = 0$ gilt, wird indifferente oder neutrale Störung genannt. Man kann auch ω vorgeben und die zugehörige Eigenform (repräsentiert durch a und b) berechnen. Man spricht von einer *räumlichen Stabilitätsanalyse*, wenn $\omega = \omega_\mathrm{r}$ als reeller Wert vorgegeben wird (d. h. Betrachtung aller möglichen Wellen mit gegebener Frequenz) und z. B. a bei gegebenem b berechnet wird. Der Realteil a_r der berechneten Zahl a stellt dann die Wellenzahl dar und der Imaginärteil a_i ist das Maß für die räumliche Anfachung in x. Eine eindeutige Definition für räumliche Anfachung erhält man offenbar erst durch Vorgabe einer Betrachtungsrichtung. Sie sei repräsentiert durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_x \cdot \cos(\phi) + \boldsymbol{e}_y \cdot \sin(\phi)$ (Abb. 7.9).

Man bestimmt die Änderung der Amplitude $|\boldsymbol{u}'| = |\hat{\boldsymbol{u}}| \cdot \exp(-a_\mathrm{i} \cdot x - b_\mathrm{i} \cdot y + \omega_\mathrm{i} \cdot t)$ der Welle entlang der vorgegebenen Richtung ϕ zu $\mathrm{d}|\boldsymbol{u}'|/\mathrm{d}x_\phi = \boldsymbol{e}_\phi \cdot \nabla |\boldsymbol{u}'|$ und findet $\mathrm{d}|\boldsymbol{u}'|/\mathrm{d}x_\phi = -(a_\mathrm{i} \cdot \cos(\phi) + b_\mathrm{i} \cdot \sin(\phi)) \cdot |\boldsymbol{u}'|$. Die Amplitude wächst entlang $\boldsymbol{e}_\phi$ an, wenn $\mathrm{d}|\boldsymbol{u}'|/\mathrm{d}x_\phi$ positiv ist. Die Welle ist bezüglich der Richtung ϕ angefacht, wenn

$$a_\mathrm{i} \cdot \cos(\phi) + b_\mathrm{i} \cdot \sin(\phi) < 0$$

gilt. Die Größen a_i und b_i werden auch als *räumliche Anfachungsraten* bezeichnet. Man erkennt, dass die Notwendigkeit der Vorgabe einer Richtung ϕ eine gewisse Willkür darstellt. Deshalb gilt es zu prüfen, ob sich die Welle mit dem

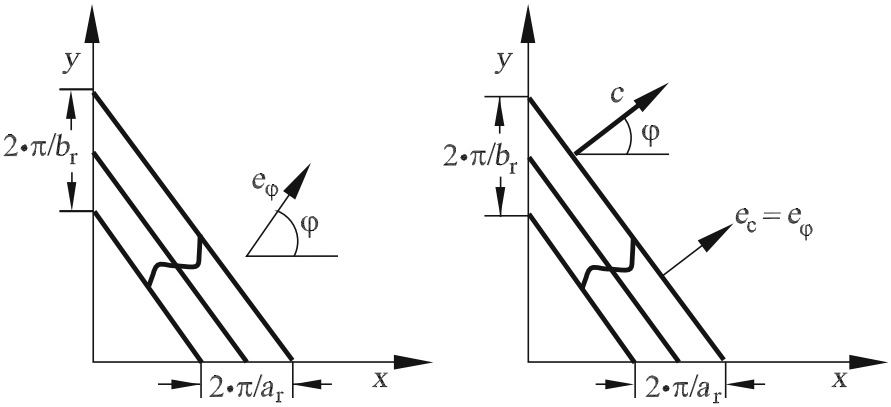


Abb. 7.9 Zur Ausbreitung einer Wellenstörung

Phasengeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, 0) = \omega_\mathrm{r}/(a_\mathrm{r}^2 + b_\mathrm{r}^2) \cdot (a_\mathrm{r}, b_\mathrm{r}, 0)$ in der Richtung wachsender Amplitude bewegt. Dazu lässt man die Betrachtungsrichtung $\boldsymbol{e}_\phi$ mit der Bewegungsrichtung der Welle $\boldsymbol{e}_\mathrm{krit} = (a_\mathrm{r}, b_\mathrm{r}, 0) \cdot \mathrm{sgn}(\omega_\mathrm{r})/\sqrt{a_\mathrm{r}^2 + b_\mathrm{r}^2}$ zusammenfallen $\mathrm{sgn}(\omega_\mathrm{r}) = \omega_\mathrm{r}/|\omega_\mathrm{r}|$ (siehe Abb. 7.9). Eine zeitlich periodische Welle erfährt entlang ihrer Bewegungsrichtung dann eine Amplitudenvergrößerung, wenn

$$\omega_\mathrm{r} \cdot (a_\mathrm{r} \cdot a_\mathrm{i} + b_\mathrm{r} \cdot b_\mathrm{i}) < 0$$

gilt. Eine zweidimensionale Welle ($b = 0$) kann man als räumlich angefacht bezeichnen, wenn für $\omega_\mathrm{r} > 0$ der Imaginärteil $a_\mathrm{i} < 0$ ist. Welche Wellen tatsächlich zur räumlichen Anfachung von Störungen beitragen, kann jedoch mit der Stabilitätsanalyse lokaler Störungen nur für konvektive Instabilitäten eindeutig beantwortet werden.

Das Eigenwertproblem kann entweder a bei vorgegebenem $b = b_\mathrm{r} + \mathrm{i} \cdot b_\mathrm{r}$ und $\omega = \omega_\mathrm{r}$ oder b bei vorgegebenem $a = a_\mathrm{r} + \mathrm{i} \cdot a_\mathrm{r}$ und $\omega = \omega_\mathrm{r}$ liefern. Anschaulicher als das Vorgeben einer komplexen Wellenzahl ist es, bei der räumlichen Analyse z. B. die Anfachungsrichtung $\phi = 1/\tan(b_\mathrm{i}/a_\mathrm{i})$ festzulegen. Das entspricht einer Festlegung des Verhältnisses der Imaginärteile a_i und b_i von a und b.

Es sei darauf hingewiesen, dass die zeitliche Stabilitätsanalyse einfacher durchzuführen ist, als die räumliche Stabilitätsanalyse. Im Eigenwertproblem Gl. (7.17), (7.18), (7.19) und (7.20) kommt ω linear vor, während a bzw. b quadratisch erscheinen. Die Lösung eines quadratischen Eigenwertproblems erfordert einen größeren Rechenaufwand als die eines linearen. Daher ist nach einer Möglichkeit gesucht worden, um zeitliche Anfachungen in räumliche Anfachungen umzurechnen. Solch eine Beziehung ist von Gaster (1962) für $b = 0$ angegeben worden. Die Umrechnung der zeitlichen Anfachung ω_i einer räumlich periodischen Welle mit gegebener reeller Wellenzahl a_r und zugehöriger Frequenz ω_r auf eine zeitlich periodische Welle (d. h. $\omega_\mathrm{i} = 0$) mit der gleichen Wellenzahl a_r und Frequenz ω_r erfolgt nach:

$$a_\mathrm{i} \approx -\frac{1}{\frac{\partial \omega_\mathrm{r}}{\partial a_\mathrm{r}}} \cdot \omega_\mathrm{i}.$$

Man erhält die räumliche Anfachung der Welle aus der zeitlichen Anfachung der zugeordneten Welle mit Hilfe der *Gruppengeschwindigkeit* $\partial\omega_\mathrm{r}/\partial a_\mathrm{r}$. Die obige Beziehung wird *Gaster-Transformation* genannt. Sie ist nur für kleine Anfachungsraten a_i, ω_i gültig, da sie auf einer Taylor-Entwicklung der Dispersionsrelation $D(a,\omega) = 0$ um den Indifferenzzustand $a_\mathrm{i} = 0$, $\omega_\mathrm{i} = 0$ beruht.

Das Differentialgleichungssystem der Störungen Gl. (7.17), (7.18), (7.19) und (7.20) hat eine bemerkenswerte Eigenschaft. Es lässt sich zu einer einzigen Differentialgleichung vierter Ordnung zusammenfassen, die eine Erweiterung der bereits bekannten Orr-Sommerfeld-Gleichung (Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Gl. (32)) für schief laufende Wellen darstellt. Man eliminiert $\hat{u}$, $\hat{v}$ und $\hat{p}$. Mit der *Squire-Transformation*

$$a_\varphi \cdot u_{0,\varphi} = a \cdot u_0 + b \cdot v_0, \quad a_\varphi^2 = a^2 + b^2,$$

die eine Koordinatendrehung in Ausbreitungsrichtung darstellt, erhält man die *Orr-Sommerfeld-Gleichung*:

$$\left[(a_\varphi \cdot u_{0,\varphi} - \omega) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2}{z^2} - a_\varphi^2 \right) - a_\varphi \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u_{0,\varphi}}{z^2} + \mathrm{i} \cdot \frac{1}{Re_d} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2}{z^2} - a_\varphi^2 \right)^2 \right] \hat{w} = 0, \quad (7.25)$$

mit den Randbedingungen für $\hat{w}$:

$$\hat{w} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}z} = 0 \quad \text{für} \qquad z = z_\mathrm{w}, \quad (7.26)$$

$$\hat{w} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}z} = 0 \quad \text{für} \qquad z \to \infty. \quad (7.27)$$

Wird in der Gl. (7.25) a_φ gegen a und $a_\varphi \cdot u_{0,\varphi}$ gegen $a \cdot u_0$ ersetzt, so entspricht dieses dem zweidimensionalen Fall (Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Gl. (32)) mit der charakteristischen Länge $d = \sqrt{\nu \cdot x / u_\delta}$. Dafür ist in Abb. 7.10 dem Stabilitätsdiagramm eine typische Eigenfunktion ergänzt. Es sei darauf hingewiesen, dass der Amplitudenverlauf der Vertikalkomponente $|\hat{w}|$ der Störgeschwindigkeit zehnfach vergrößert dargestellt ist. Sie ist im Vergleich zur Amplitude der Stromabkomponente $|\hat{u}|$ klein. Die größten Störamplituden werden für $\hat{u}$ in unmittelbarer Wandnähe angenommen. Die Störungen sind beim Erreichen der Grenzschichtdicke keineswegs abgeklungen. Sie ragen weit aus der Grenzschicht heraus. Das scharfe Minimum von $|\hat{u}|$ bei einem Wandabstand von etwa $2/3$ der Grenzschichtdicke δ ist nur eine Folge der Betragsbildung. Tatsächlich besitzt die Funktion $\hat{u}$ hier einen Nulldurchgang, der mit einem Phasenwechsel der Welle um 180° verbunden ist.

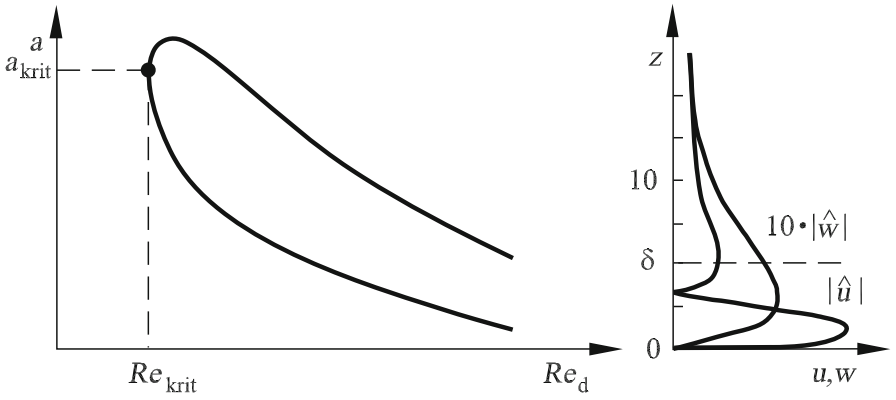


Abb. 7.10 Stabilitätsdiagramm für reelle a, $b = 0$ für die ebene Platte und Eigenfunktion für $a = 0.16$, $b = 0$, $Re_{krit} = 302$

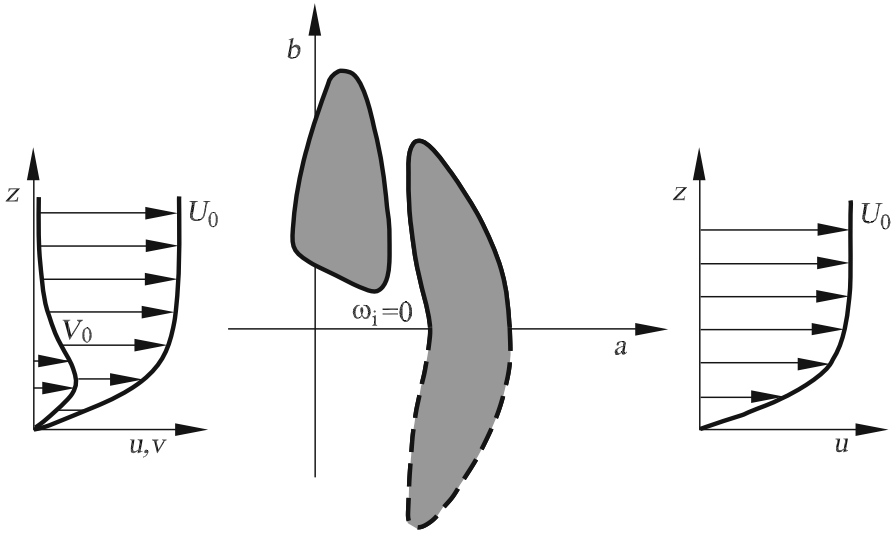


Abb. 7.11 Instabile Wellen für Grenzschichten mit und ohne Querströmungskomponente $V_0(z)$

In einer dreidimensionalen Grenzschichtströmung treten neben den *Tollmien-Schlichting-Wellen* aufgrund der Querströmungskomponente des Grundprofils *Querströmungsinstabilitäten* auf. Welche Wellen die Querströmungsinstabilitäten aufweisen, ist mit Hilfe des Instabilitätsgebietes für feste Reynolds-Zahl im Wellenzahldiagramm Abb. 7.11 dargestellt. Die Tollmien-Schlichting-Wellen treten stromab erst bei Überschreiten der kritischen Reynolds-Zahl auf. Man beachte, dass die Reynolds-Zahl in diesem Bereich aber sehr klein ist und damit ein starker, in diesem Fall dämpfender Reibungseinfluss vorliegt. Zum Vergleich

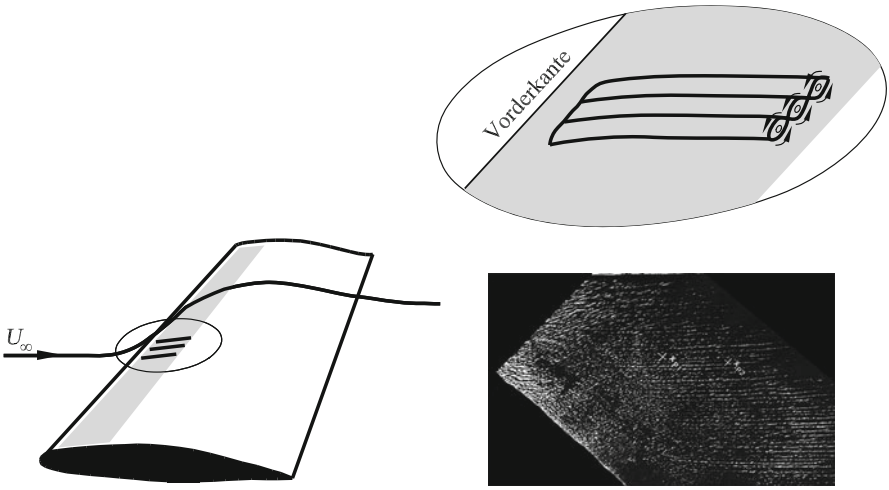


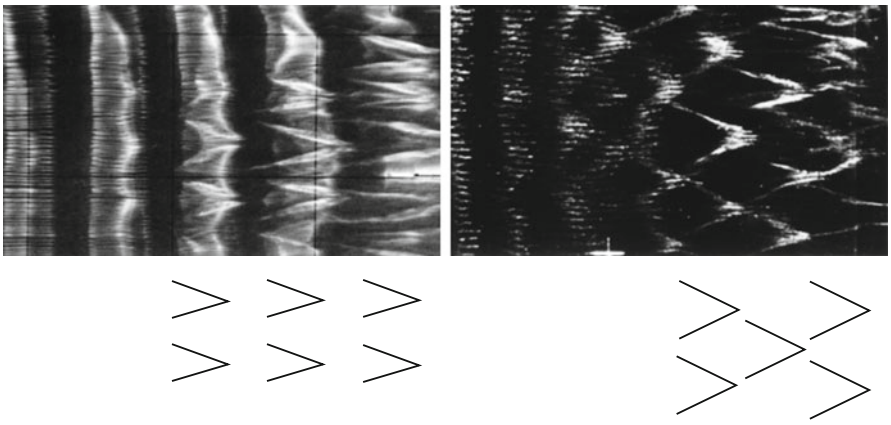
Abb. 7.12 Instabile Querströmungswirbel in dreidimensionaler Grenzschicht, Kohama 1989

ist auch ein Instabilitätsgebiet für das zweidimensionale Geschwindigkeitsprofil $U_0(z)$ eingezeichnet. Es ist typisch, dass in zweidimensionalen Grenzschichten Instabilitätswellen mit wesentlich größeren Schräglaufwinkeln $\varphi = 1/\tan(b/a)$ als in der dreidimensionalen Grenzschicht existieren. Der charakteristischen Form wegen wird die Indifferenzkurve $\omega_\mathrm{i} = 0$ im Wellenzahldiagramm für zweidimensionale Grenzschichten auch als Nieren-Kurve bezeichnet.

Typisch für Querströmungsinstabilitäten ist ebenfalls das Auftreten von stehenden Störwirbeln. Da die Kreisfrequenz dieser stehenden Störwellen $\omega_\mathrm{r} = 0$ ist, werden sie auch als 0-*Hertz-Moden* bezeichnet. Ihre Wellennormalen stehen fast senkrecht auf der Stromabrichtung am Grenzschichtrand. Im Gegensatz zu den Görtler-Längswirbeln rotieren sie gleichsinnig. Diese stehenden Wellen können im Experiment sichtbar gemacht werden und hinterlassen z. B. bei einer Visualisierung mit in die Strömung eingebrachtem Rauch eine deutliche Struktur in der Stromabrichtung (siehe Abb. 7.12). Die am stärksten angefachten Störwellen sind jedoch in der Regel instationär, laufen unter großem Winkel φ, d. h. quer zur Stromabrichtung x.

Sekundäre Instabilitäten

Bisher wurden *primäre Instabilitäten* betrachtet. Der Grundzustand $\boldsymbol{U}_0$ wurde durch die Instabilität abgelöst, die man mit $\boldsymbol{U}_1$ bezeichnet. Für die *sekundäre Instabilität* ist $\boldsymbol{U}_1$ der neue Grundzustand, der wiederum gegenüber Störungen instabil werden kann. Daraus ergibt sich der Störungsansatz für die sekundären Instabilitäten $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_1 + \varepsilon \cdot \boldsymbol{u}''$. In der Plattengrenzschicht wird die zweidimensionale Tollmien-Schlichting-Welle durch die dreidimensionalen Λ-Strukturen abgelöst. Die Wirbellinien, die im Falle der Primärstörung noch geradlinig verliefen, verformen sich dabei wellenförmig in der Spannweitenrichtung y. Diese Krümmung der



fundamentaler Transitionstyp
Saric 1994

subharmonischer Transitionstyp
Bippes 1972

Abb. 7.13 Sekundäre Instabilitäten in der transitionellen Plattengrenzschicht

Wirbellinien ist die Ursache einer sofort einsetzenden wirbeldynamischen Induktion und Selbstinduktion, die die Wirbellinien noch weiter verformt und dabei streckt. Im Verlaufe dieses Vorgangs bilden sich die charakteristischen Λ-*Strukturen* aus (Abb. 7.13). Die Stabilitätsanalyse der sekundären Instabilitäten erfolgt mit der *Floquet-Analyse*.

Der erste Schritt einer sekundären Stabilitätsanalyse besteht, in Analogie zur primären Stabilitätsanalyse, in der Berechnung der zu untersuchenden Grundströmung $\boldsymbol{U}_1(x, y, t)$. Um einer sekundären Stabilitätsanalyse zugänglich zu sein, muss $\boldsymbol{U}_1$ bezüglich einer wandparallelen Raumrichtung $\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_x \cdot \cos(\varphi) + \boldsymbol{e}_y \cdot \sin(\varphi) = \boldsymbol{e}_{\xi'}$ mit der Koordinate ξ' periodisch und bezüglich der zweiten Parallelrichtung $\boldsymbol{e}_{\varphi+90°} = -\boldsymbol{e}_x \cdot \sin(\varphi) + \boldsymbol{e}_y \cdot \cos(\varphi) = \boldsymbol{e}_\eta$ homogen sein $\boldsymbol{U}(\xi', \eta, t) = \boldsymbol{U}(\xi' + \lambda, t)$. Die Grundströmung muss überdies in einem geeigneten Koordinatensystem $\xi = \xi' - c \cdot t$ als stationäre Strömung beschreibbar sein (Abb. 7.14), d. h. $\boldsymbol{U}_1(\xi', t) = \boldsymbol{U}_1(\xi) = \boldsymbol{U}_1(\xi + \lambda)$. Es können damit solche Grundströmungen $\boldsymbol{U}_1(z) = \langle \boldsymbol{U}_1 \rangle(z) + \boldsymbol{U}_1^p(\xi, z)$ auf sekundäre Instabilität untersucht werden, die sich zusammensetzen aus einer räumlich bzgl. ξ gemittelten parallelen Grenzschichtströmung $\langle \boldsymbol{U}_1 \rangle(z) = 1/\lambda \cdot \int_\xi^{\xi+\lambda} \boldsymbol{U}_1(\xi, z) \cdot \mathrm{d}\xi$ und einem räumlich periodischen Anteil $\boldsymbol{U}_1^p(\xi, z)$. Dieser periodische Anteil besitzt keinen räumlichen Mittelwert, jedoch eine endliche Amplitude $A(z) = \sqrt{(1\mathrm{d}/\lambda \cdot \int_\xi^{\xi+\lambda} |\boldsymbol{U}_1^p(\xi, z)|^2 \cdot \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}}$, d. h. man nimmt nicht an, dass A infinitesimal klein ist. Die Grundströmung ist in einem Koordinatensystem (x, y, z) gegeben, in dem wie üblich die x-Achse in die Richtung der Hauptströmung $\langle \boldsymbol{U}_1 \rangle(z)$ (bei dreidimensionalen Grenzschichtströmungen typischerweise am Grenzschichtrand) weist. Man wählt in der Folge ein der periodischen Richtung $\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\xi$ angepasstes Koordinatensystem. Dieses ergibt sich aus der Transformation:

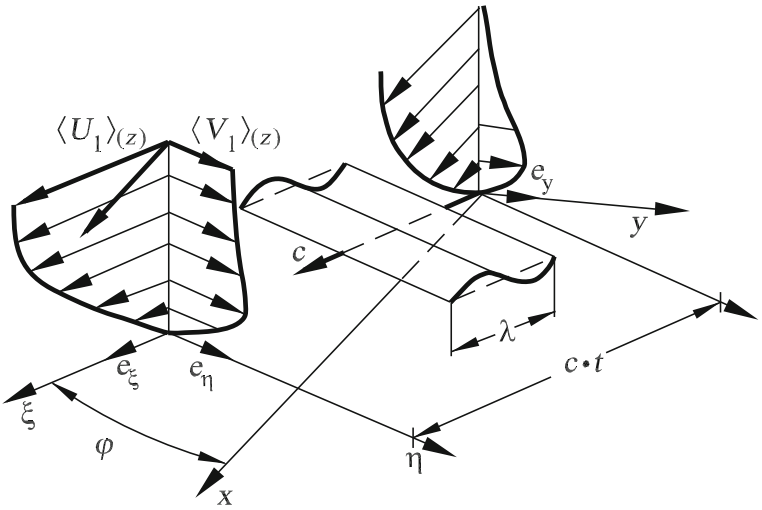


Abb. 7.14 Koordinatensystem zur Beschreibung der sekundären Instabilität

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} c \cdot t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \boldsymbol{c} \cdot t}. \tag{7.28}$$

Im (ξ, η, z)-Koordinatensystem erscheint damit $\boldsymbol{U}_1(x, y, z, t)$ also als stationäre Strömung $\boldsymbol{U}_1(\xi, z)$. In einer zweidimensionalen Grenzschichtströmung $\boldsymbol{U}_0(z)$ ist $\boldsymbol{c} = (c_{\mathrm{TS}}, 0, 0)$, mit der Phasengeschwindigkeit c_{TS} stromab laufenden Wellenstörung. Eine solche Wellenstörung kann im Verlaufe des Amplitudenwachstums einer Tollmien-Schlichting-Welle (Abb. 7.8) entstanden sein. Obwohl die Grundströmung $\boldsymbol{U}_1$ hier nicht wirklich periodisch ist (schwaches Anwachsen der Grenzschichtdicke stromab, schwaches räumliches Amplitudenwachstum von Störwellen) nimmt man Periodizität an.

Die *Störungsdifferentialgleichungen* der sekundären Instabilitäten werden hier nicht explizit aufgeführt. Man findet sie z. B. in Oertel und Delfs (2005). Sie sind nicht homogen in t und η. Daher kann man in diesen Richtungen Exponentialansätze für die Lösung ansetzen:

$$\boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{V}(\xi, z) \cdot \exp(\mathrm{i} \cdot \beta \cdot \eta) \cdot \exp(\sigma \cdot t). \tag{7.29}$$

Dabei ist $\beta = \beta_{\mathrm{r}}$ als reelle Zahl vorgeben. Damit wird die Periodenlänge der zu berechnenden Störung bezüglich η, d. h. senkrecht zur Wellennormalen der primären Instabilität festgelegt (Abb. 7.15). Für den Wert $\beta = 0$ liegt der Sonderfall zweidimensionaler sekundärer Instabilität vor. Die Konstante $\sigma = \sigma_{\mathrm{r}} + \mathrm{i} \cdot \sigma_{\mathrm{i}}$ ist im

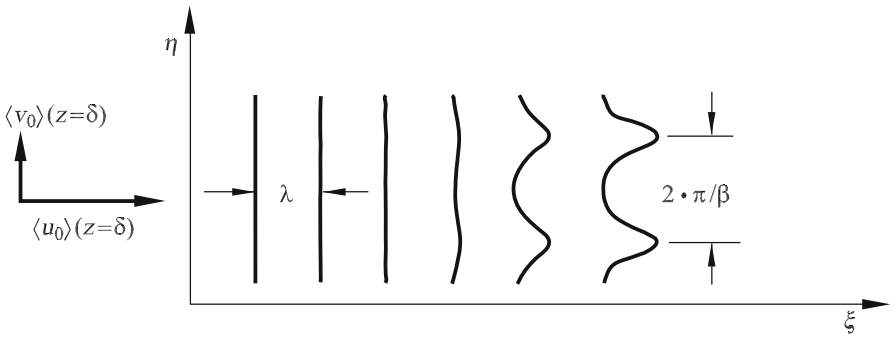


Abb. 7.15 Zur Bedeutung des Parameters β bei der Beschreibung der sekundären Instabilität der Grenzschicht

Allgemeinen komplex. Der Realteil σ_r hat in Analogie zur primären Stabilitätsanalyse die Bedeutung einer zeitlichen Anfachungsrate.

Das Charakteristische der Störungsdifferentialgleichungen der sekundären Instabilität ist die ξ-Periodizität der auftretenden Koeffizienten. Die Periodenlänge ist $\lambda = 2{\cdot}\pi/a_\varphi$ mit $a_\varphi = \sqrt{a_\mathrm{r}^2 + b_\mathrm{r}^2}$. Lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten können, ähnlich wie lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, mit Hilfe eines allgemeinen *Floquet-Ansatzes* gelöst werden:

$$\boldsymbol{V}(\xi, z) = \exp(\mathrm{i} \cdot \alpha \cdot \xi) \cdot \tilde{\boldsymbol{V}}(\xi, z), \qquad \tilde{\boldsymbol{V}}(\xi, z) = \tilde{\boldsymbol{V}}(\xi + \lambda, z). \tag{7.30}$$

Die Lösung besteht offenbar aus einer noch zu bestimmenden Funktion $\tilde{\boldsymbol{V}}(\xi, z)$ mit derselben Periode wie die Koeffizienten der Differentialgleichung, multipliziert mit einem Exponentialansatz $\exp(\mathrm{i} \cdot \alpha \cdot \xi)$, in dem eine i. a. komplexe Konstante α auftritt. Man entwickelt die Funktion $\tilde{\boldsymbol{V}}(\xi, z)$ in ihre Fourier-Reihe und schreibt die Störströmung:

$$\boldsymbol{u}'' = \exp(\mathrm{i} \cdot \alpha \cdot \xi + \mathrm{i} \cdot \beta \cdot \eta) \cdot \exp(\sigma \cdot t) \cdot \sum_{\mathrm{j}=-\infty}^{\infty} \hat{\boldsymbol{V}}_\mathrm{j}(z) \cdot \exp(\mathrm{i} \cdot j \cdot a_\varphi \cdot \xi). \tag{7.31}$$

Setzt man die Komponenten (u'', w'') aus $\boldsymbol{u}''$ in das Störungsdifferentialgleichungssystem ein und ordnet nach den einzelnen Exponentialtermen $\exp(\mathrm{i} \cdot (\mathrm{j} \cdot a_\varphi + \alpha) \cdot \xi)$, so entsteht ein System aus unendlich vielen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen in z für die Fourier-Koeffizienten $\hat{\boldsymbol{V}}_\mathrm{j}(z)$. Dieses Gleichungssystem hat wiederum nur für bestimmte Kombinationen (α, β, σ) nichttriviale Lösungen, die man wieder als Eigenfunktionen der sekundären Stabilitätstheorie bezeichnet.

Zur konkreten Berechnung dieses Eigenwertproblems der sekundären Stabilitätstheorie wird die Fourier-Reihe in Gl. (7.31) nach endlich vielen Gliedern N abgebrochen. Numerische Untersuchungen haben gezeigt, dass für $\varphi = 0$ nur zwei Glieder $\mathrm{j} = 0, 1$ hinreichend genaue Ergebnisse liefern. In Fällen schräg

laufender Primärwellen, insbesondere bei Querströmungswellen, müssen mehrere Moden verwendet werden.

In Analogie zur primären Stabilitätstheorie unterscheidet man zwischen zeitlicher und räumlicher Analyse. Eine zeitliche Stabilitätsrechnung führt man durch, indem α, β reell vorgegeben und σ als in der Regel komplexe Zahl aus dem Eigenwertproblem bestimmt wird. Der Realteil σ_r des zeitlichen Eigenwertes σ hat die Bedeutung der zeitlichen Anfachungsrate. Die Grundströmung $\boldsymbol{U}_1$ ist instabil gegenüber Sekundärstörungen, wenn das Eigenwertproblem der sekundären Stabilitätsanalyse einen Wert $\sigma_\mathrm{r} > 0$ liefert. Der Imaginärteil ist die gemeinsame Kreisfrequenz aller Moden der sekundären Eigenfunktion $\boldsymbol{u}''$ im mitbewegten System (ξ, η, z). Für $\sigma_\mathrm{i} = 0$ stellen alle Moden der sekundären Eigenfunktion bezüglich (ξ, η, z) stehende Wellen dar. Sie ruhen relativ zur Primärwelle.

Man spricht von einer räumlichen Stabilitätsanalyse, wenn im unbewegten System $(\xi + c \cdot t, \eta, z)$ keine zeitliche Anfachung zugelassen wird, sondern ein zeitlich periodischer Vorgang vorausgesetzt wird. Im bewegten System setzt man dazu σ_r nicht gleich Null, sondern $\sigma_\mathrm{r} = \alpha_\mathrm{i} \cdot c$. Die im stehenden Koordinatensystem angesetzte Frequenz Ω erscheint im bewegten Koordinatensystem als $\sigma_\mathrm{i} = \Omega - \alpha_\mathrm{r} \cdot c$ und wird als solche in die Gleichungen eingesetzt.

Fundamentale Moden der sekundären Instabilitäten (Abb. 7.13) liegen mit folgendem Fourier-Reihenansatz vor:

$$\boldsymbol{u}''_\mathrm{f} = \exp(-\alpha_\mathrm{i} \cdot \xi + \mathrm{i} \cdot \beta \cdot \eta) \cdot \exp(\sigma \cdot t) \cdot \sum_{\mathrm{j}=-\infty}^{\infty} \hat{\boldsymbol{V}}_\mathrm{j}(z) \cdot \exp(\mathrm{i} \cdot \mathrm{j} \cdot a_\varphi \cdot \xi). \quad (7.32)$$

Typisch für diese Instabilitätsform ist, dass sie dieselbe Periode bezüglich ξ wie die Grundströmung besitzt.

Vom subharmonischen Transitionstyp spricht man bei dem Ansatz:

$$\boldsymbol{u}''_\mathrm{s} = \exp(-\alpha_\mathrm{i} \cdot \xi + \mathrm{i} \cdot \beta \cdot \eta) \cdot \exp(\sigma \cdot t) \cdot \sum_{\mathrm{j}=-\infty}^{\infty} \hat{\boldsymbol{V}}_\mathrm{j}(z) \cdot \exp(\mathrm{i} \cdot (\mathrm{j} + \frac{1}{2}) \cdot a_\varphi \cdot \xi). \quad (7.33)$$

Diese sekundäre Instabilität besitzt die doppelte Periodenlänge wie die Grundströmung.

Die zeitliche sekundäre Eigenwertanalyse zeigt, dass die größte Anfachungsrate und damit die dominante Eigenlösung in beiden Fällen für $\sigma_\mathrm{i} = 0$ auftritt. Das Gesamte durch die Moden $\hat{\boldsymbol{V}}_\mathrm{j}$ der sekundären Eigenfunktion dargestellte System von Wellen ist stationär bezüglich der primären Tollmien-Schlichting-Welle endlicher Amplitude. Die Sekundärmoden koppeln sich in die Bewegung der Primärwelle ein, wodurch sie offenbar die meiste Störenergie aufnehmen können. Man bezeichnet diesen Zustand auch als *phasengekoppelt*. Welche der Eigenformen tatsächlich am Beginn des Transitionsvorgangs angenommen wird, hängt stark vom anfänglichen Störspektrum ab. Für kleine Amplituden $A \lesssim 2\,\%$ der Tollmien-Schlichting-Welle sind die Anfachungsraten der subharmonischen sekundären Instabilität am größten

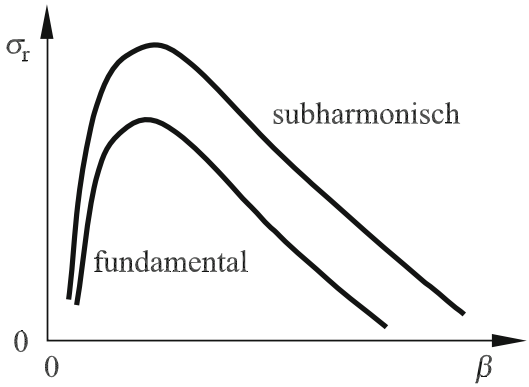


Abb. 7.16 Anfachungsrate bei fundamentaler und subharmonischer Resonanz einer zweidimensionalen Grenzschicht

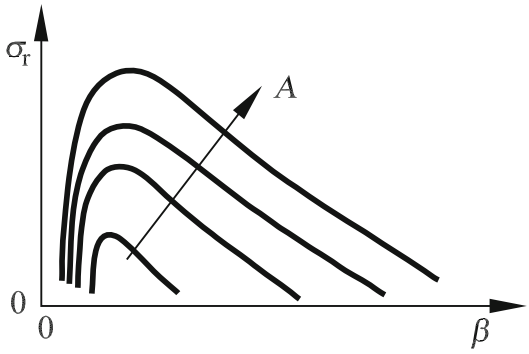


Abb. 7.17 Wachstum der sekundären Anfachungsraten mit der Primäramplitude

und die des fundamentalen Typs am kleinsten (Abb. 7.16). Die Verhältnisse ändern sich, sobald große Amplituden der Primärstörung $A \gtrsim 2\,\%$ vorliegen. Dann dominiert die fundamentale Resonanz gegenüber den anderen Formen.

Die typischen maximalen Anfachungsraten der sekundären Instabilitäten selbst bei kleinen Amplituden $A \approx 1\,\%$ sind wesentlich größer als primäre Anfachungsraten. Es ist insofern gerechtfertigt, die Primärstörung als lokal periodisch mit eingefrorener Amplitude A zu betrachten, denn A ändert sich nur wenig während die sekundären Moden starke Anfachung erfahren. Entscheidend ist die Größe der Primäramplitude, nicht so sehr ihre Änderung.

Die sekundäre Instabilität existiert nach Abb. 7.17 für ein ganzes Band von Querwellenzahlen β, dessen Breite mit größer werdender Primäramplitude A wächst. Die durch β bestimmte Breite der transitionellen Strömungsstrukturen ist daher keineswegs eindeutig festgelegt sondern kann, je nach Anregung, höchst unterschiedlich ausfallen. Es ist auffällig, dass für zu kleine β die sekundären Anfachungsraten für die Blasiussche Plattengrenzschichtströmung drastisch auf Null abfallen.

Die fundamentalen Moden nach Gl. (7.32) enthalten im Gegensatz zu den anderen Moden einen aperiodischen Anteil. Diese Teilwelle ist von ξ unabhängig und

ihre Wellennormale weist in Richtung der η-Koordinate. Das heißt, sie repräsentiert in η periodische Längswirbel. Diese Wirbel rotieren paarweise gegensinnig, was aus der Symmetrie des Strömungsfeldes $\boldsymbol{U}_1$ bezüglich der ξ, z-Ebene folgt. Die Struktur der Längswirbel wird auch als *peak-valley-Struktur* bezeichnet. In den Ebenen $\eta = \eta_p$, in denen die Wirbel Aufwärtsgeschwindigkeiten induzieren, wird langsames wandnahes Fluid in hohe Schichten z mit relativ großer mittlerer Geschwindigkeit transportiert. Dadurch kommt es zu starker Scherung, die die Störungsentwicklung begünstigt. Daher heißt $\eta = \eta_p$ *peak-Ebene*. Die gegenüber der peak-Ebene um eine halbe Breite π/β verschobenen Ebenen bei $\eta = \eta_v = \eta_p \pm \pi/\beta$, werden als *valley-Ebenen* bezeichnet um anzudeuten, dass die Störungsentwicklung hier sehr viel schwächer ist als in der peak-Ebene.

Die sekundäre Stabilitätsanalyse in *dreidimensionalen Grenzschichten* zeigt, dass im Falle von *Querströmungswirbeln* in der Grenzschicht eines schiebenden Flügels die zeitliche sekundäre Anfachung σ_r von der gleichen Größenordnung ist wie die primären Anfachungsraten. Überdies haben Grenzschichtaufdickung und Wandkrümmung einen starken Einfluss auf die Stabilitätseigenschaften dieser Strömung in Vorderkantennähe, so dass die entsprechenden Ergebnisse hauptsächlich qualitativen Charakter haben. Die Abb. 7.18 zeigt die Momentanstromlinien einer Sequenz der oszillatorischen sekundären Instabilität in Ausbreitungsrichtung

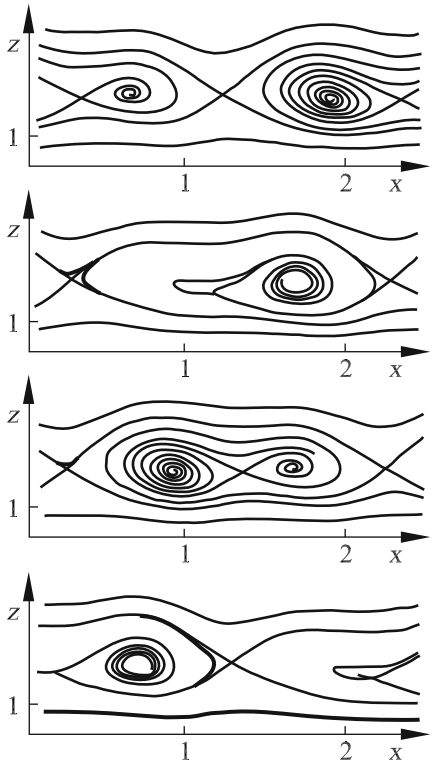


Abb. 7.18 Sequenz einer Periode von Momentanstromlinien der sekundären Querströmungswellen in Schnitten längs der Ausbreitungsrichtung der primären Störwellen und senkrecht zur Wand, Fischer und Dallmann 1987

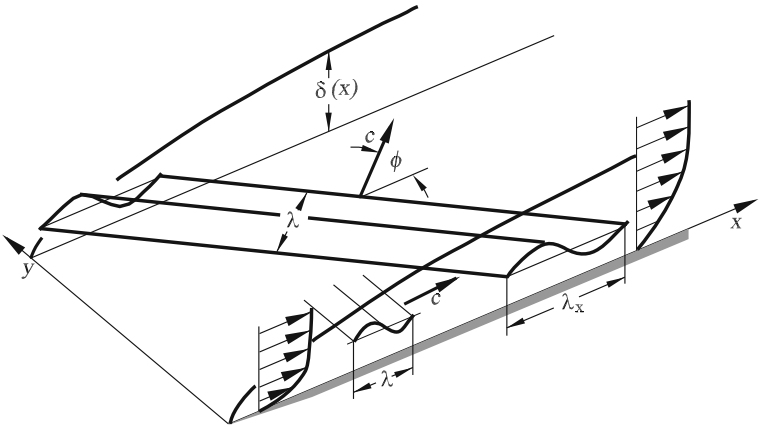


Abb. 7.19 Aufdickungseffekt bei schräg laufenden Wellen

der Querströmungswellen. Es zeigt sich, dass die sekundären Störwellen um den primären Querströmungswirbel oszillieren und sich periodisch abschwächen und verstärken.

Stabilität nichtparalleler Grenzschichtströmungen

Bisher wurde die lokale Stabilitätsanalyse beschrieben. Dabei wurde die Veränderung der Grenzschicht in Richtung der Strömung vernachlässigt. In diesem Abschnitt wird die Stabilitätsanalyse auf nichtparallele Strömungen ausgedehnt. Dabei sei angemerkt, dass der Einfluss der sich in den schichtparallelen Richtungen ändernden Strömungsverhältnisse auf die Störungsentwicklung sehr stark von der Art der Störung abhängt. Entscheidend bei der Wirkung der Grundströmungsänderung auf die Störung ist offenbar, wie stark diese Änderung im Verlaufe einer Störwellenlänge ist. Man betrachtet dazu beispielsweise die Blasiussche Plattengrenzschichtströmung der Abb. 7.19, deren Grenzschicht $\delta(x)$ in Stromrichtung x aufdickt. Bei gegebener Wellenlänge $\lambda = 2 \cdot \pi / \sqrt{a_\mathrm{r}^2 + b_\mathrm{r}^2}$ wird die Grenzschichtaufdickung eine umso stärkere Wirkung auf die Störwelle haben, je größer der Schräglaufwinkel $\varphi = 1/\tan(b_\mathrm{r}/a_\mathrm{r})$ der Welle bezüglich x ist. Denn der Wellenlängenabschnitt $\lambda_x = 2 \cdot \pi / a_\mathrm{r} = \lambda / \cos(\varphi)$ in der Strömungsrichtung x nimmt mit φ stark zu. Besonders im Grenzfall quer laufender Störwellen, d. h. $\varphi = 90°$, stellt die Parallelströmungsannahme der lokalen Analyse einen ganz erheblichen Eingriff in die tatsächlichen physikalischen Gegebenheiten dar.

Zwei prinzipiell unterschiedliche Vorgehensweisen zur *Stabilität nichtparalleler Strömungen* sind entwickelt worden. Einer dieser Ansätze stellt eine direkte Erweiterung der lokalen Stabilitätsanalyse mit analytischen Mitteln dar. Er führt die zuvor beschriebene Methode der multiplen Skalen weiter und ergibt Korrekturterme aus der Berücksichtigung der Nichtparallelitätseffekte ausschließlich am betrachteten Ort. Der zweite Ansatz geht von der Parabolisierung der Grundgleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (95)) und der

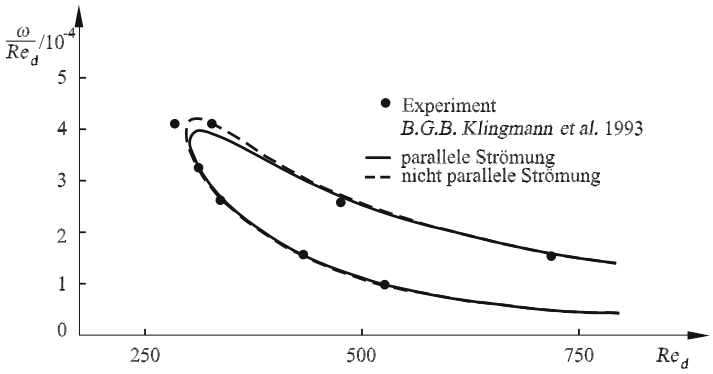


Abb. 7.20 Stabilitätsdiagramm der Tollmien-Schlichting-Wellen für parallele und nichtparallele Grenzschichtströmungen

daraus abgeleiteten Störungsdifferentialgleichungen aus. Dieser Ansatz hat den Vorteil, dass die Historie der Störungsentwicklung stromauf vom betrachteten Ort berücksichtigt wird. Beide Vorgehensweisen beinhalten für parallele Grundströmungen den Spezialfall der lokalen Analyse.

Die Stabilitätsanalyse zeigt, dass die Grenzschichtaufdickung eine generell destabilisierende Wirkung auf Störwellen hat, insbesondere im Bereich kleiner Reynolds-Zahlen (siehe Abb. 7.20). Das heißt, dass bei gegebener Frequenz die räumliche Anfachung unter Berücksichtigung der Nichtparallelität der Grundströmung stärker ist als unter der Parallelströmungsannahme. Das gilt insbesondere für gegenüber der Hauptströmungsrichtung schräg laufende Wellen, bei denen die Wellenlängenkomponente in Stromabrichtung große Werte besitzt. Der Effekt tritt besonders stark für Störwellen hervor, deren Wellennormale senkrecht zur Hauptströmung in Spannweitenrichtung y zeigen. Auch auf die Querströmungsinstabilität hat die Nichtparallelität der Grundströmung eine stark anfachende Wirkung. Die Anfachungsrate von instabilen Störwellen in kompressiblen Grenzschichtströmungen wird ebenfalls wesentlich vergrößert, da kompressible Grenzschichten infolge der Aufheizung des Mediums in Wandnähe durch Volumenausdehnung stärker aufdicken als inkompressible Grenzschichten.

Es kann gezeigt werden, dass die Effekte aus Wandkrümmung und der Krümmung der Wellenfronten (Divergenz oder Konvergenz der Wellennormalen) häufig die räumliche Anfachungsrate ebenso stark beeinflussen wie die Nichtparallelität der Grundströmung. Einen deutlichen Einfluss hat die Krümmung etwa auf die Querströmungsinstabilitäten in der Nähe der Vorderkante eines schiebenden Tragflügels, wo eine starke konvexe Wandkrümmung vorliegt. Die konvexe Wandkrümmung stabilisiert solche Störwellen und wirkt in diesem Fall der anfachungsverstärkenden Nichtparallelität der Grundströmung entgegen. Im Sinne einer konsistenten Theorie müssen beide Effekte hier gleichzeitig berücksichtigt werden.

Ergänzend zur Stabilitätsanalyse hat sich die direkte Simulation des Transitionsprozesses bis hin zur turbulenten Grenzschichtströmung durch numerisches

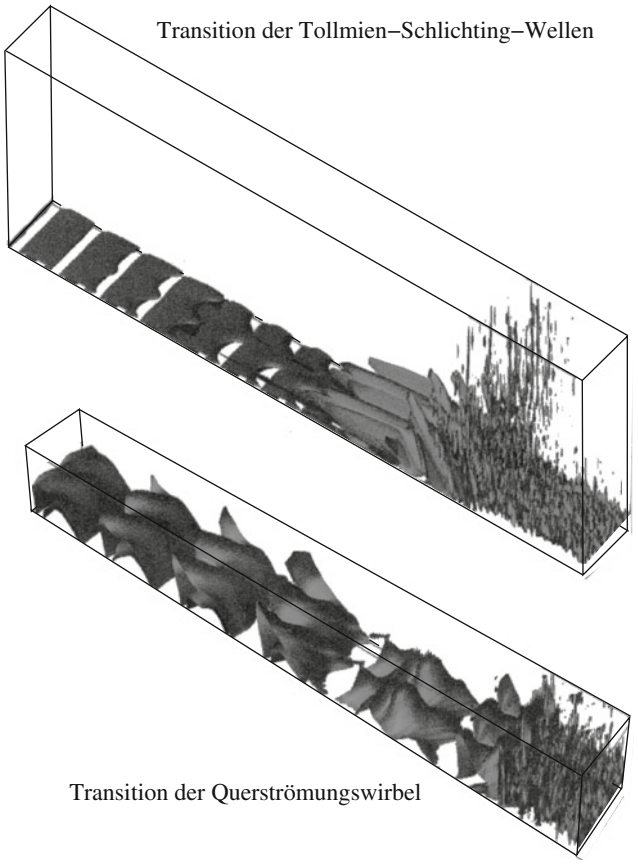


Abb. 7.21 Laminar-turbulenter Übergang in der kompressiblen Flügel-Grenzschicht, $M_\infty = 0.62$, $Re_l = 26 \cdot 10^6$

Lösen der vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (73)) durchgesetzt. In Abb. 7.21 sind die Simulationsergebnisse der *Tollmien-Schlichting-Transition* und der *Transition der Querströmungswirbel* in einer dreidimensionalen Flügelgrenzschicht der Mach-Zahl $M_\infty = 0.62$ und der Reynolds-Zahl $Re_l = 26 \cdot 10^6$ dargestellt. Es sind Isoflächen der Drehung $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ gezeichnet. Der Transitionsprozess der Tollmien-Schlichting-Wellen beginnt mit ebenen stromab laufenden Wellen. Es folgt entsprechend der Abb. 7.8 die Überlagerung dreidimensionaler Störungen und die Ausbildung von Λ-Strukturen (fundamentaler Transitionstyp). Die Λ-Strukturen sind Bereiche lokaler Scherung und Übergeschwindigkeit in der Spitze. Die Λ-Strukturen sind spannweitig periodisch aufgereiht und bilden mehrere Reihen periodisch hintereinander angeordnet. Mit der Entstehung der Λ-Strukturen ist das Auftreten hoher freier Scherschichten verbunden. Dies sind weit von der Wand abgehobene lokale Maxima der Schubspannung. Im weiteren Verlauf der Transition zerfallen die hohen

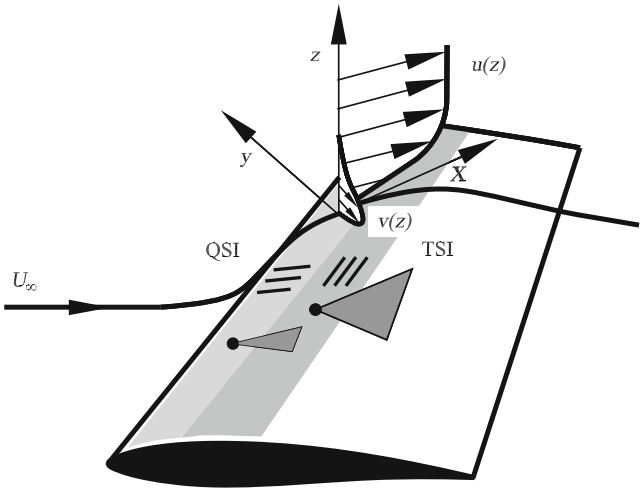


Abb. 7.22 Lokale Querströmungs (QSI)- und Tollmien-Schlichting-Instabilitäten (TSI) in der dreidimensionalen Grenzschicht eines Pfeilflügels

Scherraten in zunehmend kleinere Strukturen wodurch schließlich der turbulente Endzustand erreicht wird. Der Zerfall der Scherschichten erfolgt innerhalb von Wellenlängen der Tollmien-Schlichting-Wellen.

Die Mechanismen des Transitionsprozesses der Querströmungswirbel sind ähnlich. Man erkennt ebenfalls die Ausbildung der Λ-Strukturen verbunden mit hohen Scherraten und Schwankungen der Störgrößen in den Spitzen. Im Endstadium der Transition bilden sich Längswirbel, die innerhalb eines kurzen Abstandes in die turbulente Grenzschichtströmung zerfallen.

Lokale Störungen

Die Abb. 7.22 zeigt die Prinzipskizze lokaler Störungen der Tollmien-Schlichting-Transition und der Transition von Querströmungsinstabilitäten in der dreidimensionalen Grenzschicht eines gepfeilten transsonischen Tragflügels. Beide Instabilitäten sind in der Grenzschicht konvektiv instabil.

Im Folgenden wird das Verhalten von dreidimensionalen Wellenpaketen in einer dreidimensionalen kompressiblen Grenzschicht analysiert. Im Gegensatz zur Untersuchung zweidimensionaler Störungen, erscheint nun auch die Querwellenzahl b in der Dispersionsrelationsfunktion $D(\omega, a, b)$, deren Nullstellen ja gerade durch diejenigen Kombinationen (ω, a, b) bestimmt sind, die Lösungen des Stabilitätseigenwertproblems für komplexe ω, a, b repräsentieren. Es wird die Amplitudenänderung eines Störwellenpakets im ebenen mit der Gruppengeschwindigkeit (U, V) bewegten Bezugssystem betrachtet. Die dann beobachtete Frequenz ist

$$\omega' = \omega - a \cdot U - b \cdot V. \tag{7.34}$$

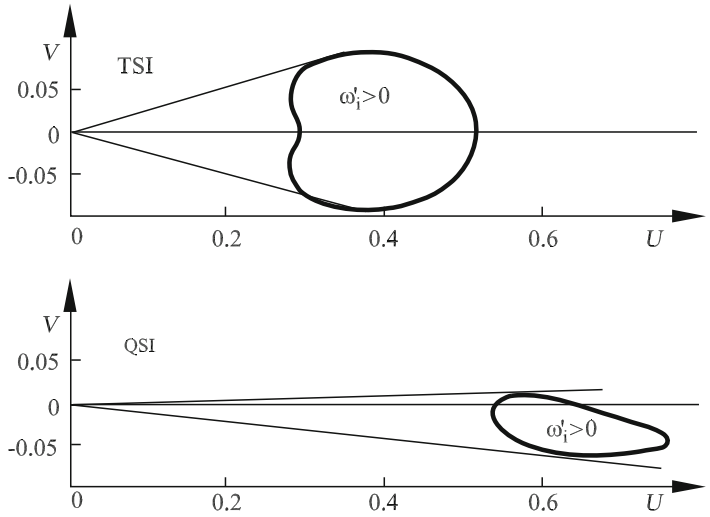


Abb. 7.23 Gebiete relativer zeitlicher Anfachung der Tollmien-Schlichting- (TSI) und Querströmungsinstabilitäten (QSI) in der Gruppengeschwindigkeitsebene (U, V)

Wie im zweidimensionalen Fall müssen wieder diejenigen Wellen gesucht werden, deren Gruppengeschwindigkeitsvektor $(\partial\Omega/\partial a, \partial\Omega/\partial b)$ reell ist. Die komplexe Frequenzfunktion $\Omega(a, b)$ ist dabei definiert durch $D(\Omega(a, b), a, b) \equiv 0$. Es wird dann die relative zeitliche Anfachung ω_i' nicht nur als Funktion von $U = \partial\Omega/\partial a$, sondern auch über der Gruppengeschwindigkeitsebene (U, V) aufgetragen. Die Höhenlinie $\omega_i' = 0$ ist dabei von besonderem Interesse, da sie dasjenige Gebiet der (U, V)-Ebene umschließt, in dem $\omega_i' > 0$ ist. Dieses Gebiet repräsentiert daher diejenigen Störanteile, die zeitasymptotisch zum Wellenpaket beitragen. Die Abb. 7.23 enthält Diagramme mit den Gebieten relativer zeitlicher Anfachung an zwei repräsentativen Positionen des Pfeilflügels. Das untere Diagramm der Abbildung zeigt eine typische Kurve $\omega_i' = 0$, die für eine Position in der Nähe der Vorderkante des Pfeilflügels, d. h. im Bereich der Querströmungsinstabilität, berechnet wird. Das obere Diagramm zeigt die entsprechende Kurve an einer Flügelposition weiter stromab, an der Tollmien-Schlichting-Instabilitäten vorliegen. Wir erkennen, dass beide Instabilitäten konvektiven Charakter besitzen, denn in beiden Fällen ist der Ursprung $(U, V) = (0, 0)$ nicht im Gebiet $\omega_i' > 0$ enthalten. Die anwachsende Störenergie wird in beiden Fällen stromab transportiert. Die Tangenten an die Kurven $\omega_i' = 0$ bestimmen den Winkelbereich, innerhalb dessen auf Dauer die anwachsenden Störungen verbleiben. Im Falle der Querströmungs-Instabilitäten ist der Winkelbereich sehr eng und liegt im Wesentlichen stromab. Man beachte, dass die dazugehörigen Instabilitäten Wellen darstellen, die praktisch senkrecht dazu verlaufen. Hieran erkennt man besonders deutlich den fundamentalen Unterschied zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit.

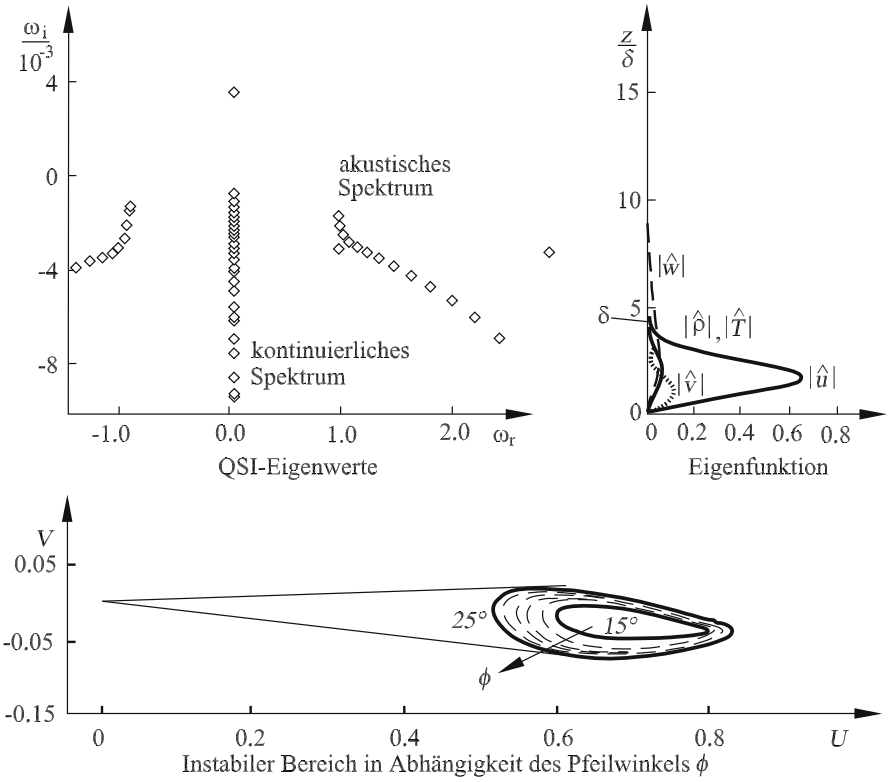


Abb. 7.24 Eigenwerte, Eigenfunktionen und instabile Bereiche der Querströmungsinstabilität in den kompressiblen Grenzschichten von Pfeilflügeln, $M_\infty = 0.78$, $Re_l = 26 \cdot 10^6$

Nachdem festgestellt wurde, dass die Querströmungsinstabilitäten konvektiver Natur sind und dass sie stromab einen räumlich ausgedehnten Transitionsvorgang einleiten, sind entsprechende räumliche Wellenpaketanfachungsraten ($g_{\max} = [(\omega_i - a_i \cdot U - b_i \cdot V)/\sqrt{U^2 + V^2}]_{\max}$) für die transsonische Pfeilflügelgrenzschicht berechnet worden. In Abb. 7.24 sind die Eigenwerte, Eigenfunktionen und instabilen Bereiche von Wellenpaketstörungen für Pfeilwinkel von 15° bis 25° dargestellt. Die Vermeidung der Querströmungsinstabilität ist wesentlich bei der Entwicklung eines gepfeilten Laminarflügels, da unerwünschterweise der durch sie hervorgerufene Transitionsvorgang schon in unmittelbarer Nähe der Vorderkante beginnt. Mit Hilfe der Methoden der Stabilitätsanalyse kann der Bereich der Auslegungsparameter eines Pfeilflügels bestimmt werden, innerhalb dessen aktive Beeinflussungsmaßnahmen noch nicht benötigt werden (natürliche Laminarhaltung). Einer dieser Parameter ist der Pfeilwinkel. Bei sonst gleicher Anströmung wird es einen kritischen Pfeilwinkelbereich geben, innerhalb dessen der Transitionsvorgang von TSI-dominiert auf QSI-dominiert wechselt (Abb. 7.22). Hiermit findet man auf stabilitätstheoretischem Wege eine Grenze für den Pfeilwinkel eines Laminarflügels.

2.3 Übergang zur Turbulenz

Erfolg versprechende Fortschritte wurden mit der Vorstellung aufeinander folgender Instabilitäten gewonnen, die potenziell zur Turbulenz führen können. Landau hat einen quasi-periodischen Weg zur Turbulenz vorgeschlagen auf dem sukzessive neue Instabilitäten entstehen mit sukzessiv höheren Anfachungsraten, die in ihrem Häufungspunkt zur Turbulenz führen Landau und Lifschitz (1991). Andere Möglichkeiten wie der Weg über wenige angefachte Instabilitäten Ruelle und Takens (1971) und der Weg über die Periodenverdoppelung von Feigenbaum (1978) wurden in unterschiedlichen nichtlinearen Systemen für die zeitliche Strukturbildung (Chaos) vorgeschlagen. Diese Szenarien nichtlinearer zeitlicher Strukturbildungen wurden in der Tat in vielen nichtlinearen Systemen einschließlich Strömungen nachgewiesen. Daraus hat man eine gewisse Universalität geschlossen, obwohl die Erscheinung der Turbulenz eine *zeitliche* und *räumliche Strukturbildung* beinhaltet. Es scheint so, dass Fortschritte im Verständnis der Turbulenz nur auf einer individuellen Basis zu erreichen sind, in der Erwartung, dass daraus ein verallgemeinertes Konzept abgeleitet werden kann.

Das Bild des Überganges zur Turbulenz ist derzeit nicht einheitlich. Es scheint so, dass der Übergang nicht alleine durch eine Folge von Instabilitäten erklärbar ist sondern, dass die nichtlineare Wechselwirkung mit Anfangsbedingungen wie der Strömungsbeeinflussung (receptivity) durch Störungen in der freien Anströmung mitbestimmt werden. So können z. B. bei der Plattengrenzschicht die einzelnen Stufen der Instabilitäten, die zur Turbulenz führen, übergangen (by passed) werden und es bilden sich von lokalen Störungen ausgehend direkt dreidimensionale Wellenpakete, die zu turbulenten Spots führen.

Die Abb. 7.10 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten und Abb. 7.8 zeigen die einzelnen Transitionsstufen, wenn im Experiment die Störungen der Anströmung und die Anfangsbedingungen sorgfältig kontrolliert werden. Der Übergang zur Turbulenz beginnt in der Grenzschicht mit den Tollmien-Schlichting-Wellen, die bis zu einer endlichen Amplitude anwachsen. Stromab bilden sich sekundäre Instabilitäten aus, die in Spannweitenrichtung dreidimensionale Störungen verursachen. Diese Spannweitenvariation bildet sich im Windkanalexperiment nur langsam aus. Sie kann künstlich angefacht werden, wenn entsprechend dem Experiment von Klebanoff et al. (1962) periodisch ein dünner Klebestreifen auf die Wand aufgebracht wird. Die Experimente haben die Ausbildung von Λ-Strukturen mit gegensinnig rotierenden Wirbeln in der Grenzschicht und Berg- und Talvariationen in den Geschwindigkeitsschwankungen nachgewiesen. Die Beobachtungen von Kovasznay et al. 1962 zeigen, dass mit der Anfachung der dreidimensionalen Spannweitenstörungen die Ausbildung lokaler dünner Scherschichten in der Grenzschicht verbunden ist. Stuart (1963) hat gezeigt, dass die Konvektion und Wirbelstreckung der Λ-Wirbel Bereiche hoher Scherung mit Wendepunkt-Geschwindigkeitsprofilen verursachen, die bereits reibungsfrei instabil sind. Diese Instabilitäten in den lokalen Scherschichten führen zu höherfrequenten instabilen Moden, die neue Wirbelstärken sowohl in longitudinaler als auch in Spannweitenrichtung zur Folge haben.

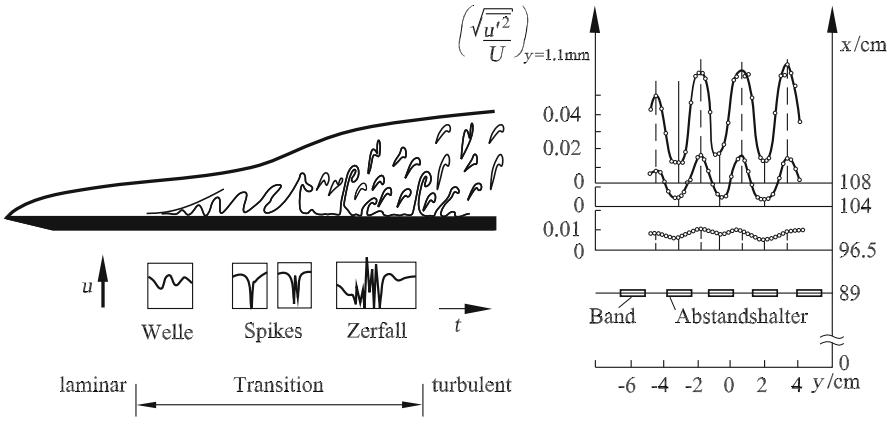


Abb. 7.25 Transition in der Grenzschicht einer längs angeströmten Platte, Nishioka et al. 1990 und Klebanoff et al. (1962)

Abb. 7.26 Turbulenzspot, Falco (1980)

Das Durchlaufen dieser Wirbelstrukturen führt in einer Messprobe zu *Spikes* im Geschwindigkeitssignal, wie dies von Nishioka et al. 1990 in einem zweidimensionalen Kanal nachgewiesen wurde (Abb. 7.25). Dort wo in der Grenzschicht *Spikes* auftreten, entstehen *turbulente Spots* Emmons (1951). Diese turbulenten Spots sind geometrisch begrenzte Bereiche turbulenter Strömungen, die in die laminare Grenzschichtströmung eingebettet sind (Abb. 7.26). Diese wachsen stromab an und vereinigen sich mit weiteren Turbulenzspots bis die voll turbulente Strömung erreicht ist. Die Anfachungsrate isolierter Spots ist proportional der Quadratwurzel von der Differenz der Reynolds-Zahl der Grenzschichtströmung und der Reynolds-Zahl am Ort des Entstehens der turbulenten Spots.

Eine ausführlichere Beschreibung des laminar-turbulenten Übergangs in Grenzschichten findet sich bei Narasimha (1985) und Boiko et al. (2002).

Für eine gewisse Klasse von Strömungen, die zuvor beschrieben wurden, ergibt die Verknüpfung der Stabilitätstheorie mit dem Experiment Fortschritte für das Verständnis des Ursprungs der Turbulenz. Es gibt jedoch andere Strömungssituationen, bei denen die lineare Stabilitätstheorie kein geeigneter Einstieg in das Verständnis des Beginns der Turbulenz darstellt. In diesen Fällen beginnt die Turbulenz plötzlich und es folgt eine grundsätzlich andere Abfolge von Transitionsereignissen. Es erscheinen unterschiedliche Turbulenzskalen mehr oder weniger zur selben Zeit.

Die *Strömung durch Rohre* ist ein Beispiel für diese Art von Transition. Solche Strömungen sind normalerweise stabil gegen alle linearen Störungen und der Transitionsprozess weist keine reproduzierbare kritische Reynolds-Zahl auf, wie man sie von der linearen Stabilitätstheorie kennt. Die Reynolds-Zahl, bei der die Transition zur Turbulenz stattfindet, hängt von der Art, Form und Größe der Störung ab. Das Einsetzen der Turbulenz hängt also von der Anfangsstörung und der Reynolds-Zahl ab. Diese müssen einen bestimmten Wert überschreiten und spielen eine komplementäre Rolle. Bei größeren Reynolds-Zahlen wird eine kleinere Störamplitude benötigt und umgekehrt. Wird das Rohr über eine scharfe Kante an einen Kessel mit glatten Wänden angeschlossen, beträgt die kritische Reynolds-Zahl etwa 2800. Ist der Einlass abgerundet und relativ störungsfrei, können Übergangs-Reynolds-Zahlen bis zu 10^5 beobachtet werden. Ist der Einlass jedoch unregelmäßig, fällt der Wert bis 2300 ab (siehe Abschn. 4 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten). Dann repräsentiert die Transitions-Reynolds-Zahl Bedingungen, bei denen große Anfangsstörungen kontinuierlich neu entstehen. Im Gegensatz zur Rohrströmung die für alle Reynolds-Zahlen linear stabil ist, wird die Kanalströmung bei der kritischen Reynolds-Zahl 5772 linear instabil (Lin (1945); Orszag (1971)). Experimente zeigen jedoch, dass der laminar-turbulente Übergang bei geringeren Reynolds-Zahlen auftritt.

Diesen Transitionsmechanismus bezeichnet man als *unterkritisch*, da er unterhalb des mit der linearen Stabilitätstheorie berechneten Wertes stattfindet. Bereits Orr (1907) hat erkannt, dass die linearen Störungen in einer Scherströmung für einige Zeit anwachsen können, selbst wenn sie als stabil berechnet werden. Dies steht nicht im Widerspruch zur Stabilitätscharakteristik, die eine Aussage über die asymptotische Anfachung von Störungen macht. Zahlreiche Autoren haben sich später diesem Thema gewidmet (siehe Grossmann (2000)).

Die Abb. 7.27 zeigt schematisch eine Skizze der unterkritischen Transition. Mit ansteigen der Amplitude A der Anfangsstörungen vollzieht sich der Übergang zur Turbulenz bei kleineren Reynolds-Zahlen Re_l. Dabei wird die Transitionslinie als Einhüllende aller Stabilitätslinien der unterschiedlichen Störungen interpretiert.

Heute weiß man, dass die *Nichtnormalität* der Eigenfunktionen des linearen Störoperators verantwortlich für das transitionelle Anwachsen der Störungen ist. Dieser Sachverhalt verbunden mit der nichtlinearen Wechselwirkung zwischen Störungen endlicher Amplituden führen zum Einsetzen der Turbulenz. Die Nichtnormalität der linearen Dynamik führt im Allgemeinen zu einer Bündelung der Eigenrichtungen. Störungen, die in dieses Bündel passen, zerfallen mit der Zeit. Andere Störungen wachsen zunächst mit einer Anfachungsrate an, die von der Nichtnormalität und der Reynolds-Zahl abhängt, bis sie schließlich nach diesem transienten Anwachsen

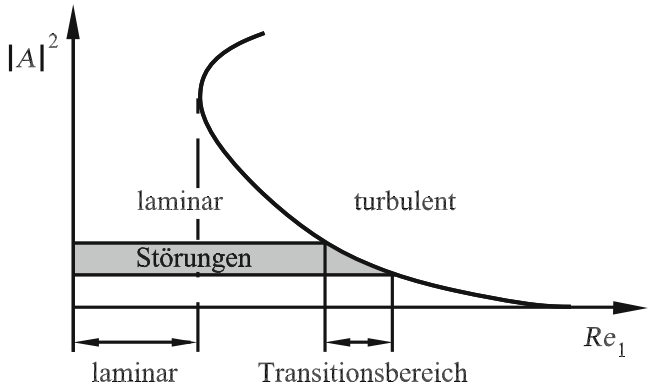


Abb. 7.27 Unterkritische Transition

zerfallen. Ist jedoch die transiente Anfachung groß genug, kann die Nichtnormalität nicht weiter vernachlässigt werden und die Dynamik des Transitionsprozesses wird drastisch verändert. Es entsteht eine irreguläre Schwankung des Geschwindigkeitsfeldes.

Der *Transitionsprozess* kann in unterschiedliche Stadien eingeteilt werden. Das erste Stadium wird gewöhnlich mit *receptivity* bezeichnet, das mit Störungen in der Strömung verknüpft ist. Dieser *Receptivity*-Bereich ist für die Vorhersage der Transition der schwierigste Bereich. Er verlangt die Kenntnis des Störungsspektrums und der Mechanismen, wie die Störungen die anwachsenden Eigenmoden beeinflussen können.

Das zweite Stadium des Transitionsbereiches ist durch das lineare Anwachsen der primären Instabilitäten gekennzeichnet, wie es für die Tollmien-Schlichting-Wellen in Grenzschichten beschrieben wurde. In diesem Stadium werden kleine Störungen angefacht, bis sie eine Größenordnung erreichen, bei der die nichtlineare Wechselwirkung der Moden dominiert. Die Anfachung der kleinen Störungen (Eigenmoden) kann entweder exponentiell oder mit nichtmodalem Anwachsen optimaler Störungen oder als nichtmodale Antwort auf eine erzwungene Transition erfolgen.

Hat eine Störung eine endliche Amplitude erreicht, führt sie oft zu einem gesättigten Zustand, der die Strömung direkt in einen anderen Turbulenzzustand überführt. Dieser neue Turbulenzzustand kann dann als Grundzustand für sekundäre Instabilitäten aufgefasst werden, wie sie in Abschn. 2.2 beschrieben wurden.

Das Stadium der *sekundären Instabilitäten* kann als neue Instabilität einer komplexeren Strömung betrachtet werden. Dieses Stadium des Transitionsprozesses läuft wesentlich schneller ab als das Stadium der primären Instabilitäten.

Das letzte Stadium des Transitionsprozesses ist der Zerfallsprozess, bei dem die Nichtlinearität und die Instabilitäten höherer Ordnung eine anwachsende Zahl von

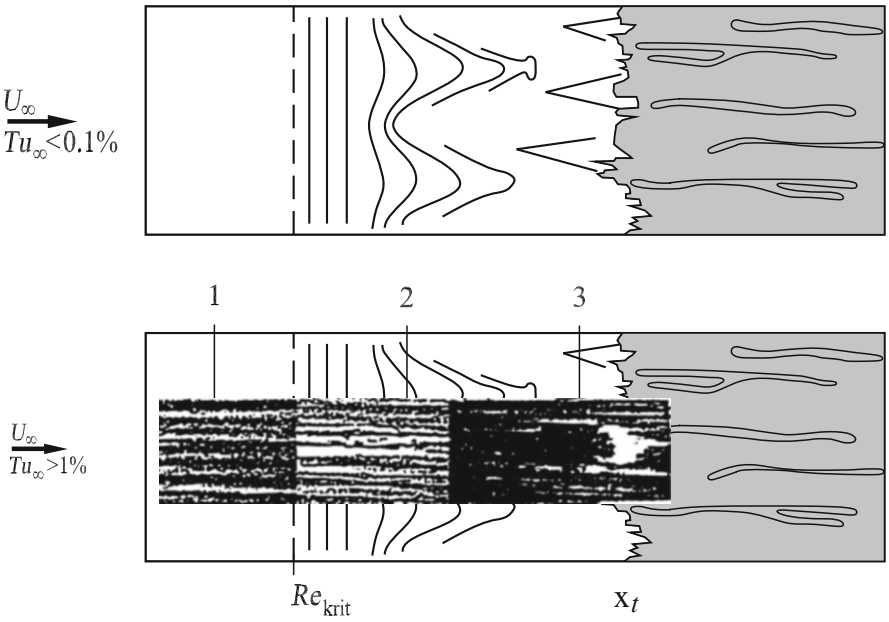


Abb. 7.28 Transitionsszenarien bei geringem und hohem Turbulenzgrad der Anströmung, Alfredsson et al. (1996)

Turbulenzskalen und Frequenzen im Strömungsfeld verursachen. Der Zerfallsprozess vollzieht sich oft in wesentlich kleineren Zeitskalen als die primären und sekundären Instabilitäten.

Die Unterteilung des Transitionsprozesses in die fünf Stadien, receptivity, lineares Anwachsen der Störungen, nichtlineare Sättigung, sekundäre Instabilitäten und Zerfall in die turbulente Strömung stellt ein idealisiertes Bild des Übergangs zur Turbulenz dar. Es beschreibt jedoch in vielen praktischen Fällen, selbst für komplexe Strömungen bei technischen Anwendungen, den Transitionsprozess korrekt.

Die Abb. 7.28 zeigt ein Beispiel eines Transitionsszenarios bei hohem Turbulenzgrad der Anströmung im Vergleich zur Transition in der Plattengrenzschicht, wie er in Abb. 7.3 und in Abschn. 2.1 beschrieben wurde. Im ersten Stadium der Experimente von Alfredsson et al. (1996) bilden sich Längsstrukturen von lokalisierten wirbelbehafteten Störungen in der Grenzschicht aus. Die Längsstrukturen modellieren die Grenzschicht in Spannweitenrichtung. Im zweiten Stadium wird die Längsstruktur von hochfrequenten Wellenpaketen und Turbulenzspots aufgrund unterschiedlicher nichtlinearer Wechselwirkungen mit Tollmien-Schlichting-Wellen und sekundären Instabilitäten begleitet. Im dritten Stadium des Transitionsprozesses wird schließlich der laminar-turbulente Übergang in der Grenzschicht durch die nichtlineare Wechselwirkung der Turbulenzspots beendet.

3 Ausgebildete Turbulenz

3.1 Die Notation der Mischungsweglänge

Die beiden Beispiele zu Beginn dieses Kapitels zeigen Beispiele *ausgebildeter* Turbulenz. In der Praxis ist es nicht erforderlich alle Details einer turbulenten Strömung zu kennen, dennoch erhält man z. B. Antworten auf die Fragen. Wie schnell wächst der Jet im Mittel an? Wie viel Pumpleistung wird benötigt, um einen bestimmten Volumenstrom durch ein Rohr zu pumpen? Wie viel Antriebsleistung wird benötigt, um ein Flugzeug zu fliegen?

Für diese Anwendungsfälle ist es nützlich, den Reynolds-Ansatz von Abschn. 4 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten anzuwenden, der die Strömungsgrößen in einen zeitlich gemittelten und einen Schwankungsterm zerlegt. Setzt man den Reynolds-Ansatz in die Navier-Stokes-Gleichungen ein, erhält man die zeitlich gemittelten Reynolds-Gleichungen (siehe Abschn. 2 des Kap. 1 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik). Diese entsprechen im Aufbau den ursprünglichen Gleichungen bis auf einen zusätzlichen turbulenten Schubspannungsterm, der ergänzend zum Reibungsterm auftritt. Mathematisch hat der turbulente Schubspannungsterm seinen Ursprung in den nichtlinearen Konvektionstermen der Navier-Stokes-Gleichungen. Physikalisch verursachen die turbulenten Schwankungen im Mittel eine Erhöhung des Impulstransportes indem von der Strömung Impuls von Ort zu Ort transportiert wird. Die *Reynoldssche Schubspannung* hat die Form $\tau_t = -\rho \cdot \overline{u' \cdot v'}$, wobei u' und v' die Schwankungen der jeweiligen Geschwindigkeitskomponenten und $\overline{u}$ und $\overline{v}$ deren zeitliche Mittelwerte darstellen. Um die Reynolds-Gleichungen lösen zu können und damit Gleichungen für den praktischen Gebrauch zu erhalten, muss man die turbulente Schubspannung τ_t in Abhängigkeit von zeitlich gemittelten Strömungsgrößen darstellen. Dieses so genannte Schließungsproblem entspricht der kinetischen Gastheorie, bei der sich der molekulare Impulstransport als makroskopische Viskosität darstellen lässt, die modelliert werden muss. Die Viskosität ist jedoch eine Stoffgröße, die gemessen werden kann. Ein derart einfacher Zusammenhang existiert jedoch in turbulenten Strömungen nicht. So wurde eine Vielzahl von Methoden entwickelt, um die Reynoldsschen Schubspannungen in Abhängigkeit der mittleren Geschwindigkeiten darzustellen (siehe Abschn. 4 des Kap. 1 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik). Die entwickelten Methoden haben in Einzelfällen einen unterschiedlichen Grad an Erfolg erzielt. Sie sind jedoch nicht universell für alle turbulenten Strömungen anwendbar. Die Ansätze variieren von der Anwendung statistischer Prinzipien oder Hypothesen, deren physikalische Bedeutung nicht sofort offensichtlich ist, bis zu mehr oder weniger transparenten physikalischen Schlussfolgerungen, die nicht immer nachvollziehbar sind.

Der einfachste intuitiv von *L. Prandtl* gewonnene physikalische Ansatz, der einigen Erfolg verspricht, ist die Vorstellung, dass Strömungselemente (Strömungsstrukturen einer bestimmten Ausdehnung) aufgrund ihrer Schwankungsbewegung Impuls in der Strömung transportieren (siehe Abschn. 5 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten). Wenn dies der Fall ist, ist es nahe liegend eine Längenskala

für den Durchmesser dieser turbulenten Strömungsstrukturen einzuführen. Diese zweite Längenskala charakterisiert den Weg auf dem sie ihre Schwankungsidentität relativ zur Umgebung beibehalten. Man kann a priori nicht zeigen, dass beide Längenskalen dieselben sind. Man erwartet aber, dass die mittlere Geschwindigkeit sich senkrecht zu den Stromlinien ändert, wie dies in Rohrströmungen der Fall ist. Wenn dann entsprechend der Abb. 16 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten ein Strömungselement vom Ort y mit der mittleren Geschwindigkeit $\overline{u}(y)$ auf einem Weg l senkrecht zur Strömung transportiert wird, ist die Differenz zwischen der ursprünglichen und neuen Geschwindigkeit $\overline{u}(y+l) - \overline{u}(y)$. In erster Näherung schreibt man dafür $l \cdot \partial\overline{u}/\partial y$. Diese Größe gibt einen Anhaltspunkt für die Schwankungsgröße u'. Die Größenordnung von v' erhält man über die Annahme, dass zwei Strömungspartikel entgegengesetzter Richtung die betrachtete Schicht mit der Relativgeschwindigkeit $2 \cdot l \cdot \partial\overline{u}/\partial y$ verlassen. Daraus resultiert die Schlussfolgerung, dass v' von der gleichen Größenordnung wie u' sein muss. Für die Mittelwertbildung $\overline{u' \cdot v'}$ muss das Vorzeichen der u- und v-Komponenten berücksichtigt werden. Es ist offensichtlich, dass beim Durchqueren einer Kontrollfläche parallel zur Wand die Anteile, die sich von der Wand wegbewegen, langsamer sind als diejenigen, die sich auf die Wand zubewegen. Daraus resultiert, dass große negative Werte von u' mit großen positiven Werten von v' verknüpft sind und große positive Werte von u' mit großen negativen Werten von v'. Demzufolge ist das Produkt $u' \cdot v'$ in beiden Fällen negativ und der neue Wert der Schubspannung ist positiv und von der Größenordnung $\rho \cdot (l \cdot \partial\overline{u}/\partial y)^2$. Wählt man den Proportionalitätsfaktor willkürlich 1, folgt daraus eine Änderung der Größenordnung von l. Folgt man der Tatsache, dass positive Schubspannungen zu positiven Werten von $\overline{u}/\partial y$ gehören und negative Schubspannungen umgekehrt zu negativen Werten von $\overline{u}/\partial y$, ergibt sich:

$$\tau' = \rho \cdot l^2 \cdot \left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right| \cdot \frac{\partial\overline{u}}{\partial y}. \tag{7.35}$$

Von diesem Näherungsausdruck schließt man, dass die Reynolds-Spannungen der turbulenten Strömung proportional dem Quadrat der Geschwindigkeitsgradienten sind. Dies führt zu der Schlussfolgerung, dass der Strömungswiderstand in einer turbulenten Strömung sich näherungsweise mit dem Quadrat der Geschwindigkeit ändert. Die Länge l wird jetzt *Prandtlscher Mischungsweg* genannt, der konzeptionell mit der mittleren freien Weglänge $\overline{\lambda}$ der kinetischen Gastheorie in Verbindung steht. Die Diskussion des Impulstransportes der großräumigen Bewegung von Strömungspartikeln entspricht der Betrachtung des Impulstransportes der Moleküle in der kinetischen Gastheorie. Wie bei der turbulenten Strömung ist die Abweichung von der mittleren Geschwindigkeit auf- und abwärts bewegter Partikel $u' = \pm\overline{\lambda} \cdot \partial\overline{u}/\partial y$. Die Quergeschwindigkeit v' ist jetzt nicht proportional zu u'. Sie ist gleich der Molekülgeschwindigkeit, die eine Konstante ist. Daraus resultiert, dass die molekularen Scherspannungen (Reibungsspannungen) sich linear proportional zu $\partial\overline{u}/\partial y$ verhalten. In Gasen ist die mittlere freie Weglänge $\overline{\lambda}$ umgekehrt proportional zur Dichte ρ, so dass der in der Definition der Zähigkeit enthaltene Faktor $\rho \cdot \overline{\lambda}$ unabhängig von der Dichte wird.

Setzt man in Gl. (7.35) $\mu_t = \rho \cdot l^2 \cdot |\partial\overline{u}/\partial y|$ erhält man $\tau' = \mu_t \cdot \partial\overline{u}/\partial y$, wobei μ_t die Dimension der Viskosität hat. Dies entspricht der Gleichung für die Reibungs- und Schubspannung $\tau = \mu \cdot \partial u/\partial y$. Man nennt jetzt den molekularen Reibungskoeffizienten μ_t *Viskositätskoeffizient* der turbulenten Strukturen, der von dem Strömungsbeispiel und der Reynolds-Zahl abhängt. Ein anderer wichtiger Unterschied zur gewöhnlichen Viskosität ist die Tatsache, dass μ_t keine Stoffeigenschaft der Strömung ist, sondern sich von Ort zu Ort im Strömungsfeld ändert. So geht sie in Wandnähe gegen Null. In der Praxis sind die Anwendungsmöglichkeiten der Viskosität der turbulenten Strukturen aufgrund der Ortsabhängigkeit beschränkt. Beim molekularen Impulstransport gibt es einen großen Unterschied zwischen der mittleren freien Weglänge und den Skalen, die den mittleren Geschwindigkeitsgradienten charakterisieren. Im Gegensatz dazu ist in der turbulenten Strömung die Mischungsweglänge gegenüber den geometrischen Ausdehnungen im Strömungsfeld nicht vernachlässigbar.

3.2 Turbulente Durchmischung

Die Turbulenz verursacht nicht nur das Anwachsen des Impulstransportes, sondern ist auch für den Austausch durch Konvektion aller Strömungsgrößen verantwortlich (Wärmetransport, Massentransport usw.). Mit einigen wenigen Ausnahmen wird im Mittel der Transport einer vorgegebenen Größe von Bereichen hoher Werte bzw. Konzentration dieser Größe zu Bereichen geringer Konzentration stattfinden. Im Fall einer Temperaturdifferenz führt dies zur turbulenten Wärmeleitung, für eine Konzentrationsdifferenz zur turbulenten Diffusion. Die insgesamt transportierte Wärmemenge pro Einheitsfläche und pro Zeiteinheit beträgt:

$$\dot{q} = -c_p \cdot k_t \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = -c_p \cdot \rho \cdot l^2 \cdot \left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right| \cdot \frac{\partial T}{\partial y}, \tag{7.36}$$

mit der in einer Einheitsmasse enthaltenen Wärmemenge $c_p \cdot T$. $c_p \cdot k_t$ ist die thermische Diffusivität. Im Fall einer chemischen oder mechanischen Mischung einer Konzentration c schreibt sich die transportierte Gesamtmasse:

$$M = -\rho \cdot D_t \cdot \frac{\partial \overline{c}}{\partial y}. \tag{7.37}$$

Es stellt sich die Frage, ob k_t und D_t den gleichen Zahlenwert wie $\nu_t = \mu_t/\rho$ besitzen in Anbetracht dessen, dass der Ausbreitungsmechanismus einer Massengröße oder einer beigemischten Substanz nicht identisch sein kann mit dem Impulstransport. Die Verhältnisse ν_t/k_t und ν_t/D_t werden als turbulente Prandtl- und Schmidt-Zahl bezeichnet (siehe Abschn. 4 des Kap. 8 ▸ Konvektive Wärme- und Stoffübertragung). Ihre Zahlenwerte hängen davon ab, ob man die turbulente Strömung in Wandnähe oder im Bereich der freien Turbulenz betrachtet.

Diese Unterschiede in den beiden Strömungsklassen sind verknüpft mit unterschiedlichen Formen der Turbulenzstruktur. Salopp ausgedrückt, dominieren in Wandnähe Strukturen deren Achsen parallel zur Strömung zeigen. In der freien Turbulenz sind die Achsen senkrecht zur Strömung ausgerichtet. Die Turbulenzstrukturen in Wandnähe leisten keinen Beitrag zum Impulstransport, während die der freien Turbulenz einen erheblichen Beitrag am Impulstransport haben. Demzufolge weisen die Verteilungen der mittleren Geschwindigkeit und der mittleren Temperatur oder Konzentration deutliche Unterschiede auf. Dass im Fall der freien Turbulenz der Wärmeaustausch gegenüber dem Impulsaustausch dominiert, wurde in Experimenten nachgewiesen. Der Temperaturausgleich hinter einem aus Rundstäben bestehenden Gitter geschieht wesentlich schneller als der Geschwindigkeitsausgleich.

Im Allgemeinen hängen der turbulente Transport und die Durchmischung stark von der Bewegung des betrachteten Fluidelementes ab. Mann kann sich vorstellen, dass sie im Wesentlichen unabhängig von den molekularen Eigenschaften sind. Dies gilt insbesondere für den Impulstransport fern von der Wand, der asymptotisch unabhängig von der Viskosität ist. Nahe der Wand spielt die Viskosität immer eine wichtige Rolle, da dort die turbulenten Schwankungen klein sind. Die turbulente Durchmischung und Entmischung weist eine schwache Abhängigkeit von der molekularen Prandt- beziehungsweise Schmidt-Zahl auf. Die Ursache dafür liegt in der Tatsache, dass die Fluidelemente die sich durch den turbulenten Hintergrund der Strömung bewegen an ihrer Front transitionelle Grenzschichten aufbauen, die indirekt die Abhängigkeit von der Prandtl- oder Schmidt-Zahl wieder einführen.

3.3 Turbulente Energiebeziehungen

Die Arbeitsleistung an einem Fluidelement erfolgt durch die Reynoldsschen Schubspannungen und den daraus resultierenden Druckdifferenzen. Diese Arbeitsleistung hält die turbulente Strömung im Fluidelement aufrecht. In diesem äußerst vereinfachten Bild ist die Arbeitsleistung am Volumenelement pro Zeiteinheit $\tau' \cdot \partial\overline{u}/\partial y$. Diese Arbeit hält die Bewegung der turbulenten Strukturen gegenüber ihrem Widerstand in der Strömung aufrecht. Die Vorwärtsbewegung eines jeden individuellen turbulente Strukturen bedeutet gegenüber der Umgebung eine turbulente Bewegung. Diese verursacht eine Turbulenz zweiter Ordnung mit turbulente Strukturen geringerer Ausdehnung, sofern die Reynolds-Zahl groß genug ist. Diese verursachen wiederum Turbulenz der dritten Ordnung. Dieser Prozess setzt sich solange fort bis turbulente Strukturen entstehen, die so klein sind, dass sie nicht mehr turbulent werden können. Die kinetische Energie dieser kleinsten turbulente Strukturen wird aufgrund der Reibung in Wärme umgewandelt. Dies legt nahe, dass in einer turbulenten Strömung ein großer Skalenbereich erzeugt wird und, dass dieser um so größer ist je größer die Reynolds-Zahl der Strömung ist.

Dieses einfache Bild einer turbulenten Strömung wurde von Richardson (1920) und insbesondere von Kolmogorov (1941) gezeichnet. Bei der Beschreibung ihrer Arbeiten ist es üblich von *turbulenten Skalen* zu sprechen, die unserem Bild der

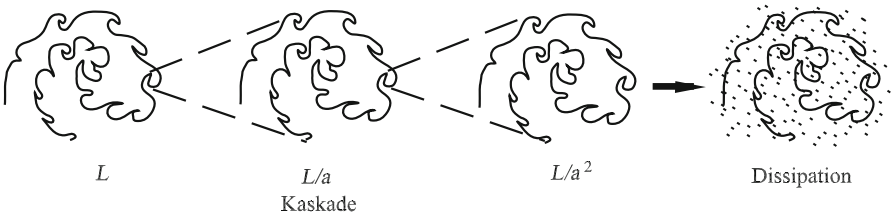


Abb. 7.29 Turbulenzkaskade

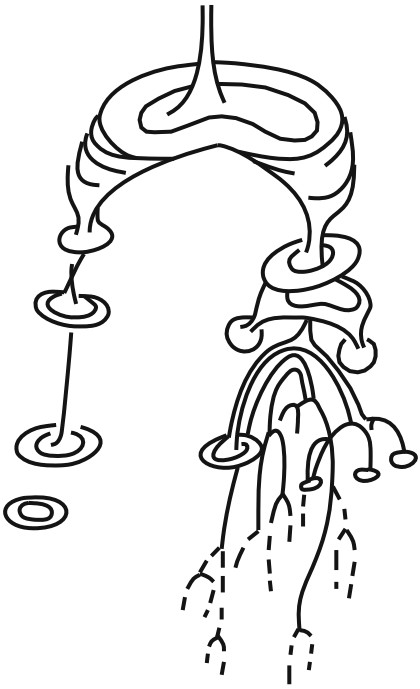


Abb. 7.30 Kaskaden des Zerfalls eines Ringwirbels, Lugt (1983)

turbulenten Strukturen entsprechen. Das Bild beinhaltet, dass die turbulente Energie bei den größten Skalen L eingebracht wird, dann in einer Kaskade immer kleiner werdenden Skalen zunächst ohne Dissipation abfällt (siehe Abb. 7.29 und 7.30) bis eine Größenordnung kleiner Skalen erreicht ist, bei denen die Geschwindigkeitsgradienten so groß geworden sind, dass die Dissipation die Bildung noch kleinerer Skalen verhindert.

Abb. 7.31 zeigt das Energiespektrum E in Abhängigkeit der Wellenzahl a der turbulenten Strukturen mit dem Bereich der Turbulenzkaskaden bei mittleren Wellenzahlen und dem Dissipationsbereich bei großen Wellenzahlen, die kleinen Wellenlängen der turbulenten Strukturen entsprechen. Die Bewegungsenergie der Strukturen dissipiert mit fortschreitender Zeit und wird in thermische Energie umgewandelt. Dieser permanent stattfindende Dissipationsprozess resultiert in einem

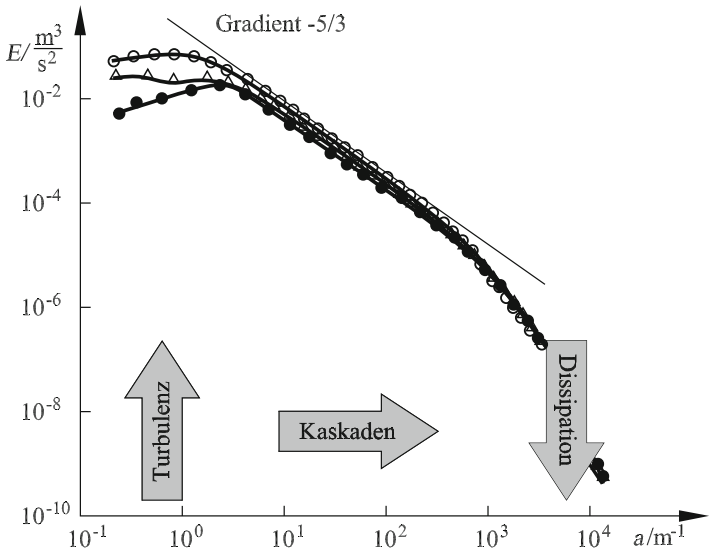


Abb. 7.31 Energiespektrum E der Turbulenz, Champagne (1978)

kontinuierlichen Verlust an kinetischer Energie. Dabei hält die Verformungsarbeit an den großen Strukturen durch die mittlere Strömung den Zustand der Turbulenz aufrecht.

Die Größenordnung der Energieumwandlung in Wärme ε pro Volumen- und Zeiteinheit wird von den gemittelten Quadraten der Produkte der partiellen Ableitungen von u', v' und w' und in Abhängigkeit von x, y und z bestimmt. Mit ε und ν können charakteristische Längen- und Geschwindigkeiten dieser kleinsten Skalen

$$l_k = (\nu^3/\varepsilon)^{0.25} \ , \ v_k = (\nu \cdot \varepsilon)^{0.25} \tag{7.38}$$

definiert werden. Diese sind als *Kolmogorov-Längen- und Geschwindigkeiten* bekannt. Man kann leicht nachvollziehen, dass die auf den charakteristischen Skalen basierende Reynolds-Zahl Eins beträgt. Dies ist konsistent mit dem Bild, dass es sich dabei um die kleinsten dynamischen Skalen der Turbulenz handelt.

Die Energie der Zwischenskalen L und η, die eine Hierarchie bilden, hat die Funktion die Energie auf die nächst kleineren Skalen zu übertragen. Deren Amplituden stellen sich so ein, dass die Energieübertragung unabhängig von der Skala ist. Da die Zeitskalen der kleineren Skalen kürzer sind, verringert sich die Energie entsprechend der Skalengröße in selbstverständlicher Weise. Kolmogorov (1941) postulierte darüber hinaus, dass die kleiner werdenden Skalen zunehmend isotrop und damit unabhängig von der Richtung der Turbulenz werden. Dieses von Kolmogorov (1941) entwickelte Bild der Turbulenz ist Grundlage der Large-Eddy-Simulation (LES) im Turbulenzmodellierungsabschnitt 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik.

Folgt man der bisherigen Diskussion, so gibt es in turbulenten Strömungen lediglich zwei interessierende Längenskalen L und η. Dies gilt nicht in Wandnähe oder wenn es mehrere Mechanismen der Turbulenzbildung gibt. Selbst wenn dies zutrifft, kann man andere Längenskalen definieren. Die Gängigste ist die so genannte *Taylor-Mikroskala* λ:

$$\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2} = \frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2} \cdot \text{konst.}\,. \tag{7.39}$$

Für den Fall der isotropen Turbulenz, die in Abschn. 4.4 behandelt wird, ist nach Taylor ε durch den Ausdruck

$$\varepsilon = 7.5 \cdot \mu \cdot \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2}$$

gegeben. Es ist nicht geklärt, ob für andere Formen der Turbulenz (Wandturbulenz, freie Turbulenz) die Dissipation dem Gradienten eines einzigen Geschwindigkeitsgradienten zugeordnet werden kann, obwohl diese Proportionalität oft benutzt wurde. Schreibt man u' anstatt $\sqrt{\overline{u'^2}}$ folgt $\varepsilon = \text{konst.} \cdot \mu \cdot (u'/\lambda)^2$. Mit $u' = l \cdot |\partial \overline{u}/\partial y|$ ergibt sich u'/l als Näherung für $|\partial \overline{u}/\partial y|$ und man kann $|\tau|$ durch $\rho \cdot u'^2$ in der Gleichung $\varepsilon = \tau' \cdot |\partial \overline{u}/\partial y|$ ersetzen. Daraus folgt:

$$\mu \cdot \left(\frac{u'}{\lambda}\right)^2 \cdot \text{konst.} = \rho \cdot \frac{u'^3}{l}\,,$$

mit $\lambda = \text{konst.} \cdot \sqrt{\nu \cdot l/u'}$.

Ist $Re_l = u' \cdot l/\nu$ die Reynolds-Zahl der Bewegung einer turbulenten Struktur, erhält man:

$$\lambda \approx \frac{l}{\sqrt{Re_l}}\,.$$

4 Klassifikation turbulenter Strömungen

Die Mischungsweglänge l variiert im Allgemeinen von Ort zu Ort. Derzeit gibt es keine Theorie für deren Berechnung, wenngleich man unter bestimmten Voraussetzungen für einige Einzelfälle zu einer guten Übereinstimmung mit Experimenten kommen kann. In vielen Fällen ist es erlaubt, die tatsächlichen Scherspannungen der Reibung gegenüber den scheinbaren Scherspannungen der Turbulenz zu vernachlässigen. In anderen Fällen wird die weitreichendere Voraussetzung gemacht, dass der Einfluss der Reibung der Größenordnung des Mischungsweges l vernachlässigbar

ist. In diesen Fällen haben wir es mit der Turbulenz eines reibungsfreien Fluids zu tun. Bei genügend großer Reynolds-Zahl wird diese Annahme gerechtfertigt sein.

Es werden zwei Fälle im Einzelnen diskutiert, die freie Turbulenz in Abschn. 4.1 und die Turbulenz entlang glatter Wände in Abschn. 4.2. Im letzteren Kapitel werden der Einfluss der Reibung, die Strömung entlang rauher Wände und die Strömung entlang einer Platte im Einzelnen behandelt. Abschn. 4.3 beschreibt geschichtete Strömungen und den Einfluss von Krümmungseffekten und schließlich Abschn. 4.4 die Turbulenz in Windkanälen. Abschn. 4.5 führt das vereinfachte Modell der zweidimensionalen Turbulenz ein und Abschn. 4.6 macht einige grundsätzliche Anmerkungen zur Rolle der Strukturen turbulenter Strömungen.

4.1 Freie Turbulenz

Im Falle einer *Mischungsschicht* eines Freistrahls hoher Reynolds-Zahl in ruhender Umgebung erscheint es plausibel, eine Mischungsweglänge für jeden Querschnitt des Freistrahls proportional zu dessen Breite $l = \alpha \cdot b$ anzunehmen. Unter b wird z. B. die Halbwertsbreite einer parabolischen Geschwindigkeitsverteilung verstanden bei der die Maximalgeschwindigkeit und die anderen Strömungsgrößen mit denen der tatsächlichen Strömung zusammenfallen. Eine solche Voraussetzung ist notwendig, da die tatsächliche turbulente Strömung ohne wahrnehmbare Grenze in das äußere ruhende Fluid diffundiert. Mit dieser Voraussetzung erhält man für α die Näherungswerte $\alpha = 0.125$.

Beobachtungen von Freistrahlen zum Beispiel der Abb. 7.1 bestätigen, dass außerhalb der unmittelbaren Ausströmung die Breite des Freistrahls proportional zum Abstand vom Ausströmort ist. Die Geschwindigkeit nimmt über diesen Abstand entsprechend ab. Im Freistrahl ist der Druck näherungsweise der Umgebungsdruck. Zieht man die Bernoulli-Gleichung in Betracht, erwartet man einen Druckanstieg im Freistrahl entsprechend der Geschwindigkeitsabnahme mit der Folge, dass der Druck am Freistrahlende reduziert werden muss und dadurch das Fluid angesaugt wird. Dies trifft jedoch in Wirklichkeit nicht zu, da die Bernoulli-Gleichung nur für reibungsfreie Strömungen gültig ist, was für den Freistrahl nicht zutrifft. Im Gegenteil, die Saugwirkung wird durch die Umströmung der Austrittsöffnung verursacht, die sich im rechten Winkel in dem Freistrahl fortsetzt. In dem sich ausbreitenden Freistrahl ist der Druck praktisch gleich dem Umgebungsdruck. Der Abfall der Geschwindigkeit im Freistrahl mit wachsendem Abstand von der Austrittsöffnung wird ausschließlich von der Reibung verursacht. Demzufolge kann die Geschwindigkeitsabnahme nicht in der Weise erfolgen, dass in jedem Querschnitt die gleiche Menge an Fluid strömt, da aus der ruhenden Umgebung Masse zuströmt. Andererseits ist der Impuls des Freistrahls $I = \rho \cdot u_1^2 \cdot \pi \cdot b^2$ auf Grund des konstanten Druckes konstant, mit der Maximalgeschwindigkeit u_1 im Querschnitt. Aufgrund von $I = \text{konst.}$ ist u_1 proportional zu $1/b$ bzw. $1/x$.

Ein anderer Fall von Bedeutung ist die Ausbreitung einer *Störung* am *Freistrahlrand* (Abb. 7.32). Am Freistrahlrand gilt $u_1 = \text{konst.}$. Setzt man wie zuvor $l = \alpha \cdot b$,

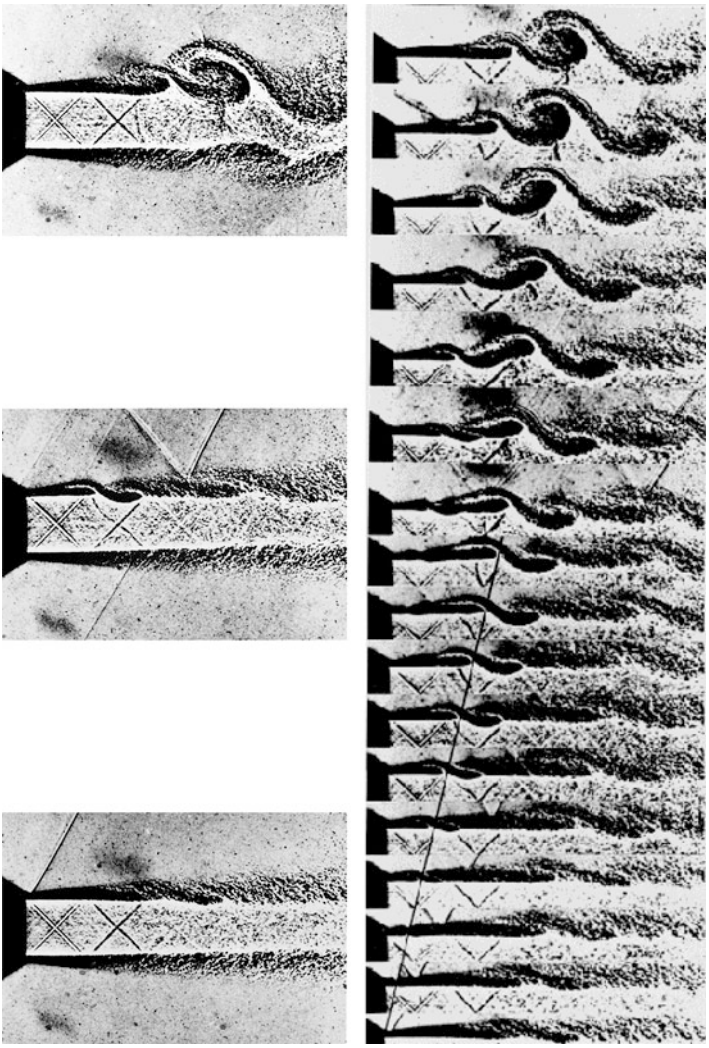


Abb. 7.32 Störung des Freistrahlrandes, Oertel sen. und Oertel jr. (1989)

erhält man $\overline{\tau'} \sim \alpha^2 \cdot \rho \cdot u_1^2$. Damit ist auch $\overline{\tau'}$ konstant. Der Impulsverlust für einen Einheitsquerschnitt ist proportional $\rho \cdot u_1^2 \cdot b$ und der dazugehörige Widerstand ist proportional $\overline{\tau'} \cdot x$, so dass wie im vorangegangenen Beispiel $b = \alpha^2 \cdot x$ gilt. Das von der ruhenden Umgebung angesaugte Fluid zeigt den gleichen Zuwachs an Impuls. Die Form der Berandung zwischen dem ungestörten Anteil des Freistrahls und dem turbulenten Bereich steht im Verhältnis 1 : 10 und ist von praktischer Bedeutung.

Ein ganz anderer Fall ist der Nachlauf hinter einem bewegten Körper, der ganz entsprechend behandelt werden kann (Abb. 47 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten). Eine Zusammenfassung der Ergebnisse findet sich in dem Buch von Hinze (1987).

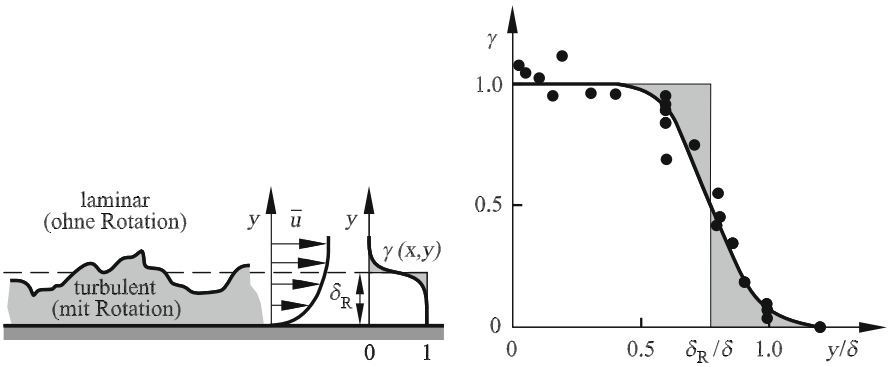


Abb. 7.33 Intermittenzfaktor γ einer turbulenten Grenzschicht, Klebanoff (1955), y ist die wandnormale Koordinate

Eine weitere wichtige Entwicklung, der wir uns widmen sollten, ist die unmittelbare Grenze zwischen dem turbulenten und nichtturbulenten Anteil einer freien Scherschicht (siehe zum Beispiel Abb. 18 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten). Die Abgrenzung ist wohl definiert und bei großen Reynolds-Zahlen relativ scharf begrenzt. Das trifft auch für Scherschichten in der Umgebung einer Wand zu (Abb. 7.33). Derartige freie Scherschichten existieren auch bei Strömungen mit Vermischung. In einer derartigen Mischungsschicht muss die Trennfläche der Turbulenz und die Trennfläche der Mischung nicht unbedingt übereinstimmen, weder zeitlich gemittelt noch zu einem gegebenen Zeitpunkt. Alle diese Trennflächen besitzen eine Vielzahl von Turbulenzskalen von den größten, die durch Instabilitäten der Scherschicht verursacht werden bis zu den kleinsten Turbulenzskalen, die durch Reibung und Diffusion bestimmt sind. Die stochastische Geometrie dieser Trennflächen kann in einem bestimmten Bereich der Skalen im Sinne von Fraktalen beschrieben werden (siehe zum Beispiel Sreenivasan (1991)).

Ein Beobachter, der sich in der Nähe der Begrenzung einer turbulenten Strömung aufhält, befindet sich zeitweise innerhalb der turbulenten Strömung und zeitweise außerhalb. Befindet er sich in der Nähe der festen Oberfläche, wird er sich für alle Zeiten im Bereich der turbulenten Strömung befinden. Dabei wird das Zeitintervall, der turbulenten Strömung immer kürzer, je weiter man sich von der Oberfäche fortbewegt. Das mittlere Zeitintervall, in dem man sich im turbulenten Bereich befindet, nennt man den äußeren Intermittenzfaktor γ. Sein Verlauf ist im rechten Bild der Abb. 7.33 gezeigt. δ_R ist eine effektive Grenzschichtdichte, die man bei gleichen Flächen unterhalb und oberhalb des Intermittenzfaktors erhält. Sie unterscheidet sich wesentlich von der Intermittenz kleiner Turbulenzskalen, die in Abschn. 5 behandelt werden.

4.2 Turbulenz in Wandnähe

Für eine *Strömung* in *Wandnähe* geht entsprechend ihrer Definition die Mischungsweglänge an der Wand gegen Null. Damit wird $\partial\bar{u}/\partial y$ im Inneren der Strömung

sehr klein aber an der Wand sehr groß. Die Abb. 8 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten zeigt den Unterschied der Geschwindigkeitsverteilung zwischen der laminaren und turbulenten Rohrströmung.

In unmittelbarer Nähe der Wand bildet sich die *viskose Unterschicht* mit $\partial\overline{u}/\partial y = \tau_w/\mu$ für die glatte Wand aus (siehe Abschn. 5 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten). Für große Reynolds-Zahlen ist die Größe von τ_w an der Wand sehr groß, so dass das Anwachsen von $\partial\overline{u}/\partial y$ in der sehr dünnen viskosen Unterschicht extrem schnell geschieht. Es sollte angemerkt werden, dass die viskose Unterschicht hochgradig gestört ist und keinesfalls als laminar angesehen werden darf. Oberflächlich betrachtet scheint es so, dass die Geschwindigkeit der turbulenten Strömung selbst an der Wand einen endlichen Wert besitzt, was bei der technischen Turbulenzmodellierung (Abschn. 4 des Kap. 1 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik) oft benutzt wird.

Vom theoretischen Standpunkt aus kann man ganz einfach davon ausgehen, dass die Schubspannung im gesamten Strömungsbereich näherungsweise konstant ist. In Wirklichkeit fällt τ mit zunehmendem Abstand von der Wand kontinuierlich ab und wird auf der Achse der Rohrströmung Null. Dennoch ist die Annahme $\tau = \tau_w =$ konst. auch für diesen Fall eine brauchbare Näherung, da der größte Anteil der Geschwindigkeitsänderung in unmittelbarer Wandnähe geschieht.

Ist die Schubspannung τ positiv, ist auch $\partial\overline{u}/\partial y$ positiv. Damit erhält man für die Schubspannung der turbulenten Strömung $\tau = \overline{\tau} + \tau'$:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \rho \cdot l^2 \cdot \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)^2 . \tag{7.40}$$

Der erste Term ist ausschließlich in Wandnähe von Bedeutung. Ist die Reynolds-Zahl groß genug, ist der zweite Term abgesehen von der Wand größer als der erste, der näherungsweise vernachlässigt werden kann. Damit folgt aus Gl. (7.40):

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = l \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} . \tag{7.41}$$

Die rechte Seite der Gl. (7.41) hat die Dimension einer Geschwindigkeit u_τ, die man Schubspannungsgeschwindigkeit nennt. Sie ist von der gleichen Größenordnung wie die turbulenten Schwankungsgeschwindigkeiten u' und v':

$$u_\tau = \sqrt{|\overline{u' \cdot v'}|}.$$

Mit den bisher gemachten Voraussetzungen ist u_τ konstant.

Setzt man bei $y = 0$ und $y = \infty$ eine unendlich ausgedehnte glatte Wand voraus, dann hängt $\overline{u}$ ausschließlich von y ab. Damit kann statt der partiellen Ableitung $\partial\overline{u}/\partial y$ die totale Ableitung $\mathrm{d}\overline{u}/\mathrm{d}y$ geschrieben werden. Da im Folgenden die Geschwindigkeitsschwankungen nicht betrachtet werden, kann der Mittelungsstrich weggelassen werden.

Das Ziel ist es, eine Gesetzmäßigkeit für die Mischungsweglänge l zu finden, die die korrekten Dimensionen wiedergibt. Macht man durch Beobachtungen gestützt, die weitere Voraussetzung, dass l von der Reibung nicht beeinflusst wird, so verbleibt als einzige verfügbare Länge der Abstand von der Wand y. Damit bleibt die einzige dimensionsbehaftete Gleichung für l:

$$l = \mathrm{k} \cdot y. \tag{7.42}$$

Damit wird der Zahlenfaktor k die universelle Konstante für turbulente Strömungen. Mit Gl. (7.41) erhält man:

$$u_\tau = \mathrm{k} \cdot y \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}. \tag{7.43}$$

Da u_τ als konstant vorausgesetzt wurde, ergibt sich:

$$u = u_\tau \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{k}} \cdot \ln(y) + \mathrm{C} \right), \tag{7.44}$$

das aus Abschn. 4 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten (Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Gl. (41)) bekannte *logarithmische Wandgesetz*. Für große Reynolds-Zahlen wird experimentell $\mathrm{k} = 0.417$ bestimmt. Dieser Wert ersetzt den von *J. Nikuradse* bereits 1932 in Rohrströmungen bestimmten Wert von 0.4. Für $y = 0$ gibt Gl. (7.44) den Wert $-\infty$ statt 0, dies ist eine Folge der Voraussetzung. Die vereinfachte Betrachtung in Wandnähe ist nicht gültig. Eine Verbesserung erreicht man mit einer genaueren Gl. (7.40) unter Berücksichtigung einer zweiten Länge ν/u_τ.

Für die Integrationskonstante C in Gl. (7.44) kann mit der Tatsache, dass die Reibung in Wandnähe an Bedeutung gewinnt, ein entsprechender Ausdruck abgeleitet werden. Der Ausdruck in der Klammer von Gl. (7.44) muss eine Zahl sein, die nicht von den problemspezifischen Einheiten abhängt. Demzufolge subtrahiert man von $\ln(y)$ die Länge ν/u_τ. Damit erhält man:

$$\mathrm{C} = \mathrm{C}_1 - \frac{1}{\mathrm{k}} \cdot \ln\left(\frac{\nu}{u_\tau}\right). \tag{7.45}$$

C_1 ist eine zweite universelle Zahl und es ergibt sich das modifizierte logarithmische Wandgesetz:

$$u = u_\tau \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{k}} \cdot \ln\left(\frac{y \cdot u_\tau}{\nu}\right) + \mathrm{C}_1 \right). \tag{7.46}$$

Da die größten Geschwindigkeitsdifferenzen in unmittelbarer Wandnähe auftreten, kann die Gl. (7.46) in guter Näherung auch in Bereichen angewandt werden, in denen τ von y abhängt. Dabei muss $u_\tau = \sqrt{\tau_\mathrm{w}/\rho}$ gesetzt werden. Damit

erhält man Geschwindigkeitswerte, die nahe an die experimentellen Werte reichen. Für diese von der Theorie abweichenden Fälle, insbesondere für die betrachtete Rohrströmung, können die gemessenen Werte u/u_τ über $\log_{10}(y \cdot u_\tau/\nu)$ aufgetragen werden. Die Kurve ist im Allgemeinen eine Gerade. Benutzt man Gl. (7.46), so haben die Experimente von *J. Nikuradse* 1932 gezeigt, dass $\mathrm{k} = 0.40$ und $\mathrm{C}_1 = 5.5$ betragen. Geht man zum $\log_{10}$ über, erhält man die Gleichung:

$$u = u_\tau \cdot \left(5.75 \cdot \log_{10}\left(\frac{y \cdot u_\tau}{\nu}\right) + 5.5\right). \tag{7.47}$$

Zagarola und Smits (1998) haben den Reynolds-Zahl-Bereich der Rohrströmung auf 36 Millionen erweitert und das logarithmische Wandgesetz bestätigt. Sie haben damit den Nikuradse Bereich von Abschn. 4 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten um einen Faktor 10 erweitert.

Es sollte angemerkt werden, dass es eine andere Beschreibungsart der Geschwindigkeitsverteilung einer turbulenten Rohrströmung in wandnähe gibt. Diese Beschreibung in seiner neuen Fassung geht auf Barenblatt (1993) zurück. der Ansatz geht davon aus, dass Gl. (7.43) aufgrund des Einflusses einer zweiten Längenskala nicht exakt gültig ist und ν/u_τ nicht verschwindet, auch wenn deren Einfluss gering ist. Anstatt Gl. (7.43) erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mathrm{k}} \cdot \frac{u_\tau}{y} \cdot \left(\frac{y \cdot u_\tau}{\nu}\right)^\beta, \tag{7.48}$$

mit der unbestimmten Konstanten β. Integriert man die Gleichung, ergibt sich ein Potenzgesetz für die Geschwindigkeitsverteilung. Barenblatt (1993) und seine Mitarbeiter haben die experimentellen Daten von Nikuradse (1932) sowie die Daten von Zagarola und Smits (1998) im Bereich kleiner Reynolds-Zahlen erneut analysiert und nachgewiesen, dass das Potenzgesetz die Geschwindigkeitsverteilung besser als das logarithmische Wandgesetz beschreibt.

Diese Diskrepanz der theoretischen Beschreibung des Wandgesetzes besteht weiter und stellt ein prinzipielles Problem einer einheitlichen Theorie der Turbulenz in Wandnähe dar. Selbst bei großen Reynolds-Zahlen und nicht in unmittelbarer Wandnähe bleibt ein schwacher Einfluss der zweiten Längenskala ν/u_τ erhalten. Deshalb wird derzeit immer noch diskutiert, ob das logarithmische Wandgesetz oder das Potenzgesetz die geeignete Beschreibung der turbulenten Strömung in der Nähe der Wand darstellt.

4.3 Rotierende und geschichtete Strömungen

Bisher wurde angenommen, dass die *Erdrotation* und eine *Dichteschichtung*, die in den meisten natürlichen Strömungen (siehe Kap. 11 ▸ Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean) vorkommen, auf die Turbulenz keinen Einfluss haben. Dies trifft für die meisten Laborexperimente zu, wenngleich auch auf der kleinräumigen Laborskala deren Einfluss wichtig werden kann. Dazu muss man nur einen

störungsfreien Badewannenwirbel betrachten, dessen Drehrichtung beim Abfluss von der Coriolis-Kraft beeinflusst wird. Großräumige Wirbel wie die Hurrikans werden eindeutig sowohl von der Erdrotation als auch von der Dichteschichtung in der Erdatmosphäre beeinflusst.

Mit der Erdrotation wirken zusätzlich die *Zentrifugal-* und *Coriolis-Kräfte* (siehe Kap. 11 ▸ Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean, Gl. (5)). Die Zentrifugalkraft wirkt immer senkrecht zur Rotationsachse und entspricht dem Druckgradienten, mit dem sie oft gemeinsam betrachtet wird. Im Falle der Strömung über eine gekrümmte Oberfläche wird die Turbulenz durch die Zentrifugalkraft entweder gedämpft oder angefacht, je nachdem ob die Geschwindigkeit stromab des Krümmungszentrums anwächst oder abfällt. Hier spielt die Wirkung der Zentrifugalkraft dieselbe Rolle wie die der Schwerkraft in geschichteten Strömungen unterschiedlicher Dichte.

Die Coriolis-Kraft, die senkrecht zur Rotationsachse und senkrecht zur Relativgeschwindigkeit wirkt, kann folgendermaßen erklärt werden. Wenn ein Fluidelement sich vom Äquator der Erde nach Norden bewegt, werden Bereiche geringeren Erdradius durchquert. Um die Winkelgeschwindigkeit zu erhalten, muss sich das Fluidelement schneller drehen und bewegt sich demzufolge nach rechts. Ein Fluidelement, das sich zum Äquator bewegt, reduziert die Winkelgeschwindigkeit und bewegt sich relativ zur Erde nach links. Auf der Südhalbkugel sind die Bewegungen des Fluidelementes genau umgekehrt. Der von der geografischen Breite abhängige Beitrag der Coriolis-Kraft ist dem Sinus der geografischen Breite proportional und ist damit eine Quelle zusätzlicher Wirbelstärke und Turbulenz in rotierenden Systemen.

Die genaue Wirkung der Coriolis-Kraft hängt von der relativen Größenordnung der anderen Kräfte ab. Das Verhältnis von Trägheits- zu Coriolis-Kräften wird *Rossby-Zahl* genannt. Eine zweite dimensionslose Kennzahl ist die Ekman-Zahl, das Verhältnis von Reibungskräften zur Coriolis-Kraft. Bei den meisten geophysikalischen Strömungen einschließlich der Atmosphäre und den Ozeanen ist die Trägheitskraft wesentlich größer als die Reibungskraft. Deshalb ist die Rossby-Zahl von Bedeutung. In Grenzschichten ist auch die Ekman-Zahl relevant.

Ein weiterer Effekt ergibt sich durch die *Dichteschichtung*. Wenn in einer horizontalen Strömung die *Dichte des Mediums* nach unten stark *abnimmt*, so sorgt die turbulente Mischung dafür, dass schwerere Schichten über leichtere geschichtet werden und umgekehrt leichtere Schichten unter schwerere. Diese Situation findet man zum Beispiel in Luft mit nach unten anwachsender Temperatur oder, wenn eine Schicht frischen Wassers über Salzwasser geschichtet ist. Die von der Hauptströmung verursachte Durchmischung muss entgegen der Schwerkraft aufrecht erhalten werden. Die Schwerkraft dämpft die turbulente Bewegung und kann sie ganz auslöschen. Dies erklärt das Ausbleiben der Turbulenz und des Windes in den unteren Schichten der Atmosphäre bei Nacht, während der Wind in den oberen Schichten ungehindert weiter bläst. Im umgekehrten Fall wird die Turbulenz durch die Abstrahlung des Bodens angefacht, was eine Umkehr der Schichtung zur Folge hat, wobei dichtere Schichten über leichtere Schichten gelagert werden. Diese Situation findet man bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion zwischen zwei

von unten beheizten und oben gekühlten horizontalen Platten (siehe Abschn. 2 des Kap. 8 ▸ Konvektive Wärme- und Stoffübertragung und Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik, Abb. 7.5).

4.4 Turbulenz im Windkanal

Im Windkanal ist die Turbulenz der Anströmung unerwünscht, da das Ziel der Experimente die Simulation der Strömung um einen mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Körper in ruhender und ungestörter Luft ist. Die Turbulenz im Windkanal kann jedoch nicht gänzlich vermieden werden. Eine Restturbulenz bleibt selbst nachdem die Strömung ein Gleichrichtergitter am Einlauf des Windkanals durchlaufen hat (Abb. 7.34). Dieses beeinflusst die Turbulenz in den Grenzschichten der Körper die untersucht werden sollen und damit auch die Strömungsablösung. Die Strömungsablösung beeinflusst jedoch die Strömung in der Nähe von Wänden und ändert die Transporteigenschaften drastisch. Es muss nicht hervorgehoben werden, dass insbesondere bei Windkanalexperimenten zum laminar-turbulenten Übergang in Grenzschichten eine Kontrolle der Windkanalturbulenz zwingend erforderlich ist.

Schubauer und Skramstad (1947) und Dryden (1948) haben auf der Basis von Hitzedraht Messungen zuverlässige Daten der Geschwindigkeitsschwankungen erhalten. Es wurde gefunden, dass die Windkanalturbulenz in einem genügend großen Abstand von den Gleichrichtern und Sieben eine sehr einfache Eigenschaft besitzt. Die Windkanalturbulenz ist *isotrop*, das bedeutet, dass die Geschwindigkeitsschwankungen in alle Richtungen die gleiche Größe haben. Die isotrope Turbulenz ist deshalb die einfachste Form der Turbulenz, die mit der statistischen Theorie und mit theoretisch fundierten Experimenten behandelt werden kann. Es sind insbesondere die Artikel von Taylor (1935), Taylor (1936) und von Kármán (1948) zu erwähnen.

Die einfachste statistische Größe ist die mittlere Energie der Fluktuationen:

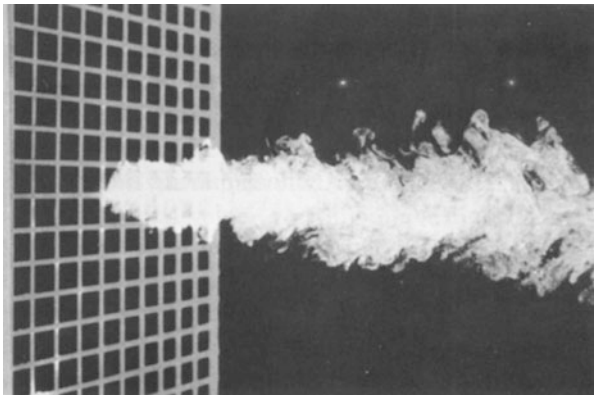


Abb. 7.34 Turbulente Strömung hinter einem Windkanalgitter, Lesieur (2008), Bild von Balint et al.

$$E = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot q^2. \tag{7.49}$$

Von einer Vielzahl von Experimenten an einem Gitter mit der Maschenweite m durch die die Strömung mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{U}$ strömt ist bekannt, dass sich q als Potenz vom Gitterabstand darstellen lässt. Analog ergibt sich für ein im ruhenden Medium bewegtes Gitter, dass der zeitliche Zerfall der Turbulenz sich ebenfalls als Potenz der Zeit ergibt. Der Exponent des Potenzgesetzes ist näherungsweise -1.25. Bisher ist nicht klar, ob der Exponent universell ist oder schwach von der Maschenweite m beziehungsweise von der Geometrie des Gitters abhängt. Die Proportionalitätskonstante ist in jedem Fall von den geometrischen Größen abhängig und damit nicht universell.

Isotrope Turbulenz

Die *isotrope Turbulenz* (Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik, Abb. 4) besitzt keine Vorzugsrichtung und ist eine mathematische Vereinfachung der Turbulenz. Turbulenz kann nur in Scherschichten oder in der Nähe von Wänden entstehen. Damit ist eine Vorzugsrichtung stets vorgegeben. Beobachtet man eine turbulente Strömung jedoch fernab des Entstehungsprozesses, befindet sie sich nahe dem Zustand der Isotropie. Ein isotropes Verhalten der Turbulenz ist eine gute Näherung, wenn die Abweichungen von der Isotropie nicht zu groß sind, zum Beispiel fernab von Wänden wo der mittlere Geschwindigkeitsgradient klein ist. Kleinere Skalen der Turbulenz neigen dazu im statistischen Mittel isotropes Verhalten zu zeigen, obwohl die einzelne Struktur der turbulenten Strömung noch Abweichungen von der Isotropie aufweist. Aus all diesen Gründen ist die isotrope Turbulenz von Interesse zumal sie einer theoretischen Behandlung zugänglich ist. Die isotrope Turbulenz ist ebenfalls homogen, was oft nicht angemerkt wird. Der Begriff homogene und isotrope Turbulenz ist ein Paradigma, der sich aus der statistischen Theorie der Turbulenz und Experimenten ableiten lässt. Taylor (1935) hat diesen Begriff eingeführt und von Kármán (1948) hat die Gleichung der statistischen Größen aus der Navier-Stokes Gleichung abgeleitet. Eine detaillierte Darstellung findet sich bei Monin und Yaglom (1975).

Eine statistische Beschreibung der räumlichen Geschwindigkeitsfluktuationen kann durch die Bestimmung der *Korrelation* zwischen den Geschwindigkeiten zweier benachbarter Punkte 1 und 2 erzielt werden. Für die isotrope Turbulenz gibt es nur zwei von Null verschiedene Korrelationen, die beide Funktionen des Abstandes r der Beobachtungspunkte sind. In Abb. 7.35 ist die Korrelation R zwischen den Geschwindigkeitskomponenten parallel zu r in 1 und 2:

$$R(r) = \frac{\overline{u'_1 \cdot u'_2}}{\sqrt{\overline{u'^2_1}} \cdot \sqrt{\overline{u'^2_2}}}. \tag{7.50}$$

Aus dem Kurvenverlauf für R kann die charakteristische Turbulenzlänge L bestimmt werden:

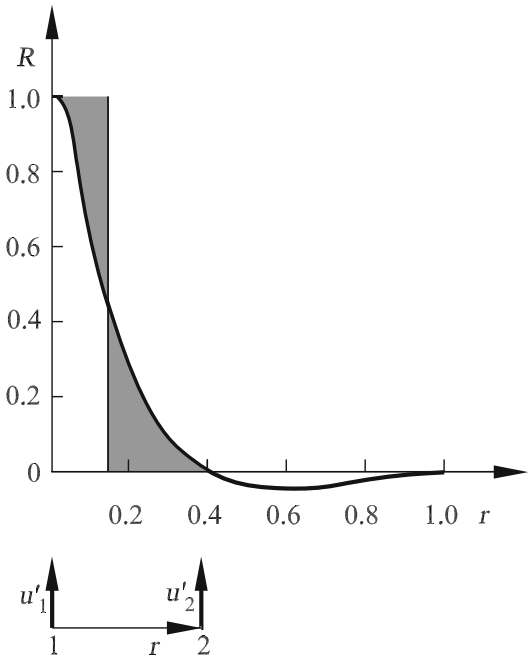


Abb. 7.35 Korrelationen der Schwankungsgeschwindigkeiten

$$\int_0^\infty R(r) \cdot \mathrm{d}r = L\,.$$

Diese steht in engem Zusammenhang mit der Mischungsweglänge l. Der in Abb. 7.33 bestimmte Wert von L ist ein Maß für die großen Turbulenzstrukturen der Strömung, in der die Turbulenzenergie erzeugt wurde. Nach Taylor (1936) ist die Dissipation im statistischen Mittel proportional zu

$$\mu \cdot q^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r=0}\,, \tag{7.51}$$

mit

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r=0} = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Die mit $lambda$ gebildete Reynolds-Zahl, die Taylorsche Mikroskala des Abschn. 3.3 und die Quadratwurzel der Geschwindigkeitsfluktuationen werden oft benutzt um die Eigenschaften unterschiedlicher turbulenter Strömungen zu vergleichen, bei denen die charakteristischen großen Turbulenzstrukturen von der Geometrie abhängen. Dies ist jedoch, wie ausgeführt wurde, kein brauchbarer

Vergleich, da λ nicht die kleinsten Turbulenzskalen repräsentiert. Dies bleibt der Kolmogorov-Längenskala l_k Gl. (7.38) vorbehalten.

Die wesentlichen dynamischen Probleme der isotropen Turbulenz sind der nichtlineare Energietransfer von einer Turbulenzskala zur anderen und deren Dissipation in Wärme. Im Mittel vollzieht sich der Energietransport von den größeren zu den kleineren Skalen, wenngleich auch ein momentaner Transport in beide Richtungen möglich ist. Es wird angenommen, dass sich der mittlere Transport von einer Skala zur benachbarten kleineren Skala in Form einer Energiekaskade vollzieht. Sind die beteiligten Skalen groß wird angenommen, dass der Energietransport zur nächst kleineren Skala ohne Dissipation geschieht. Dies ist der Fall, wenn die mit der charakteristischen Größe der Skala gebildete Reynolds-Zahl groß genug ist. Sobald die Energie die kleinsten Skalen erreicht wird angenommen, dass sie dort dissipiert. Sofern sich dieses Bild der Turbulenz auf alle turbulenten Strömungen übertragen lässt, ist die isotrope Turbulenz die beliebteste aller Beschreibungsarten turbulenter Strömungen.

Eine Konsequenz der Energiekaskade ist es, dass die Dissipationsrate der Energie dieselbe ist wie die Rate der Energiezufuhr die durch die Strömung in die großen Turbulenzskalen übertragen wird, wenn die Skalen die den größten Anteil der Energie enthalten (Größenordnung L) und die Skalen die den größten Teil der Energie dissipieren (Größenordnung l_k) deutlich verschieden voneinander sind. Diese Gleichheit wird sowohl durch Experimente der Gitterturbulenz als auch durch numerische Simulationsrechnungen bestätigt, sofern die Reynolds-Zahl groß genug ist und die Unterscheidung der verschiedenen Turbulenzskalen möglich ist. Daraus kann man die Schlussfolgerung ziehen, dass die Dissipationsrate der Energie bei großen Reynolds-Zahlen unabhängig von der Viskosität der Strömung ist. Dieses anormale Verhalten der turbulenter Strömungen hat eine entscheidende Konsequenz. Es zeigt sich, dass der Grenzwert beim Übergang zu sehr großen Reynolds-Zahlen beziehungsweise zu verschwindender Viskosität völlig anders ist als der Wert für den Fall dass die Viskosität gleich Null ist. Es wird daran erinnert, dass dieses Verhalten für alle singulären Störungsprobleme einschließlich der Grenzschichten gilt.

Die wichtigste Arbeit zur isotropen Turbulenz stammt von Kolmogorov (1941). Sie ist die Grundlage der in Abschn. 4 des Kap. 1 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik beschriebenen Turbulenzmodelle. Obwohl Kolmogorovs Arbeit von der isotropen Turbulenz motiviert war, wird ihre weitere Behandlung im folgenden Kapitel über die kleinen Skalen der Turbulenz fortgesetzt. Die Grund ist die weitläufige Auffassung, dass die kleinen Skalen der Turbulenz statistisch isotrop betrachtet werden, unabhängig von der Natur der großen Skalen beziehungsweise der Art wie die Turbulenz entstanden ist. Ein Ergebnis soll bereits hier hervorgehoben werden. Im sogenannten Trägheitsbereich der Abb. 7.31, der kleiner als die energietragenden großen Skalen L und größer als die dissipierenden Skalen ist, vollzieht sich der Energietransport entsprechend

$$E(a) = C_k \cdot \varepsilon^{2/3} a^{-5/3}\,, \tag{7.52}$$

mit der Kolmogorov Konstante C_k und der Energiedissipationsrate ε. Das Integral von $E(a)$ über alle Wellenzahlen a ergibt die totale turbulente kinetische Energie. Hier übernimmt die Wellenzahl a die Rolle der Unterscheidung verschiedener Turbulenzskalen. Dabei entsprechen kleine Wellenzahlen den großen Turbulenzskalen und große Wellenzahlen den kleinen Skalen. Die Konstante C_k kann theoretisch nicht abgeleitet werden, ist jedoch von Experimenten bekannt und hat für große Reynolds-Zahlen den Wert 0.5.

In der Vergangenheit wurde die isotrope Turbulenz im Windkanal hinter Gittern beziehungsweise hinter einem im ruhenden Medium bewegten Gitter untersucht. In neuerer Zeit werden entsprechend der verfügbaren Rechnerkapazität ausgehend von einer zufälligen Geschwindigkeitsverteilung die Navier-Stokes-Gleichungen des Abschn. 2 des Kap. 1 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik numerisch gelöst. Die Simulationsergebnisse zeigen Eigenschaften der Turbulenz, die von der Anfangsverteilung unabhängig sind und die die experimentellen Ergebnisse bestätigen. Diese numerischen Simulationsrechnungen haben sich inzwischen zu einem schlagkräftigen Instrument entwickelt um die Turbulenz im Allgemeinen und die isotrope Turbulenz im Speziellen besser zu verstehen. Dabei zeichnet sich das interessante Ergebnis ab, dass die Turbulenzstruktur der kleinen Skalen aus Wirbellinien besteht. Diese Wirbellinien bilden ein Mosaik aus unterschiedlichen kleinen Skalen. Es ist jedoch nicht klar, ob diese Beobachtung von grundlegender Bedeutung für die Theorie der Turbulenz ist.

4.5 Zweidimensionale Turbulenz

Im Allgemeinen haben alle Komponenten der turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen die gleiche Größenordnung, ausgenommen in Wandnähe oder wenn Volumenkräfte auf die Strömung wirken. Das gilt auch für Strömungen, die im Mittel zweidimensional sind wie Grenzschichten auf großen ebenen Platten oder Nachlaufströmungen hinter langen Zylindern. Es gibt jedoch Fälle, in denen die Turbulenz näherungsweise zweidimensional behandelt werden kann. Das bedeutet, dass die Fluktuationen im Wesentlichen eben sind. Beispiele dafür sind die Turbulenz in der Atmosphäre und im Ozean, die entsprechend der Beispiele in Kap. 11 ▸ Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean eine große eben räumliche Ausdehnung bei einer relativ geringen vertikalen Ausdehnung besitzen. Derartige Strömungen treten in geschichteten oft rotierenden Umgebungen auf und tragen ganz wesentlich zum Verständnis der Wettervorhersage, der Ausbreitung von Schadstoffen in der Atmosphäre und in den Ozeanen sowie anderen Phänomenen in der Natur bei. Ein anderes Beispiel einer zweidimensionalen Turbulenz ist die Strömung in einer zähen Seifenlösung, die in Abb. 7.36 gezeigt ist.

Obwohl diese Beispiele nicht exakt zweidimensional sind, verspricht die näherungsweise zweidimensionale mathematische Behandlung einen ersten Einblick. Im Experiment ist es gelungen, näherungsweise die zweidimensionalen Strömungen der natürlichen und mathematisch idealisierten Strömung zu realisieren. Die zweidimensionale Turbulenz wird demzufolge mit der Zielsetzung untersucht,

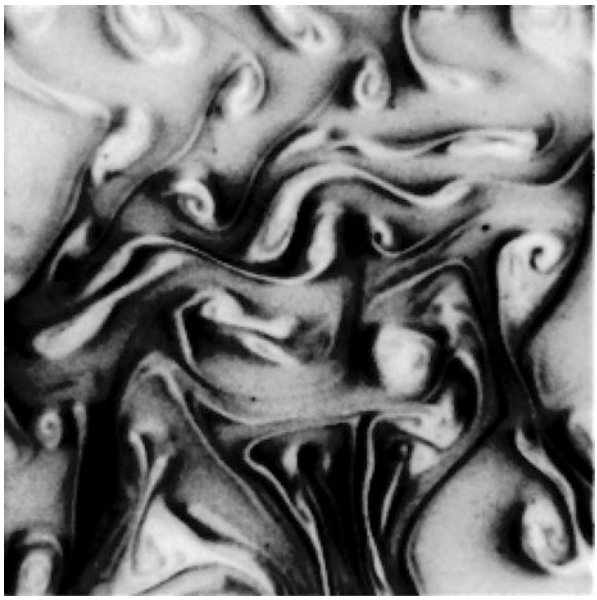


Abb. 7.36 Turbulente Strömung in einer Seifenlösung, Vorobieff und Ecke 2003

einen besseren Einblick in die dreidimensionalen Strömungsprobleme zu erhalten. So können fundamentale Aussagen über den Energieaustausch zwischen den Turbulenzskalen und über die Dissipationsmechanismen der Strukturbildung und Entwicklung gemacht werden. Darüber hinaus ist die zweidimensionale Turbulenz leichter theoretisch zu behandeln, numerisch zu berechnen und einfacher mit Messsonden zu messen.

Wesentliche theoretische Ergebnisse

Die Einfachheit der zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung erlaubt die Ableitung mehrerer fundamentaler Zusammenhänge. Ein erstes Ergebnis wird mit der Rotation der Navier-Stokes-Gleichungen einer inkompressiblen Strömung erzielt. Betrachtet man den reibungsfreien Euler-Grenzfall, erhält man das Helmholtz-Theorem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \omega = 0, \tag{7.53}$$

mit der Wirbelstärke $\omega = \nabla \times \boldsymbol{v}$, deren Achse immer normal zur Ebene steht. Hier ergibt sich ein fundamentaler Unterschied zur Dreidimensionalität. Die Helmholtz-Gleichung sagt aus, dass die Wirbelstärke eines Fluidelementes über die Lebensdauer der Turbulenz erhalten bleibt. Die dreidimensionale Turbulenz ermöglicht auf der anderen Seite über den Term $\omega \cdot \nabla \boldsymbol{v}$ eine von Null verschiedene zusätzliche Wirbelstreckung aufgrund des Freiheitsgrades in der dritten Dimension. Mit der Beschränkung auf Ergebnisse in einer Ebene ergibt sich für die räumlich gemittelte Energie $E = (1/2) \cdot \langle \boldsymbol{v}^2 \rangle$ und die *Enstrophie* der Wirbelstärke $\Omega = \langle \omega^2 \rangle$ der zweidimensionalen Turbulenz:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\nu \cdot \Omega \,, \qquad \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = -\nu \cdot \langle (\nabla \omega)^2 \rangle \,. \tag{7.54}$$

Die eckige Klammer steht für eine geeignete Mittelung, deren Unterschied zum bisher benutzten Mittelungsstrich für die weitere Betrachtung nicht wesentlich ist. Für die dreidimensionale Turbulenz ist bekannt, dass der Grenzwert zur reibungsfreien Strömung zu einem Anwachsen der Enstrophie führt, da die reibungsbehaftete Diffusion von Wirbelstärke die Wirbelstreckung verringert. Es folgt, dass für die dreidimensionale Turbulenz die Energiedissipation im reibungsfreien Grenzfall endlich bleibt. Bei der zweidimensionalen Turbulenz ändert sich die Enstrophie ausschließlich durch Reibungseffekte und kann deshalb nur abnehmen. Dies führt zu der Energiedissipation Null für die reibungsfreie Strömung Gl. (7.54). Diese Enstrophie-Dissipations-Anomalie wurde erstmals von Batchelor (1948) ausgeführt.

Das abschließende Bild der zweidimensionalen Turbulenz stellt sich so dar, dass keine Energie in die kleinen Skalen dissipiert wird. Die Energie wird in die größeren Skalen transportiert und wird gegebenenfalls aufgrund der Wandreibung dissipiert. Auf der anderen Seite dissipiert die Enstrophie über Kaskaden bis zu den kleineren Skalen. Deshalb kann man die zweidimensionale Enstrophie (Wirbelstärke) mit der dreidimensionalen Energie (Geschwindigkeiten) in Verbindung setzen. Dies ist der Ansatz von Kraichnan (1967).

Energie- und Enstrophiekaskaden

Kraichnan (1967) war der Erste, der erkannt hat, dass Enstrophie- und Energiekaskaden im Zweidimensionalen gleichzeitig existieren können. Die Erhaltungsgleichungen und die Gleichung für die Wechselwirkung von Wellenzahlen zeigen, dass die Energie in kleine Wellenzahlen (große Skalen) transportiert wird, während die Enstrophie in die großen Wellenzahlen transportiert wird. Die Vorhersage des Energiespektrums der inversen Kaskade ergibt das Skalierungsgesetz $E(a) \sim a^{-5/3}$ und wurde numerisch Frisch und Sulem (1984) und experimentell Somméria (1986); Paret und Tabeling (1997) bestätigt. Die inverse Energiekaskade suggeriert einen Mechanismus bei dem große turbulente Strukturen von kleineren turbulenten Skalen gebildet werden statt der umgekehrten Wirklichkeit, wie bei der dreidimensionalen turbulenten Strömung.

Ein phänomenologisches Bild kann man sich wie folgt vorstellen. Es werden neu gebildete Wirbel während ihrer Lebenszeit kontinuierlich mit bestehenden Wirbeln derart vereinigt, dass größere Wirbel entstehen bis ihre Energie verbraucht ist. Die dreidimensionale Richardson-Kaskade des Aufbrechens der turbulente Strukturen wird im Zweidimensionalen durch einen Vereinigungsprozess von Wirbeln ersetzt. Die Kraichman-Annahme für eine stationäre inverse Kaskade ist nur haltbar, wenn eine Energiesenke bei großen Skalen existiert. Da im Strömungsfeld keine Energiesenke auftritt, müssen es sowohl in der numerischen Simulation als auch im Experiment die Randbedingungen sein, die aufgrund der Reibung eine künstliche Senke an der Wand verursachen. Dies ermöglicht die Beobachtung einer stationären inversen Energiekaskade.

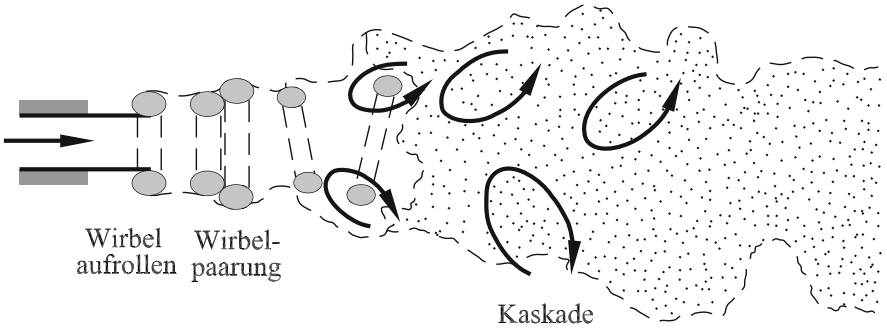


Abb. 7.37 Koherente Turbulenzkaskaden eines achsensymmetrischen turbulenten Freistrahls

Wie bereits ausgeführt wurde, dissipiert die Enstrophie Ω in die kleinen Skalen für die reibungsfreie Strömung. In einem erzwungenen zweidimensionalen System bilden sich die Enstrophiekaskaden aufgrund der Anfangsverteilung der Skalen im dreidimensionalen Fall. Dieser Skalenbereich stammt von den Skalen bei denen Energie in die kleinen Skalen gepumpt wird. Das Enstrophiespektrum verhält sich nach der Theorie von *K. Batchelor* und *R. H. Kraichmans* wie $\Omega(a) \sim a^{-1}$. Das dazugehörige Energiespektrum im Anfangsstadium ist $E(a) \sim a^{-3}$. Experimentelle Beobachtungen des Zerfalls des Energiespektrums haben Abhängigkeiten von –3 bis –4 bei unterschiedlichen Anfangsbedingungen ergeben. Eine vollständige Beschreibung findet sich bei Tabeling (2002).

4.6 Strukturen und Statistik

Erzwungene und zerfallende zweidimensionale Strömungen tendieren dazu kohärente Strukturen zu bilden. Die bemerkenswerte Eigenschaft der zweidimensionalen sowohl numerisch berechneten als auch experimentellen kohärenten Strukturen ist ihre extrem lange Lebenszeit. Viel Energie wurde darauf verwandt, kohärente Wirbelstrukturen zu entdecken und ihre Stabilitätseigenschaften und die Dynamik der Wirbelwechselwirkungen, einschließlich der Vereinigung zu analysieren. Dabei ist das Ziel, eine zufriedenstellende Verbindung zwischen der statistischen Theorie und den kohärenten Strukturen der Turbulenz herzustellen. Batchelor (1969) war der Erste, der einen selbstähnlichen zweidimensionalen Zerfallsprozess vorgeschlagen hat. Ein Argument der Dimensionsanalyse führt dann zu der folgenden Annahme der Zerfallsrate von Wirbeln der Dichte ρ:

$$\rho \sim E^{-1} \cdot t^{-2}, \tag{7.55}$$

mit der kinetischen Energiedichte E. Die gleiche Dimensionsanalyse zeigt, dass die Wirbelgröße und der Wirbelabstand sich linear mit der Zeit t verhält. Das ist der

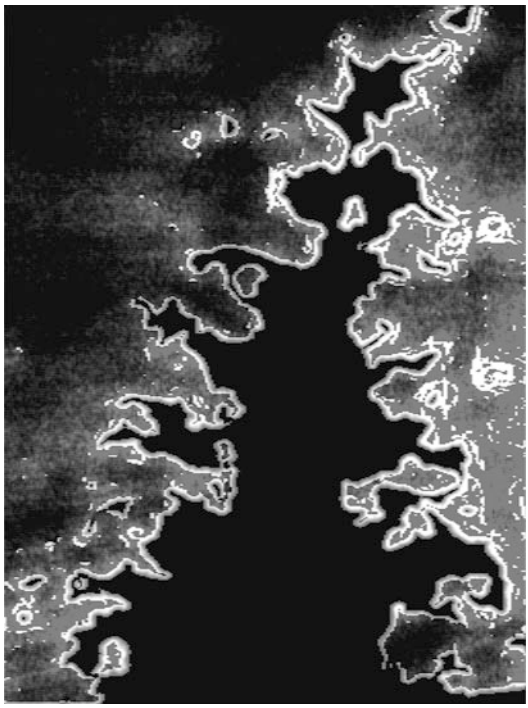


Abb. 7.38
Kohärenzstrukturen einer turbulenten Flamme (siehe Abschn. 3 des Kap. 10 ▶ Strömungen mit chemischen Reaktionen)

erste Ansatz für eine statistische Beschreibung. Numerische Simulationsrechnungen McWilliams (1990) zeigen, dass die Zerfallsprozesse auch dann gültig sind, wenn die Exponenten von Batchelors Vorhersagen abweichen. Die Wirbeldichte zerfällt viel langsamer und ihre Größe und Abstand wachsen viel langsamer als die vorhergesagten Werte. Diese numerischen Beobachtungen wurden erst kürzlich von Experimenten untermauert. hat Carnevale et al. (1991) ergänzend zu E eine andere Invariante des Problems vorgeschlagen. Diese neue Invariante ist das globale Maximum der Wirbelstärke des Systems. Die physikalische Rechtfertigung für eine Invariante eines zerfallenden Systems ist nicht selbstverständlich. Es ist eine Annahme, die im Wesentlichen mit numerischen Ergebnissen begründet wird. Die Nachrechnung der Skalierungsexponenten hat sich mehrfach bestätigt, so dass der Erfolg dieser Vorgehensweise zur Bezeichnung *Universelle Zerfallstheorie* geführt hat.

Trotz beträchtlicher Anstrengungen ist die dreidimensionale Strukturbildung turbulenter Strömungen weniger gut entwickelt. Die Existenz der großräumigen Turbulenzstrukturen ist wohl verstanden, jedoch nicht verstanden ist ihre zeitliche Kohärenz bei sehr großen Reynolds-Zahlen. Sie sind evident in speziellen Fällen, wie die Mischungsschicht am Austritt eines Jets (Abb. 7.37) und in einer Flamme bei kleinen Reynolds-Zahlen der Abb. 7.38, die einen Laser induzierten Fluoreszens-Schnitt (LIF) der OH Konzentration einer vorgemischten Luft-Gasflamme zeigt (siehe Abschn. 3 des Kap. 10 ▶ Strömungen mit chemischen

Reaktionen). Es wird intensiv diskutiert, in wieweit die großräumige Turbulenzskalen zum Wärme-, Masse- und Impulstransport beitragen.

Andererseits ist klar, dass sich die kleinskaligen Strukturen in einer Größenordnung der Kolmogorov Skalen und Längen irgendwo zwischen den Taylor Mikroskalen und den integralen Skalen von selbst kohärent einordnen. Dabei ist zu beachten, dass die kleinskaligen Strukturen zwar zur turbulenten Dynamik beitragen aber die Beziehung zwischen den beobachteten Strukturen und den dynamischen Größen, die üblicherweise gemessen werden, nicht klar ist. Ein zentrales Problem der Turbulenz besteht darin, die Turbulenzstrukturen und deren Dynamik miteinander systematisch zu verknüpfen. In diesem Kontext spielen die Konzepte der *Helizität*, das Volumenintegral des Skalarproduktes von Geschwindigkeit und Wirbelstärke (siehe Moffatt (1969)) und die Wiedervereinigung der Turbulenzstrukturen (siehe Kida und Takayoka 1994) eine wichtige Rolle.

5 Neue Entwicklungen

5.1 Zerfall in kleine und große Skalen

In den vergangenen Jahrzehnten bestand ein verstärktes Interesse an der *statistischen Beschreibung der Turbulenz*. Turbulenz beinhaltet jedoch die Bildung und Wechselwirkung von Turbulenzstrukturen unterschiedlicher Längenskalen und ist der Inbegriff räumlicher und zeitlicher Komplexität. Es besteht die Hoffnung, dass sich bei einer probabilistischen Beschreibung ein vereinfachtes Bild der universellen Größen herauskristallisiert. Die Längenskalen innerhalb der eine Universalität angewandt werden kann, ist viel kleiner als die großen Skalen L, die für die Größe des Systems oder die Art wie die Turbulenz entstanden ist charakteristisch ist. Die Fokussierung auf die kleinen Skalen, die zeitweise sehr viel versprechend war, führte zur Missachtung der großskaligen Phänomene wie die Strukturbildung und Kohärenz sowie deren Mitnahmeeffekte der kleinen Strukturen, die von den großen Strukturen mitgeschwemmt werden. Diese *Größen der großskaligen Bewegung* sind ebenfalls universell in der Weise, dass sie für die Turbulenzentstehung eine denkbare allgemeine Bedeutung darstellen. Aber sie sind nicht universell in dem Sinne, dass sie sich nicht in Gestalt, Einsetzen und genauer Manifestation von Strömung zu Strömung unterscheiden. Die beiden Bereiche der turbulenten Skalen werden oft unabhängig voneinander untersucht unter der Annahme, dass der Abstand der kleinen Skalen von den großen Skalen genügend groß ist, so dass in der Tat eine Unabhängigkeit besteht.

Zunächst wird ein Überblick über die benutzten *experimentellen Methoden* gegeben. Danach werden neuere Arbeiten vorgestellt.

Experimentelle Methoden

Die Messung der schnell fluktuierenden Größen der kleinen Skalen, wie Geschwindigkeiten und Ableitungen der Geschwindigkeiten, wird nach wie vor am Erfolgreichsten mit der thermischen Anemometrie und Hitzedraht-Sonden durchgeführt

(siehe z. B. Brunn 1995). Aus den Daten solcher Messungen lassen sich die Statistik turbulenter Strömungen von den gemittelten Größen bis zu höheren Momenten der Reynoldsschen Schubspannungen und Strukturfunktionen auswerten. Die Grenze der Hitzedraht-Daten liegt in der Tatsache, dass ihre räumliche Information auf zeitliche Aufzeichnungen an einem Punkt begrenzt sind. Die punktweisen Zeitaufzeichnungen sind nach Taylors Hypothese entsprechenden Informationen an mehreren Punkten zuzuordnen. Die Notwendigkeit, eine gleichzeitige räumliche und zeitliche Auflösung der turbulenten Strömung zu erhalten, hat zur Entwicklung der Laser-Doppler-Anemometrie LDA und der Particle-Image-Velocimetrie PIV geführt. Der Vorteil der berührungslosen Messverfahren besteht darin, dass sie auch in einer extremen Umgebung wie Flammen angewendet werden können. Ihr Nachteil gegenüber Hitzedraht-Daten liegt derzeit in der beschränkten zeitlichen Auflösung und damit in der Auflösung der Fluktuationen bei großen Reynolds-Zahlen. Eine Weiterentwicklung des klassischen PIV wurde mit der Einführung von Partikeldetektoren für hohe Energien erzielt, die für die Bilddarstellung der Teilchenbahnen bei Strömungen großer Reynolds-Zahlen genutzt werden können (Voth et al. 1998). Die Notwendigkeit, Strömungen mit sehr großen Reynolds-Zahlen im Labor unter kontrollierten Bedingungen herzustellen, kommt von der Anforderung, einen möglichst großen Trägheitsbereich der Skalen zu erreichen. Neuere Experimente zeigen die Möglichkeit, dass große Reynolds-Zahlen in Apparaturen moderater Größe mit cryogenem Helium geringer Viskosität erreicht werden können (siehe z. B. Sreenivasan und Donnelly (2000)).

Kleinskalige Turbulenz

Um die kleinskalige Turbulenz messen zu können benötigt man eine Methode, die von den überlagerten großräumigen Skalen unabhängig ist. Eine einfache derartige Messgröße ist die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen zwei Messpunkten, die durch den Abstand r getrennt sind. Dabei ist r klein verglichen mit der Ausdehnung der großen Skalen L. Es wird allgemein angenommen, dass sich derartige Messgrößen für $r \ll L$ entsprechend der isotropen Turbulenz verhalten. Dies ist die Annahme der *lokalen Isotropie*. Die Art und Weise wie der Einfluss der Anisotropie der großen Skalen bei kleiner werdenden Turbulenzskalen abnimmt ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse findet sich in Kurien und Sreenivasan (2001).

Eine exakte Beziehung im Trägheitsbereich der Energieskalen $l_\mathrm{k} \ll r \ll L$ ist das sogenannte *Kolmogorov-Gesetz*, das für große Reynolds-Zahlen gilt:

$$\langle (u(x+r) - u(x))^3 \rangle = -\frac{4}{5} \cdot \langle \varepsilon \rangle \cdot r. \tag{7.56}$$

Die Ableitung dieser Gesetzmäßigkeit hat eine große Zahl an Arbeiten bezüglich der Verifikation und Test der Eingangshypothesen, dem experimentellen Nachweis der Gl. (7.56) und dem Verlauf der Geschwindigkeitsmomente höherer Ordnung

$$\langle (u(x+r) - u(x))^\mathrm{n} \rangle = \mathrm{C_n} \cdot (\langle \varepsilon \rangle \cdot r)^{\frac{\mathrm{n}}{3}}, \tag{7.57}$$

der Statistik der Dissipation und Wirbelstärke und der Beschreibung der Wahrscheinlichkeitsverteilung des kleinskaligen Geschwindigkeitsfeldes hervorgebracht.

Kolmogorov (1941) hat die Gl. (7.56) für globale homogene und lokale isotrope Turbulenz abgeleitet. Die klassische Interpretation von Gl. (7.56) (siehe Monin und Yaglom (1975)) ist, dass der Energiefluss von großen zu kleineren Skalen im Mittel unumkehrbar ist. Es gab andere Anstrengungen, aus Gl. (7.56) mehr Information abzuleiten Stolovitzky et al. (1992), Chorin (1994) und Vainshtein und Sreenivasan (1994)). Dabei wurde der Trägheitsbereich in Experimenten nachvollzogen und $\langle\varepsilon\rangle$ mit geringerer Mehrdeutigkeit als mit der lokalen Isotropierelation $\langle\varepsilon\rangle = 15 \cdot \nu \cdot \langle(\partial u/\partial x)^2\rangle$ bestimmt.

Das spektrale Äquivalent der Gl. (7.57) kann für n = 2 geschrieben werden:

$$E(a_1) = \mathrm{C_k} \cdot (\langle\varepsilon\rangle)^{\frac{2}{3}} \cdot a_1^{-\frac{5}{3}}. \tag{7.58}$$

$E(a_1)$ ist das eindimensionale Energiespektrum der Wellenzahlen der Komponente 1 in x-Richtung und $\mathrm{C_k}$ wird Kolmogorov-Konstante genannt. Der Wert der Kolomogrov-Konstante wurde bereits in Gl. (7.52) eingeführt. Grant et al. (1962) verifizierte Gl. (7.58) erstmals. Mit einer Auswertung existierender Daten hat Sreenivasan (1995) gezeigt, dass die Kolmogorov-Konstante $\mathrm{C_k}$ in einem großen Bereich der Reynolds-Zahlen den Wert $\mathrm{C_k} = 0.5 \pm 0.05$ besitzt.

Im Dissipationsbereich führt *A. N. Kolmogorovs* Argument zu folgender Spektraldichte:

$$E(a_1) = \mathrm{f}(A) \cdot (\langle\varepsilon\rangle)^{\frac{2}{3}} \cdot a_1^{-\frac{5}{3}}, \tag{7.59}$$

mit der Wellenzahl $A = a_1 \cdot l_\mathrm{k}$, die mit der Kolmogorov-Längenskala $l_\mathrm{k} = (\nu^3/\langle\varepsilon\rangle)^{1/4}$ dimensionslos gemacht wird und der unbekannten universellen Funktion $\mathrm{f}(A)$. Für kleine Wellenzahlen a nähert sich $\mathrm{f}(A)$ der Konstanten $\mathrm{C_k}$. Numerische Simulationsrechnungen zeigen bei kleinen Reynolds-Zahlen, dass die Spektraldichte im fernen Dissipationsbereich die Form $\mathrm{A}^{a'} \cdot \exp(-\mathrm{g} \cdot a)$ mit $\mathrm{A} \approx 3.3$ und $\mathrm{g} \approx 7.1$ hat. Experimentelle Daten bestätigen Gl. (7.59) obwohl die Übereinstimmung der Daten noch nicht zufriedenstellend ist. Eine ganz andere Spektral-Universalität im Dissipationsbereich wurde von Frisch und Vergassola (1991) und von Gagne und Castaing (1991) vorgeschlagen. Der Kern des Vorschlags ist die Multifraktalität der kleinen Skalen. Eine ausführliche Diskussion des Ansatzes findet sich bei Frisch (1995).

Die gegenwärtige Situation ist, dass man nicht mit Sicherheit sagen kann, ob Gl. (7.57) das Kolmogorov-Gesetz auch bei einer Statistik zweiter Ordnung richtig ist. Es scheint Abweichungen für große Ordnungen n zu geben. So ändern sich zum Beispiel in atmosphärischen Grenzschichten, in Strömungen hoher Reynolds-Zahlen und in Helium-Strömungen die Wahrscheinlichkeitsdichten der Geschwindigkeitsänderungen im Trägheitsbereich kontinuierlich mit dem Skalenabstand r. Passt man die Daten mit dem Dehnungsexponenten $e^{\Delta u_r^\mathrm{m}}$ an, so variiert der Dehnungsexponent m von 0.5 im Dissipationsbereich bis etwa 2 im

im Trägheitsbereich der integralen Skalentrennung. Wäre Kolmogorovs Gesetz (7.56) richtig, müsste m eine von r unabhängige Konstante sein. Folgt man diesen empirischen Schlussfolgerungen, dann muss man die Kolmogorov-Universalität in ihrem eigentlichen Sinne aufgeben, obwohl sie ihren Wert für die Vorhersagen in einem großen Bereich der Reynolds-Zahlen behält.

Intermittenz im Trägheits- und Dissipationsbereich

Es wird angenommen, dass der Grund für die Abweichungen vom Kolmogorov-Gesetz die starke Änderung der Energiedissipationsrate ist. Ein Phänomen, das *Intermittenz* genannt wird. Man beachte, dass diese Intermittenz der kleinen Skalen sich von der äußeren Intermittenz in Abschn. 4.2 unterscheidet. Obukhov (1962) führt dieses auf die starke Änderung der großskaligen Prozesse zurück. Er hat vorgeschlagen, die globale mittlere Energiedissipationsrate $\langle\varepsilon\rangle$ im Kolmogorov-Gesetz durch den lokalen mittleren Wert $\langle\varepsilon_\mathrm{r}\rangle$ zu ersetzen, der über ein Volumen des Radius r gebildet wird. Die Variable $\langle\varepsilon_\mathrm{r}\rangle/\langle\varepsilon\rangle$ ist für $r \ll L$, mit der charakteristischen Längenskala L, eine fluktuierende Größe und nach *A. M. Obukhovs* Vorschlag eine Funktion von r/L. Auf diese Weise dringen die großen Skalen in die Statistik des Trägheitsbereiches vor, solange die Mittelwerte über Bereiche genommen werden, die unterschiedliche Größenordnungen der Energiedissipationsrate beinhalten. Kolmogorov (1962) griff *A. M. Obukhovs* Vorschlag explizit auf, indem er für die Dissipationsrate eine logarithmische Abhängigkeit annahm. Mit der Einbeziehung Obukhovs Vorschlag präzisierte er sein universelles Gesetz. Damit verfeinert sich die Ähnlichkeitshypothese von Kolmogorov. Die Modifikation von Kolmogorovs Gesetz bedeutet, dass die Spektren von $\langle\Delta u_\mathrm{r}\rangle/(r\cdot\varepsilon_\mathrm{r})^{(1/3)}$ im Trägheitsbereich nicht universal sind, aber es verbleiben nach wie vor Potenzgesetze der Form:

$$\frac{\langle\Delta u_\mathrm{r}^\mathrm{n}\rangle}{u_0^\mathrm{n}} = \mathrm{C}'_\mathrm{n}\cdot\left(\frac{r}{L}\right)^{\xi_\mathrm{n}}, \tag{7.60}$$

mit der Geschwindigkeit u_0 der großen Skalen und dem Vorfaktor C'_n, die nicht universal sind, aber mit dem universellen Exponenten ξ_n, der jedoch von $\mathrm{n}/3$ abweicht. Die Intermittenz im Trägheitsbereich wird auch von der empirischen Tatsache abgeleitet, dass die Wahrscheinlichkeitsdichten der Wellenzahlen für steigende mittlere Wellenzahlen abflachen.

Batchelor und Townsend (1949) haben gezeigt, dass das nicht Gaußsche Verhalten der Wahrscheinlichkeitsdichten der Dissipationsgrößen mit abnehmenden Skalen zunimmt. Anders ausgedrückt bedeutet das, dass mit wachsender Reynolds-Zahl das nicht Gaußsche Verhalten zunimmt. Das sind die zwei Merkmale der Dissipationsskalen-Intermittenz. Die Skalierungsexponenten ν_q für die Energiedissipation sind definiert als:

$$\langle\varepsilon_\mathrm{r}^\mathrm{q}\rangle\cdot\langle\varepsilon\rangle \sim \left(\frac{r}{L}\right)^{-\nu_\mathrm{q}}. \tag{7.61}$$

Die Proportionalitätskonstante wird nicht als universell erwartet. Die Skalierung von Gl. (7.61) legt nahe, dass ν_q eine nichtlineare Funktion von q ist. Es existieren

eine große Anzahl von Modellen, die den Versuch unternehmen, die beobachtete Intermittenz der dissipativen und Trägheitsskalen zu erklären. Diese Modelle lassen sich am Besten im Sinne der *Multifraktale* zusammenfassen (siehe Borgas (1992)), die eine übergeordnete Struktur voraussetzen. *A. N. Kolmogorovs* Originalmodell ergibt sich dabei als degenerierter Grenzfall, wie spätere Modelle zum Beispiel von Monin und Yaglom (1975) zeigen. Da die Verknüpfung dieser Modelle mit den Navier-Stokes-Gleichungen nicht entwickelt ist, sollte der Nachweis ihrer Gültigkeit durch den Vergleich mit Experimenten erbracht werden.

Es wurden intensive Anstrengungen unternommen, ν_q bei großen und kleinen Reynolds-Zahlen zu messen. Trotz der Schwierigkeit diese Daten zu erhalten, ist die Übereinstimmung unterschiedlicher Datensätze erstaunlich gut.

Andere Messungen der Dissipationsintermittenz berücksichtigen die Skalierungsexponenten der Wirbelstärke und Drehung. Die Schlussfolgerung ist, dass die Enstrophie mehr intermittiert als die Energiedissipationsrate bei moderaten Rynolds-Zahlen. Ganz ähnlich verhalten sich die Exponenten der Dissipationsrate für den passiven Skalar im Vergleich zur Energiedissipation im konvektiven Trägheitsbereich zwischen L und l_k. Im Gegensatz dazu hat sich im konvektiv reibungsbehafteten Bereich gezeigt, dass alle Intermittenzexponenten Null sind und damit keine Intermittenz existiert.

Berechnung turbulenter Strömungen

Die Rechnerkapazität ist in den letzten Jahrzehnten exponentiell angestiegen. Insofern kann man im Prinzip bei turbulenten Strömungen nicht zu großer Reynolds-Zahlen ausgehend von einer Anfangsverteilung der Schwankungsgrößen die turbulente Entwicklung ohne weitere Modellannahme durch direktes numerisches Lösen der Navier-Stokes-Gleichungen (DNS) berechnen (siehe z. B. Moin und Mahesh (1998)). Davon wurde in Abschn. 2 bei der Simulation des Transitionsprozesses in dreidimensionalen Grenzschichten Gebrauch gemacht. Ein weiterer Anwendungsbereich bei der direkten numerischen Strömungssimulation bei Verbrennungsprozessen wird in Kap. 10 ▸ Strömungen mit chemischen Reaktionen beschrieben.

Dabei besteht die Hoffnung, zahlreiche auch in der Technik wichtige Strömungen mit der direkten numerischen Simulation berechnen zu können, obwohl klar ist, dass dies für die Strömung um ein ganzes Flugzeug oder Schiff oder die Strömung im Ozean beziehungsweise in der Atmosphäre auf weitere Jahrzehnte nicht möglich sein wird. Es ist offensichtlich, dass die Physik der Turbulenz nicht alleine durch die Strömungssimulation verstanden werden kann. Deshalb handelt es sich um einen weiteren Schritt, der verknüpft mit den in diesem Kapitel beschriebenen physikalischen Prinzipien äußerst hilfreich sein kann. In diesem Sinne ist man noch in einem frühen Stadium, die derzeitigen Kenntnisse der Turbulenz geeignet zu organisieren. Eine Alternative bieten in einigen Fällen insbesondere in zwei Dimensionen, die Wirbelfilamentmethoden (siehe z. B. Chorin (1994)), die auf der Darstellung der Turbulenz als Wirbelstärkefeld beruhen.

Ist man ausschließlich an den mittleren Charakteristiken der turbulenten Strömung interessiert, benutzt man am anderen Ende des Spektrums der Beschreibung

und Modellierung der Turbulenz die Reynolds-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (33), (34) und (35)) für die zeitlich gemittelten Größen, die sich durch die Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen ergeben. Dabei ergeben sich entsprechend Abschn. 3 die bekannten Reynoldsschen Schubspannungsterme, die entsprechend modelliert werden müssen. Die unterschiedlichen Modellierungsebenen sind in Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik für Verbrennungsprobleme beschrieben. Dieser Aspekt der Turbulenzmodellierung ist dadurch motiviert, dass man Vorhersagen akzeptabler Genauigkeit für Ingenieurprobleme erhält (siehe z. B. Speziale (1991)).

Innerhalb dieser beiden extremen Beschreibungsmöglichkeiten turbulenter Strömungen besteht die Möglichkeit, die großen Turbulenzskalen mit allen zeitlichen und räumlichen Details auf der Basis der *Kolmogorov-* beziehungsweise *Richardson-Kaskade* ohne Auflösung der kleinen Skalen zu berechnen. Die Vorstellung ist dabei, dass die großen Skalen der Strömung die Gestalt geben und den Wärme-, Massen- und Impulstransport in der Strömung berücksichtigen, während die kleinen Skalen auf der Basis isotroper Turbulenz modelliert werden. Eine geeignete Modellierung der kleinen Skalen kann aufgrund ihrer näherungsweisen Universalität erreicht werden. Dies Vorgehensweise der Berechnung turbulenter Strömungen nennt man *Large-Eddy-Simulation* (LES), die in Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik einführt ist. Dabei schreibt man die Reynolds-Gleichungen ausschließlich für die kleinen Skalen und modelliert die turbulenten Zusatzterme. Diese Terme entsprechen den turbulenten Reynoldsschen Schubspannungen der Grundgleichungen der überlagerten Hauptströmung. Der Grund für die Modellierung der kleinen Skalen sind in der Tat ihre universellen Eigenschaften, die eine angemessene Modellierung und Parameterisierung zulassen. Damit wird die Berechnung der großen Skalen physikalisch korrekt. Eine Übersicht geben die Arbeiten von Lesieur und Metais (1996) und Pope (2000).

In jüngster Zeit ist ein anderer numerischer Algorithmus auf der Basis mikroskopischer Modelle und der Boltzmann-Gleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (64)) für die Berechnung unterschiedlicher turbulenter Strömungen hinzugekommen. Diese mikroskopische Modellierung der Turbulenz nennt man *Lattice-Boltzmann-Methode* (LBM) von der in Kap. 12 ▸ Mikroströmungen über die Mikroströmungen Gebrauch gemacht wird. In konventionellen numerischen Berechnungsmethoden der Strömungsmechanik werden die makroskopischen kontinuumsmechanischen Grundgleichungen auf einem Rechennetz räumlich und zeitlich diskretisiert (siehe z. B. Oertel jr. et al. 2003, 2015). Im Gegensatz dazu konstruiert man bei der Lattice-Boltzmann-Methode vereinfachte mikroskopische Modelle, die die wesentliche Physik der Turbulenz beinhalten. Die wesentliche Prämisse ist dabei, dass die makroskopische Dynamik als Ergebnis des kollektiven Verhaltens mikroskopischer Modellpartikel nicht sensitiv gegenüber den genauen Details der mikroskopischen Physik sind, solange man bestimmte Erhaltungseigenschaften erfüllt. Diese Methoden sind insbesondere für Strömungen mit Grenzflächen in Kap. 9 ▸ Strömungen mit mehreren Phasen und 12 ▸ Mikroströmungen sowie für komplexe technische Geometrien wie Flugzeuge, Schiffe und Kraftfahrzeuge anwendbar. Eine Zusammenfassung der Methoden findet sich bei Chen und Doolen (1991).

5.2 Lagrange-Untersuchungen der Turbulenz

Da die Transporteigenschaften der Turbulenz durch die Konvektion infinitesimaler Fluidelemente dominiert wird, ist es naheliegend der *Lagrange-Beschreibung* von Abschn. 3 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik zu folgen, die der Bewegung des Fluidelementes folgt. Lagrange-Modelle der stochastischen Turbulenzmodellierung sind im Zusammenhang mit der Vorhersage der turbulenten Mischung und Dispersion mit einem besonderen Schwerpunkt auf reaktive Strömungen des Kap. 10 ▸ Strömungen mit chemischen Reaktionen von Bedeutung (siehe z. B. Pope (2000)). Die früheren theoretischen Entwicklungen der Lagrange-Methoden wurden von Monin und Yaglom (1975) sowie der jüngsten Arbeit von Yeung (2002) zusammengefasst.

Unter den derzeit laufenden Arbeiten ist eine der wichtigsten diejenige, die im Eulerschen Bezugssystem erhaltene Daten aus der direkten numerischen Simulation verwendet um Lagrange-Trajektorien zu ermitteln und ausgewählte Eigenschaften wie Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Zeitskalen, Geschwindigkeitsgradienten, Dissipation der Energie, sowie Eigenschaften passiver Skalare die entlang der Lagrange-Trajektorien transportiert werden auszuwerten. Das Lagrange-Konzept wurde ebenfalls für die Modellierung der kleinen Turbulenzskalen erfolgreich eingesetzt. Grundsätzlich werden die Lagrange-Methoden zur Lösung der Modellierung passiver Skalare und ebenso für die Untersuchung des Geometrieeinflusses auf die Skalierung bei der Verfolgung von Lagrange-Clustern eingesetzt. Darüber hinaus besteht die Vermutung, dass die Lagrange-Darstellung für die Untersuchung der Eigenschaften kohärenter Strukturen der Turbulenz besser geeignet sind. Diese Entwicklung wird durch Experimente unterstützt, die ursprünglich für die Hochenergiephysik entwickelt wurden Voth et al. (1998) und es erlauben, Lagrange-Beschleunigungen von Partikeln zu messen. Es konnte gezeigt werden, dass die gemessenen Verteilungen mit vielen Standardabweichungen verknüpft werden können.

5.3 Feldtheoretische Methoden

Das Turbulenzproblem wurde bisher als das letzte ungelöste Problem der klassischen Physik beschrieben. Inzwischen scheint dies nicht mehr so außergewöhnlich zu sein, da andere stark gekoppelte Probleme der Theoretischen Physik in den Vordergrund gerückt sind. Einige davon, wie die Farbbeschränkung in der Quantenchromodynamik begleiten uns weiter. Bei anderen, wie die kritischen Phänomene in drei Dimensionen, konnte der kritische Skalierungsexponent erfolgreich mit mehreren Methoden berechnet werden, obwohl andere signifikante Größen, wie die kritischen Temperaturen für physikalische Systeme in der Natur oder im Labor nicht vorhergesagt werden können.

Demzufolge ist es nur natürlich, diese Methoden der Theoretischen Physik auf das grundsätzliche Problem der nichtlinearen Kopplung der Turbulenzskalen anzuwenden. Unglücklicherweise hat bisher keine der Methoden, die bei der Theorie der kritischen Phänomene erfolgreich angewandt werden, für das Ver-

ständnis und die Vorhersage turbulenter Strömungen einen signifikanten Beitrag leisten können. Trotzdem wurden Fortschritte erzielt und die Anwendung der feldtheoretischen Methoden zeigen wichtige neue Ansätze für die Beschreibung der Turbulenz. Insbesondere haben Störungsmethoden es ermöglicht, die turbulenten Skalierungsexponenten in einem vereinfachten Modell eines konvektiven passiven Skalars des weißen Rauschens zu berechnen.

5.4 Ausblick

Turbulenz ist vieleicht die komplexeste Form der Bewegung einer Strömung. Sie beinhaltet Strukturen und große Schwankungen, die gleichzeitig vorkommen. Die separate Behandlung jedes einzelnen Phänomens führt nicht zum Erfolg.

Unser Verständnis der Turbulenz ist immer noch unvollkommen. Um deren Verständnis weiter zu entwickeln ist es erforderlich, die Veknüpfung neuer Experimente mit fortschrittlichen Berechnungen und theoretischem Verständnis der Bewegungsgleichungen anzuwenden. Dies ist ein langwieriger Prozess und ein kurzfristiger Erfolg darf nicht erwartet werden. Andererseits kennt man heute zahlreiche generelle Eigenschaften der Turbulenz, von denen man einige berechnen kann. Da man für die Berechnung praktischer Strömungen nicht bis zum vollständigen theoretischen Verständnis der Turbulenz warten kann, werden diese mit unterschiedlichen Turbulenzmodellen (siehe Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik) auf der Basis der Reynolds-Gleichnungen berechnet. Die Turbulenzmodellierung und die grundlegenden Untersuchungen der Turbulenz werden auch zukünftig Seite an Seite weiterexistieren.

Einige faszinierende Aspekte der Turbulenz kommen zum Vorschein, wenn man sie mit anderen physikalischen Aspekten verknüpft. Dazu gehört der Einfluss der Rotation und der Schichtung sowie der Einfluss magnetischer Felder, Mehrphasenströmungen von Partikeln und Blasen, Polymere, komplexe Randbedingungen einschließlich rauher Wände, Verbrennung und so weiter. Es ergibt sich eine Vielzahl von Problemen, die in diesem weiten Feld erkundet werden können.

Es wurde ausgeführt, dass es üblich ist, die großen und kleinen Skalen sowie den dissipativen Bereich getrennt zu betrachten und dass die Kopplung der unterschiedlichen Skalen schwach ausgebildet ist. Dieses Bild der Turbulenz führt dazu, dass die kleinen Turbulenzskalen näherungsweise universal betrachtet werden und damit eine detaillierte Untersuchung der turbulenten Strömung nicht beachtet wird. Dies ist eine Modellvorstellung der turbulenten Strömung für deren Begründung viel Arbeit aufgewandt wurde. Detailaussagen schreiten jedoch nur langsam voran.

Es wurde mehrmals ausgeführt, dass jede turbulente Strömung unterschiedlich ist. Die großen Skalen sind abhängig von der Geometrie unterschiedlich. Es besteht jedoch eine zunehmende Kohärenz bezüglich der Bewegung großer Skalen in Abhängigkeit der Anfangs- und Randbedingungen. Diese Kohärenz der Ergebnisse kann vielleicht zu einer angemessenen Statistik führen. Es ist jedoch nicht klar, ob eine weiter entwickelte Statistik zum Erfolg führt.

Eine andere Anmerkung, die oft gemacht wird, ist dass Turbulenz nichts mit einer strömungsmechanischen Instabilität zu tun hat. In der Tat spielt die lineare Stabilitätstheorie kleiner Störungen ohne Berücksichtigung endlicher Störamplituden für die Aufrechterhaltung einer turbulenten Strömung eine untergeordnete Rolle. Stabilitätstheoretische Argumente haben jedoch oft und konsistent für die Beschreibung kohärenter Strukturen zum Erfolg geführt. Trotzdem bleibt der Nutzen der zu Beginn des Kapitels beschriebenen linearen Stabilitätstheorie derzeit unklar. Dennoch sollte eine Student der Turbulenz die unterschiedlichen Aspekte der hydrodynamischen Stabilität sowie die Vielzahl der Strukturen, die durch strömungsmechanische Instabilitäten verursacht werden, kennen lernen.

Letztendlich besteht die Dynamik turbulenter Strömungen aus einer Verknüpfung von Stabilität und multi-skaliger Strukturen im Rahmen der statistischen Theorien und Universalität.

Weiterführende Literatur

Alfredsson, P.H., Bakchinov, A.A., Kozlov, V.V., Matsubara, M.: Laminar-Turbulent transition at a high level of a free stream turbulence. In: Duck, P.W., Hall, P. (Hrsg.) Proceedings IUTAM Symposium on Nonlinear Instability and Transition in Three-Dimensional Boundary Layers, Bd. 35, S. 423–436. Kluwer, Dordrecht (1996)

Barenghi, C.F., Donnelly, R.J., Vinen, W.F.: Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (2001)

Barenblatt, G.I.: Scaling laws for fully developed Turbulent Shear flows. Part 1. Basic hypothesis and analysis. J. Fluid Mech. **248**, 513–520 (1993)

Batchelor, G.K.: Recent developments in turbulence research. In: Levy, H. (Hrsg.) Proceedings of the 7th International Congress for Applied Mechanics, London (1948)

Batchelor, G.K.: Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. Phys. Fluids **12**, II, II–233–II–239 (1969)

Batchelor, G.K., Townsend, A.A.: The nature of turbulent motion at large wave numbers. In: Proceedings of the Royal Society of London A, Bd. 199, S. 238–255. Royal Society, London (1949)

Boffetta, G.: Energy and enstrophy fluxes in the double cascade of two-dimensional turbulence. J. Fluid Mech. **589**, 253–260 (2007)

Boiko, A.V., Grek, G.R., Dovgal, A.V., Kozlov, V.V.: The Origin of Turbulence in Near-Wall Flows. Springer, Berlin/Heidelberg (2002)

Borgas, M.S.: A comparison of intermittent models in turbulence. Phys. Fluids A **4**, 2055–2061 (1992)

Brown, F.N.M.: A combined visual and hot-wire anemometer investigation of boundary-layer transition. AIAA J. **6**(1), 29–36 (1957)

Carnevale, G.F., McWilliams, J.C., Pomeau, Y., Weiss, J.B., Young, W.R.: Evolution of vortex statistics in two-dimensional turbulence. Phys. Rev. Lett. **66**, 2735–2737 (1991)

Champagne, F.H.: The fine-scale structure of the turbulent velocity field. J. Fluid Mech. **86**, 67–108 (1978)

Chandrasekhar, S.: Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability. Clarendon Press, Oxford (1961)

Chen, S., Doolen, G.D.: Lattice Boltzmann method for fluid flow. Annu. Rev. Fluid Mech. **23**, 539–600 (1991)

Chorin, A.J.: Vorticity and Turbulence. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1994)

Drazin, P.G., Reid, W.H.: Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press, Cambridge/New York (2004)
Dryden, H.L.: Recent advances in the mechanics of boundary layer flow. Adv. Appl. Mech. **1**, 1–40 (1948)
Emmons, H.W.: The Laminar-Turbulent transition in a boundary layer – Part I. J. Aeronaut. Sci. **18**, 490–498 (1951)
Falco, R.E.: The Production of Turbulence Near a Wall. 80-1356, AIAA (1980)
Falkovich, G., Gawedzki, K., Vertgassola, M.: Particles and fields in fluid turbulence. Rev. Mod. Phys. **73**, 913–975 (2001)
Feigenbaum, M.J.: Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. J. Stat. Phys. **19**, 25 (1978)
Frisch, U.: Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge University Press, Cambridge (1995)
Frisch, U., Vergassola, M.: A prediction of the multifractal model: the intermediate dissipation range. Europhys. Lett. **14**, 439–444 (1991)
Frisch, U., Sulem, P.L.: Numerical simulation of the inverse cascade in two-dimensional turbulence. Phys. Fluids **27**(8), 1921–1923 (1984)
Gagne, Y., Castaing, B.: Une Représentation Universelle sans Invariance Globale d'Échelle des Spectres d'Énergie en Turbulence d'Éveloppée. Comptes rendus de l'Académie des Sciences Paris **312**, 441 (1991)
Gaster, M.: A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. J. Fluid Mech. **14**, 222–224 (1962)
Gaster, M.: The development of three-dimensional wave packets in a boundary layer. J. Fluid Mech. **32**, 173–184 (1968)
Görtler, H.: Instabilität laminarer Grenzchichten an konkaven Wänden gegenüber gewissen dreidimensionalen Störungen. ZAMM **21**, 250–252 (1941)
Grant, H.L., Stewart, R.W., Moilliet, A.: Turbulence spectra from a tidal channel. J. Fluid Mech. **12**, 241–263 (1962)
Grossmann, S.: The onset of shear flow turbulence. Rev. Mod. Phys. **72**(2), 603–618 (2000)
Gurvich, A.S., Yaglom, A.M.: Breakdown of eddies and probability distributions for small-scale turbulence. Phys. Fluids **10**, 59–65 (1967)
Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Procaccia, I., Shraiman, B.: Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. Phys. Rev. A **33**, 1141–1151 (1986)
Heisenberg, W.: Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen. Annalen der Physik, 74 of 4, S. 577–627. Barth, Leipzig (1924)
Hentschel, H.G.E., Procaccia, I.: The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. Physica D **8**, 435–444 (1983)
Herbert, T.: Secondary instability of boundary layers. Ann. Rev. Fluid Mech. **20**, 487–526 (1988)
Herbert, T., Bertolotti, F.P.: Stability analysis of nonparallel boundary layers. Bull. Am. Phys. Soc. **32**, 2079–2806 (1987)
Hinze, J.O.: Turbulence. McGraw-Hill, New York (1987)
von Kármán, T.: Progress in statistical theory of turbulence. In: Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Bd. 34, S. 530–539. Academy, Washington, DC (1948)
Kida, S., Takaoka, M.: Vortex reconnection. Annu. Rev. Fluid Mech. **26**, 169–189 (2004)
Klebanoff, P.S.: Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient. Report 1247, NACA (1955)
Klebanoff, P.S., Tidstrom, K.D., Sargent, L.M.: The three-dimensional nature of boundary layer instability. J. Fluid Mech. **12**, 1–34 (1962)
Klingmann, B.G.B., Boiko, A.V., Westin, K.J.A., Kozlov, V.V., Alfredsson, P.H.: Experiments on the stability of Tollmien-Schlichting waves. Eur. J. Mech. B Fluids **12**(4), 493–514 (1993)
Kolmogorov, A.N.: Die lokale Struktur der Turbulenz in einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit bei sehr großen Reynolds-Zahlen. Dokl. Akad. Wiss. USSR **30**, 301–305 (1941)

Kolmogorov, A.N.: A refinement of previous hypothesis concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds numbers. J. Fluid Mech. **13**, 82–85 (1962)
Kraichnan, R.H.: Inertial ranges in two-dimensional turbulence. Phys. Fluids **10**, 1417–1423 (1967)
Kurien, S., Sreenivasan, K.R.: Measures of anisotropy and the universal properties of turbulence. In: New Trends in Turbulence, Les Houches, S. 53–111 (2001)
Landau, L.D., Lifschitz, E.M.: Lehrbuch der Theoretischen Physik: Hydrodynamik, 6. Akademie Verlag, Berlin (1991)
Laurien, E., Oertel, H., jr.: Numerische Strömungsmechanik. Springer Vieweg, Wiesbaden (2013)
Lesieur, M.: Turbulence in Fluids. Springer, Berlin, Heidelberg (2008)
Lesieur, M., Metais, O.: New trends in large Eddy simulation of turbulence. Annu. Rev. Fluid Mech. **28**, 45–82 (1996)
Lin, C.C.: On the stability of two-dimensional parallel flows. Q. Appl. Math. **3**, 117–142 (1945)
Lin, C.C.: The Theory of Hydrodynamic Stability, Bd. 5. Cambridge University Press, Cambridge (1955)
Lugt, H.J.: Vortex Flow in Nature and Technology. Wiley, New York (1983)
Mandelbrot, B.B.: Intermittent turbulence in self similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. J. Fluid Mech. **62**, 331–358 (1974)
McWilliams, J.C.: The vortices of two-dimensional turbulence. J. Fluid Mech. **219**, 361–385 (1990)
Meneveau, C., Sreenivasan, K.R.: A simple multifractal cascade model for fully developed turbulence. Phys. Rev. Lett. **59**, 1424–1427 (1987)
Moin, P., Mahesh, K.: Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. Annu. Rev. Fluid Mech. **30**, 539–578 (1998)
Moffatt, H.K.: Degrees of knotedness of tangles vortex lines. J. Fluid Mech. **36**, 117–129 (1969)
Monin, A.S., Yaglom, A.M.: Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence II. MIT, Cambridge (1975)
Narasimha, R.: The Laminar-turbulent transition zone in the boundary layer. Prog. Aerosp. Sci. **22**, 29–80 (1985)
Nikuradse, J.: Gesetzmäßigkeit der turbulenten Strömung in glatten Rohren. Forschungsheft 356, VDI, Berlin (1932)
Novikov, E.A.: Intermittency and scale similarity in the structure of a turbulent flow. J. App. Math. Mech. **35**, 231–241 (1971)
Novikov, E.A., Stewart, R.: Intermittency of turbulence and spectrum of fluctuations in energy-dissipation. Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seria Geofiz. **3**, 408 (1964)
Obukhov, A.: Some specific features of atmospheric turbulence. J. Fluid Mech. **13**, 77–81 (1962)
Oertel, H., jr.: Strömungsmechanische Instabilitäten, Prandtl – Führer durch die Strömungslehre. Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 11. Aufl. (2002)
Oertel, H., jr., Delfs, J.: Strömungsmechanische Instabilitäten. Springer, Berlin/Heidelberg (1996); Universitätsverlag, Karlsruhe (2005)
Oertel, H., jr., Böhle, M., Reviol, T.: Strömungsmechanik. Springer Vieweg, Wiesbaden (2015)
Oertel, H., jr.: Flow Control-Theoretical Concept of Absolute Instability. KIT Scientific Publishing, Karlsruhe (2010)
Oertel, H., sen., Oertel, H., jr.: Optische Strömungsmesstechnik. Braun Verlag, Karlsruhe (1989)
Orr, W.M.F.: The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and a viscous liquid. Proc. R. Ir. Acad. A **27**, 69–138 (1907)
Orszag, S.A.: Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. J. Fluid Mech. **50**, 684–703 (1971)
Paret, J., Tabeling, P.: Experimental observation of the two-dimensional inverse energy cascade. Phys. Rev. Lett. **79**, 4162–4165 (1997)
Parisi, G., Frisch, U.: Fully developed turbulence and intermittency. In: Ghil, M., Benzi, R., Parisi, G. (Hrsg.) Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate

Dynamics. Proceedings of the International School of Physics *Enrico Fermi*, Varenna, 1983, S. 84–87. North-Holland, Amsterdam/New York (1985)
Pope, S.B.: Turbulent Flows. Cambridge University Press, Cambridge (2000)
Rayleigh, J.W.S.: On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. Philos. Mag. Ser. **32**(6), 529–546 (1916)
Reynolds, O.: An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. Philos. Trans. R. Soc. Lond. **174**, 935–982 (1883)
Reynolds, O.: On the dynamic theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. Philos. Trans. R. Soc. Lond. **186**, 123–164 (1894)
Richardson, L.F.: The supply of energy from and to atmospheric Eddies. Proc. R. Soc. Lond. A **97**, 354–373 (1920)
Ruelle, D., Takens, F.: On the nature of turbulence. Commun. Math. Phys. **20**, 167–192 (1971)
Saric, W.: Görtler Vortices. Ann. Rev. Fluid Mech. **26**, 379–409 (1994)
Schubauer, G.B., Skramstad, H.K.: Laminar boundary-layer oscillations and stability of Laminar flow. J. Aeronaut. Sci. **14**(2), 69–78, (1947)
Sengupta, T.K.: Instabilities of Flows and Transition to Turbulence. CRC Press & Francis Group, Boca Raton (2012)
Sommerfeld, A.: Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung. In: Castelnuovo, G. (Hrsg.) Atti del IV Congresso internazionale dei matematici, Roma, S. 116–124 (1908)
Somméria, J.: Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. J. Fluid Mech. **170**, 139–168 (1986)
Speziale, C.G.: Analytical methods for the development of Reynolds stress closures in turbulence. Annu. Rev. Fluid Mech. **23**, 107–157 (1991)
Sreenivasan, K.R.: Fractals and multifractals in fluid mechanics. Annu. Rev. Fluid Mech. **23**, 539–600 (1991)
Sreenivasan, K.R.: On the universality of the Kolmogorov constant. Phys. Fluids **7**, 2778–2784 (1995)
Sreenivasan, K.R., Antonia, R.A.: Phenomenology of small scale turbulence. Annu. Rev. Fluid Mech. **29**, 435–472 (1997)
Sreenivasan, K.R., Donnelly, R.J.: Role of cryogenic helium in classical fluid dynamics: basic research and model testing. Adv. Appl. Mech. **37**, 239–275 (2000)
Stolovitzky, G., Kailasnath, P., Sreenivasan, K.R.: Kolmogorov's refined similarity hypotheses. Phys. Rev. Lett. **69**, 1178 (1992)
Stuart, J.T.: Unsteady boundary layers. In: Rosenhead, L. (Hrsg.) Laminar Boundary Layers, S. 349–408. Clarendon Press, Oxford (1963)
Tabeling, P.: Two-dimensional turbulence: a physicist's approach. Phys. Rep. **362**, 1–62 (2002)
Taylor, G.I.: Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Philos. Trans. R. Soc. Lond. A **223**, 289–343 (1923)
Taylor, G.I.: Statistical theory of turbulence, Parts 1–4. Proc. R. Soc. Lond. A **151**, 421–478 (1935)
Taylor, G.I.: Correlation measurements in a turbulent flow through a pipe. Proc. R. Soc. Lond. A **157**, 537–546 (1936)
Tollmien, W.: Über die Entstehung der Turbulenz. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 21–44 (1929)
Vainshtein, S.I., Sreenivasan, K.R.: Kolmogorov's refined similarity hypotheses. Phys. Rev. Lett. **73**, 3085–3088 (1994)
Voth, G.A., Satyanarayanan, K., Bodenschatz, E.: Lagrangian acceleration measurements at large Reynolds numbers. Phys. Fluids **10**, 2268–2280 (1998)
Wendt, F.: Turbulente Strömung zwischen zwei rotierenden koaxialen Zylindern. Ingenieur-Archiv **4**, 577–595 (1933)
Yeung, P.K.: Lagrangian investigations of turbulence. Rev. Fluid Mech. **34**, 115–142 (2002)
Zagarola, M.V., Smits, A.J.: Scaling of turbulent pipe flow. J. Fluid Mech. **373**, 33–79 (1998)

Konvektive Wärme- und Stoffübertragung

8

Herbert Oertel Jr.

Zusammenfassung

Das Kapitel *Konvektive Wärme- und Stoffübertragung ist Teil des Lehrbuches und Nachschlagewerkes H. Oertel jr. (Hrsg.) Prandtl-Führer durch die Strömungslehre*. Es werden die Grundlagen der freien und erzwungenen Konvektionsströmungen bereitgestellt und die Instabilitäten der Rayleigh-Bénard Konvektion mit der linearen Stabilitätsanalyse, die freie Konvektionsströmung der beheizten vertikalen Platte und des waagrechten Zylinders sowie die erzwungene Konvektionsströmung der ausgebildeten Rohrströmung behandelt.

Die Konvektionsströmung mit Stoffaustausch gibt einen Einblick in die Diffusions-Instabilitäten und deren Stabilitätsanalyse sowie dem Anwendungsbeispiel der erzwungenen Konvektionsströmung einer längs angeströmten Platte mit Stoffaustausch.

Das Kapitel *Konvektive Wärme- und Stoffübertragung* geht von Prandtls ursprünglichem Kapitel *Wärmeübergang bei strömenden Flüssigkeiten* aus. Es werden *freie Konvektionsströmungen* behandelt, die durch Temperatur- bzw. Konzentrationsgradienten bedingte Dichteunterschiede im Fluid verursacht werden. Diese haben im Schwerefeld einen Auftrieb zur Folge, der Konvektionsströmungen hervorruft. Beispiele freier Konvektionsströmungen an beheizten Zylindern und Platten wurden im einführenden Kapitel in Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik, Abb. 5 gezeigt. Auch die Rayleigh-Bénard-Konvektion der Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik, Abb. 6 und die Diffusions-Konvektion sind Beispiele freier Konvektionsströmungen.

Von *erzwungenen Konvektionsströmungen* spricht man, wenn der Strömung zusätzlich eine äußere Kraft, z. B. ein Druckgradient aufgeprägt wird. Ein Beispiel dafür sind beheizte oder gekühlte Rohrleitungen wie sie z. B. in Wärmetauschern benutzt werden.

H. Oertel Jr. (✉)
Baden-Baden, Deutschland
E-Mail: herbert.oertel@t-online.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5_8

Wärme- und Stoffaustauschvorgänge findet man z. B. im Ozean oder bei zahlreichen Prozessen der chemischen Verfahrenstechnik, wie Absorption, Adsorption, Extraktion und Destillation. Verdunstet Wasser an der Oberfläche der Ozeane, so verbleibt eine hohe Salzkonzentration und es entsteht eine instabile Dichteschichtung, die zu einer Diffusions-Instabilität führt. Die Ausbreitung von Substanzen in Lösungsmitteln oder das Trennen von Substanzen in Zentrifugen sind weitere Beispiele. Beispiele für biologische Stoffaustauschvorgänge sind die Versorgung des Bluts mit Sauerstoff und die Nahrungsaufnahme im Körper.

1 Grundlagen der Wärme- und Stoffübertragung

1.1 Freie und erzwungene Konvektion

Freie Konvektionsströmungen führen bei thermisch instabiler Schichtung zu strömungsmechanischen Instabilitäten. So ist bei der *Rayleigh-Bénard-Konvektion* der Grundzustand als Wärmeleitung gegeben. Sie wird bei der kritischen Rayleigh-Zahl durch die thermische Zellularkonvektion abgelöst. Durch die Konvektionsströmung erhöht sich der Wärmestrom in der horizontalen Flüssigkeitsschicht.

Eine *Rayleigh-Bénard-Instabilität* wird auch während des Abkühlvorgangs von flüssigem Magma beobachtet. Die Oberfläche kühlt ab und es bildet sich eine instabile Temperaturschicht im Magma. Im Bereich der instabilen Temperaturschicht stellt sich aufgrund der Schwerkraft eine in hexagonalen Zellen strukturierte Konvektionsströmung ein, die nach der Erstarrung typische Basaltsäulen hinterlässt (Abb. 8.1).

Abb. 8.1 Basaltsäulen hervorgerufen durch die Zellularkonvektion an Erstarrungsfronten

Bei der *Diffusions-Konvektion* ist der Grundzustand ein Konzentrationsprofil, das in einer horizontalen Fluidschicht mit mehreren Komponenten durch Diffusion und Wärmeleitung hervorgerufen wird. Bei der kritischen Diffusions-Rayleigh-Zahl erhöht sich der Massen- und Wärmestrom aufgrund der freien Konvektionsströmung.

Dichteunterschiede können auch durch Konzentrationsgradienten im Fluid hervorgerufen werden. Wie bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion entstehen an freien Oberflächen auch hier hexagonale Strömungszellen. Solche Situationen entstehen etwa beim Austrocknen eines Salzsees. Das an der Oberfläche verdunstende Wasser hinterlässt hohe Salzkonzentrationen mit entsprechenden Dichteerhöhungen. Schweres instabiles Fluid ist damit über leichterem geschichtet. Die beim Überschreiten eines kritischen Konzentrationsunterschiedes entstehende Konvektionsströmung nimmt in Bodennähe, wo sie in Richtung der Zellzentren fließt, Sand und Staubteilchen auf. Diese Partikel werden in der Folge durch die Auftriebszone im Zellzentrum mitgetragen und werden entsprechend der in der Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik, Abb. 5 skizzierten Strömung zu den Zellrändern verteilt. Hier schließlich sinken sie aufgrund der Konvektionsbewegung zu Boden, wo sie sich am Ende ablagern. So entstehen die in Abb. 8.2 gezeigten Strukturen am Grund ausgetrockneter Salzseen.

Als ergänzendes Beispiel und Einführung in das Kapitel Wärmeübertragung sei die freie Konvektionsströmung an einer *beheizten vertikalen Platte* angeführt (Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik, Abb. 6), die in Abschn. 2.2 behandelt wird. Abb. 8.3 zeigt das Geschwindigkeits- und Temperaturprofil in Luft mit

Abb. 8.2 Zellularkonvektion als Folge von Konzentrationsgradienten

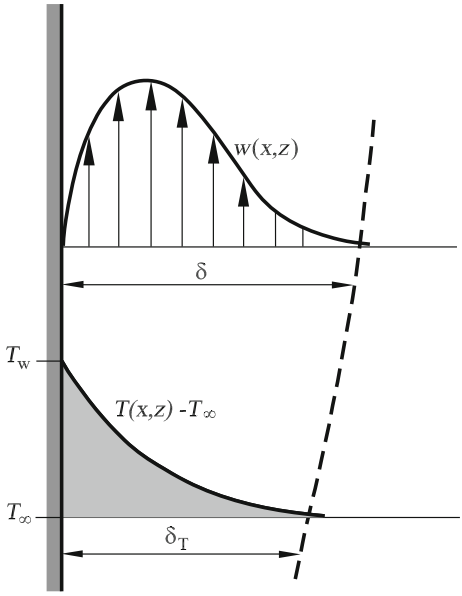


Abb. 8.3
Konvektionsströmung an der beheizten vertikalen Platte

der Prandtl-Zahl $Pr = 0{,}71$ für eine isotherme Wand. Die Wandtemperatur T_w ist größer als die Umgebungstemperatur T_∞. Die von der Platte auf das Fluid übertragene Wärme führt zu einer Temperaturerhöhung des Fluids in Wandnähe und wegen der Temperaturabhängigkeit der Dichte zu einer Veränderung der Dichte. Nimmt die Dichte mit steigender Temperatur ab, so entstehen in Wandnähe Auftriebskräfte und wärmeres Fluid steigt längs der Platte auf. Der Einfluss der Platte bleibt auf die Wandgrenzschicht beschränkt. Das Verhältnis der Dicke der Reibungsgrenzschicht δ zur Dicke der Temperaturgrenzschicht δ_T verhält sich wie $\sqrt{Pr}$. Auch in der Grenzschicht der senkrechten Platte vollzieht sich der laminar-turbulente Übergang oberhalb einer kritischen dimensionslosen Kennzahl. Da zusätzlich der Wärmetransport zu berücksichtigen ist, setzt der Übergang zur turbulenten Grenzschichtströmung bei der kritischen Rayleigh-Zahl ein.

Erzwungene Konvektionsströmungen unterliegen neben den Auftriebskräften zusätzlich äußeren Kräften. Ein Beispiel dafür ist die Rohrströmung von Abschn. 1 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten mit Wärmetransport, die in Abschn. 3.1 eingehend behandelt wird. Die Abb. 8.4 zeigt ergänzend zur Ausbildung des parabolischen Geschwindigkeitsprofils im Einlauf der laminaren Rohrströmung die Ausbildung des Temperaturprofils bei isothermer Rohrwand.

Im Einlaufbereich hängt die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung von der Radialkoordinate r und von x ab. Für den viskosen Einlauf kann bei gleichmäßiger Zuströmung $l \approx 0{,}05 \cdot Re_D$ angenommen werden. Das Verhältnis der thermischen zur viskosen Einauflänge hängt wiederum von der Prandtl-Zahl des Fluids ab. Bei flüssigen Metallen ist wegen $\delta_T \gg \delta$ der thermische Einlauf gegenüber dem viskosen Einlauf vernachlässigbar. Bei hochviskosen Ölen ist dies wegen $\delta_T \ll \delta$ umgekehrt.

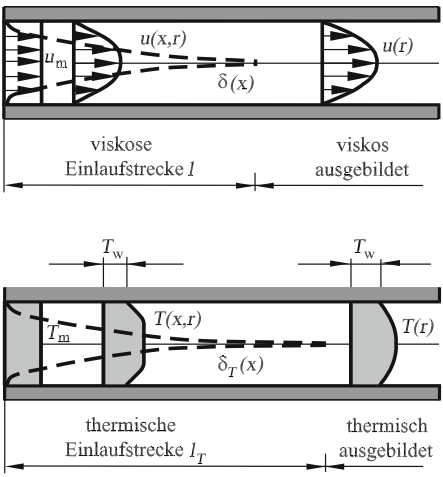


Abb. 8.4 Entwicklung des Geschwindigkeits- und Temperaturprofils der gekühlten Rohrströmung

1.2 Wärmeleitung und Konvektion

Der Energietransport bei Temperaturgradienten die nicht parallel zum Schwerefeld wirken, erfolgt durch Wärmeleitung und der überlagerten thermischen Konvektionsströmung. Eine kritische Rayleigh-Zahl für das Einsetzen der Zellularkonvektion existiert lediglich bei von unten beheizten horizontalen Fluidschichten. Dabei wird die Wärmestrahlung im Folgenden vernachlässigt. Die an eine Wand pro Flächeneinheit und Zeiteinheit übertragene Wärmemenge beträgt:

$$q_\mathrm{w} = h \cdot (T_\mathrm{m} - T_\mathrm{w}) \quad . \tag{8.1}$$

h ist der Wärmeübergangskoeffizient, T_w die Wandtemperatur und T_m eine mittlere Temperatur des strömenden Mediums. Bei umströmten Körpern wählt man die Temperatur der ungestörten Anströmung T_∞. Die dimensionslose Kennzahl, die den Wärmetransport charakterisiert, ist die *Nußelt-Zahl*:

$$Nu_l = \frac{q_\mathrm{w} \cdot l}{\lambda \cdot (T_\mathrm{m} - T_\mathrm{w})} = \frac{h \cdot l}{\lambda} \quad . \tag{8.2}$$

Sie beschreibt das Verhältnis des Wärmeübergangs der Wärmeleitung und Konvektion bezogen auf die Wärmeleitung des ruhenden Fluids.

Da für die freie Konvektionsströmung zunächst keine vorgegebene Bezugsgeschwindigkeit existiert, muss statt der Reynolds-Zahl eine für die Konvektionsströmung charakteristische Kennzahl gefunden werden. Man wählt die Grashof-Zahl:

$$Gr_l = \frac{\alpha \cdot g \cdot (T_\mathrm{m} - T_\infty) \cdot l^3}{\nu^2} \quad . \tag{8.3}$$

Aus dem Vergleich mit dem Quadrat der Reynolds-Zahl $Re_l^2 = w^2 \cdot l^2/\nu^2$ folgt für die freie Konvektionsströmung die charakteristische Geschwindigkeit:

$$w = \sqrt{\alpha \cdot g \cdot (T_\mathrm{m} - T_\infty) \cdot l} \quad . \tag{8.4}$$

Die Verknüpfung mit der Prandtl-Zahl $Pr = c_p \cdot \mu/\lambda = \nu/k$ ergibt die *Rayleigh-Zahl* der freien Konvektionsströmung:

$$Ra = Pr \cdot Gr \quad . \tag{8.5}$$

Bei Vorgabe des Wärmestroms in bzw. von der Wand schreibt sich die *Grashof-Zahl*:

$$Gr_q = \frac{\alpha \cdot g \cdot q_\mathrm{w} \cdot l^4}{\nu^2 \cdot \lambda} \quad . \tag{8.6}$$

Bei der beheizten vertikalen Platte verändern sich aufgrund der Aufdickung der thermischen Grenzschicht der Wärmestrom q_w und der Wärmeübergangskoeffizient h proportional $l^{-1/4}$.

Bei *erzwungener Konvektionsströmung* tritt als weitere unabhängige Kennzahl die Eckert-Zahl auf:

$$Ec = \frac{w^2}{c_p \cdot (T_\mathrm{m} - T_\mathrm{w})} \quad . \tag{8.7}$$

Dabei wird die kinetische Energie des strömenden Mediums auf die thermische Enthalpiedifferenz im Fluid bezogen.

Für ein gegebenes Wärmetransportproblem gilt es also den dimensionslosen Zusammenhang

$$Nu = \mathrm{f}(Re, Pr, Ec) \tag{8.8}$$

entweder numerisch durch Lösen der strömungsmechanischen Grundgleichungen von Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik oder experimentell zu bestimmen. Bei nicht zu großen Strömungsgeschwindigkeiten ist die Eckert-Zahl sehr klein, so dass sich die Beziehung Gl. (8.8) auf $Nu = \mathrm{f}(Re, Pr)$ reduziert.

Für die *freie Konvektionsströmung* ist keine charakteristische Geschwindigkeit vorgegeben, so dass Gl. (8.8) durch

$$Nu = \mathrm{f}(Gr, Pr) \tag{8.9}$$

zu ersetzen ist. Die Grashof-Zahl entspricht also bei der freien Konvektion der Reynolds-Zahl der erzwungenen Konvektionsströmung. Während Reynolds-Zahl,

Eckert-Zahl und Grashof-Zahl von den geometrischen, dynamischen und thermodynamischen Parametern des Wärmetransportproblems abhängen, ist die Prandtl-Zahl eine stoffspezifische Kennzahl.

1.3 Diffusion und Konvektion

Bei der durch Diffusionsvorgänge verursachten Konvektionsströmungen ergeben sich analoge Gesetzmäßigkeiten wie beim Wärmetransport. Der Massentransport erfolgt entlang größter Konzentrationsgradienten. Der thermische Ausdehnungskoeffizient $\alpha = (1/\rho) \cdot \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}T$ wird jetzt durch den Konzentrationsausdehnungskoeffizient $\beta = (1/\rho) \cdot \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}c$ und die Wärmeleitzahl k durch den Diffusionskoeffizienten D ersetzt. Entsprechend ersetzt man für die freie Diffusionskonvektion die Rayleigh-Zahl durch die *Diffusions-Rayleigh-Zahl*:

$$Ra_D = \frac{\beta \cdot g \cdot (c_\mathrm{m} - c_\infty) \cdot l^3}{\nu \cdot D} \quad , \tag{8.10}$$

mit einer mittleren Massenkonzentration c_m und der Bezugskonzentration c_∞. Die Prandtl-Zahl wird durch die *Schmidt-Zahl* ersetzt:

$$Sc = \frac{\nu}{D} \quad . \tag{8.11}$$

Gibt man entsprechend dem Wärmestrom den Diffusionsstrom an der Wand $j_\mathrm{w} = D \cdot \partial c_\mathrm{w}/\partial n$ mit der Wandnormalen n vor, so ergibt sich bei diffusionsbedingter freier Konvektion die Diffusions-Grashof-Zahl

$$Gr_D = \frac{\beta \cdot g \cdot j_\mathrm{w} \cdot l^4}{\nu^2 \cdot D} \tag{8.12}$$

und die Nußelt-Zahl für den Stoffübergang

$$Nu_D = \frac{j_\mathrm{w} \cdot l}{D \cdot (c_\mathrm{m} - c_\mathrm{w})} \quad . \tag{8.13}$$

Für ein gegebenes Diffusionsproblem gilt es also für die *freie Konvektionsströmung* die Beziehung

$$Nu_D = \mathrm{f}(Gr_D, Sc) \tag{8.14}$$

und für die *erzwungene Konvektionsströmung*

$$Nu_D = \mathrm{f}(Re, Sc) \tag{8.15}$$

zu bestimmen.

Dabei stellt sich die Frage wie groß die Schmidt-Zahl Sc im Vergleich zur thermischen Prandtl-Zahl ist. Bei Gasen liegt die Schmidt-Zahl wie die Prandtl-Zahl bei der Größenordnung 1, da sich k und D nur wenig unterscheiden. Für die Diffusion von Wasserdampf in Luft ist der Wert $Sc \approx 0{,}62$ bei einer mittleren Temperatur von 8 °C. Die Diffusion von CO_2 in Luft ergibt bei 0 °C $Sc \approx 1{,}1$. Demzufolge ergeben sich in Gasen bei gleicher Reynolds- bzw. Grashof-Zahl Nußelt-Zahlen der gleichen Größenordnung für den Wärme- und Stofftransport. Dagegen sind in wässrigen Lösungen die Schmidt-Zahlen deutlich größer als die Prandtl-Zahlen. Für die Diffusion von Makromolekülen in wässrigen Lösungen ergeben sich Schmidt-Zahlen der Größenordnung 10^4 während die Prandtl-Zahl von Wasser 7 beträgt. Der Stoffaustausch in wässrigen Lösungen ist demzufolge verwandt mit dem Wärmeaustausch in zähen Ölen.

2 Freie Konvektion

2.1 Rayleigh-Bénard-Konvektion

Es wird die thermische Rayleigh-Bénard-Instabilität in einer von unten beheizten horizontalen Flüssigkeitsschicht unter Schwerkrafteinfluss betrachtet. Die Schicht ist horizontal unendlich ausgedehnt und hat die Höhe l. Ihre Unterseite wird auf die Temperatur T_1 geheizt und ihre Oberseite auf der Temperatur $T_2 < T_1$ gehalten (Abb. 8.5). Beim Überschreiten einer kritischen Temperaturdifferenz $\Delta T = (T_1 - T_2)$ zwischen der oberen und unteren festen Berandung der Flüssigkeitsschicht bilden sich in der horizontalen Flüssigkeitsschicht geradlinige Konvektionsrollen aus. Die Längsachsen dieser stationären Konvektionsrollen liegen horizontal und sind periodisch nebeneinander angeordnet. Der beschriebene Vorgang wird als *thermische Zellularkonvektion* bezeichnet.

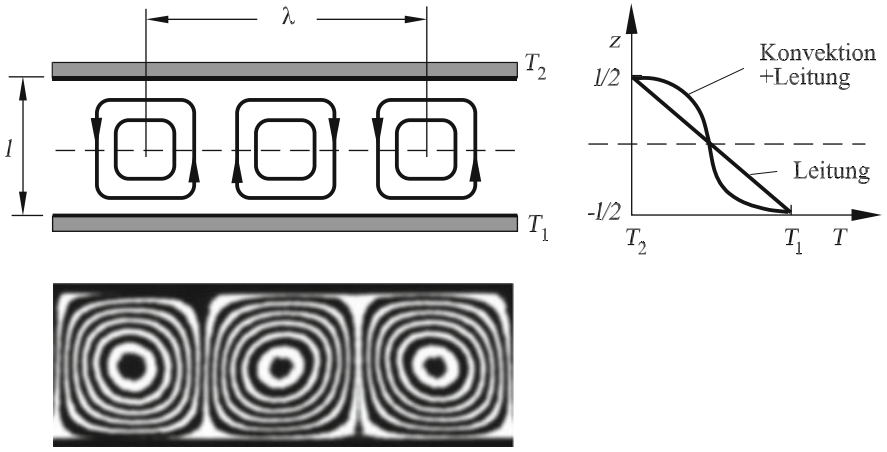


Abb. 8.5 Thermische Zellularkonvektion

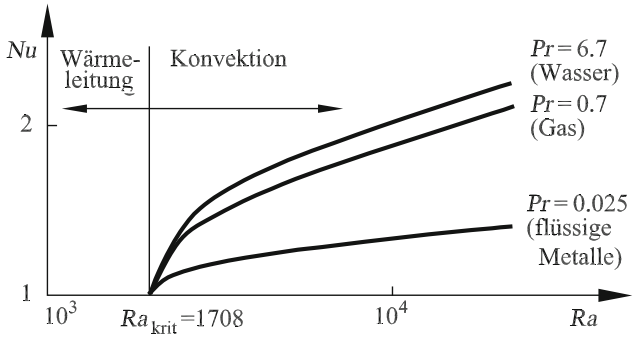


Abb. 8.6 Verzweigungsdiagramm des dimensionslosen Wärmestroms Nu über der Rayleigh-Zahl Ra

Die Konvektionsströmung verursacht wegen der zusätzlichen thermischen Austauschvorgänge gegenüber dem Wärmeleitungsgrundzustand eine Zunahme des Wärmestroms $\dot{q}$. Die *Nußelt-Zahl* $Nu = (\dot{q}_{\text{Leitung}} + \dot{q}_{\text{Konvektion}})/\dot{q}_{\text{Leitung}}$ ist in Abb. 8.6 über der *Rayleigh-Zahl* $Ra = \alpha \cdot \Delta T \cdot g \cdot l^3/(\nu \cdot k)$ aufgetragen. Dabei sind α der thermische Volumenausdehnungskoeffizient, ν die kinematische Viskosität und k die Temperaturleitzahl des Mediums. Das Diagramm weist bis zu einer kritischen Rayleigh-Zahl von $Ra_{\text{krit}} = 1708$ die konstante Nußelt-Zahl $Nu = 1$ auf. Offensichtlich liegt hier reine Wärmeleitung vor. Beim Überschreiten dieser kritischen Rayleigh-Zahl verzweigt sich der dimensionslose Wärmestrom und zeigt eine starke Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl und Prandtl-Zahl $Pr = \nu/k$ des Mediums. Dieser plötzlich einsetzende Vorgang wird offensichtlich durch eine strömungsmechanische Instabilität verursacht. Der ursprüngliche Zustand (reine Wärmeleitung, ruhendes Medium) kann nicht weiter aufrecht erhalten werden. Er wird instabil und von einem neuen Zustand (Wärmeleitung + Konvektion, bewegtes Medium) abgelöst. Dabei ist die kritische Rayleigh-Zahl offenbar unabhängig vom Medium, da der Verzweigungspunkt $(Nu, Ra_{\text{krit}}) = (1, 1708)$ unabhängig von der Prandtl-Zahl Pr ist.

Die thermische Zellularkonvektion spielt in vielen technischen Problemen eine wichtige Rolle. So wird einerseits der Ingenieur bestrebt sein, Wärmeisolierungen aus Luftschichten (z. B. Thermopane-Scheiben) so auszulegen, dass die thermische Zellularkonvektion unterbleibt. Andererseits erfordert die Konstruktion eines Wärmetauschers möglichst starke Konvektionsvorgänge.

Die Ursache für die Instabilität sei kurz veranschaulicht. Ein Flüssigkeitsteilchen aus einer unteren Schicht z_1 besitzt wegen der höheren Temperatur eine kleinere Dichte als eines in einer höheren Schicht $z_2 > z_1$. Dies hat eine thermisch *instabile Schichtung* zur Folge. Wird das Teilchen bei z_1 in eine darüber liegende Schicht verlagert, so erfährt es in der neuen Umgebung dichteren Fluids eine Auftriebskraft die es weiter nach oben beschleunigt. Dieser Tendenz wirken Reibungskräfte und die Wärmeleitung entgegen, die den treibenden Temperatur- und damit Dichteunterschied des Teilchens zur Umgebung auszugleichen sucht.

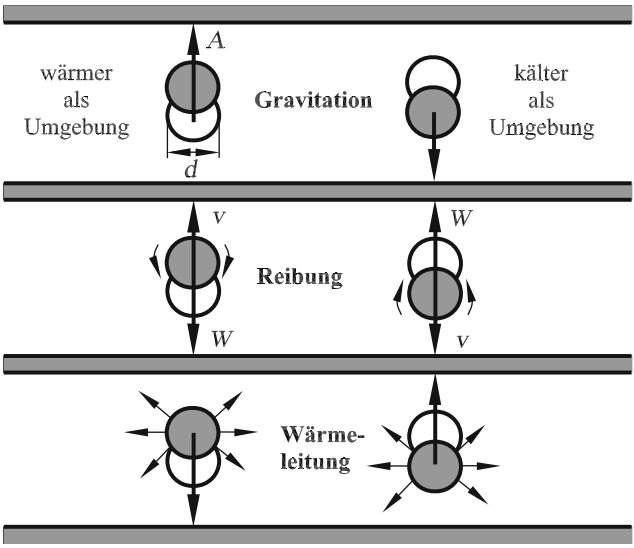


Abb. 8.7 Zur physikalischen Interpretation der thermischen Zellularkonvektion

Das betrachtete Flüssigkeitselement hat die Größenordnung d (Abb. 8.7). Das Element bewegt sich mit einer Störgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ von $z = z_0$ auf eine darüber liegende Schicht $z_0 + d$. Das geschieht in der Zeitspanne $\Delta t = d/\boldsymbol{v}$. Dabei wirkt aufgrund des Dichteunterschiedes $\Delta\rho \sim \rho_\mathrm{m} \cdot \alpha_\mathrm{m} \cdot \Delta T$ eine Auftriebskraft $A = \Delta\rho_\mathrm{m} \cdot g \cdot V_k \sim \rho_\mathrm{m} \cdot \alpha_\mathrm{m} \cdot \Delta T \cdot g \cdot d^3$. Gleichzeitig entsteht bei kleiner Störgeschwindigkeit ein Widerstand nach Stokes von $W \sim \mu \cdot d^2 \cdot \boldsymbol{v}/d = \mu \cdot d^2/\Delta t$. Entscheidend ist in wieweit während der Zeitspanne Δt die Wärmeleitung dafür sorgt, den treibenden Temperaturunterschied zwischen dem Flüssigkeitselement und der neuen Umgebung auszugleichen. Der Unterschied an innerer Energie von $E_k \sim \rho \cdot c_v \cdot \Delta T \cdot d^3$ wird infolge von Wärmeleitung $\dot{q} \sim \lambda \cdot \Delta T/d$ durch eine Querschnittsfläche $\sim d^2$ an die Umgebung abgegeben. Die Zeitskala für diesen Vorgang ist demnach $\Delta t = E_k/\dot{q} \cdot d^2 \sim d^2/k$ und kann in die obigen Proportionalitätsbetrachtungen eingesetzt werden.

Die Bedingung für das instabil werden ist offensichtlich durch das Dominieren des Auftriebs über den Widerstand bestimmt:

$$A \geq W \Longleftrightarrow \rho \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot g \cdot d^3 \geq \mu \cdot d^2 \cdot \frac{k}{d^2} \cdot \mathrm{C}\,,$$

bzw. mit $d = l$

$$\frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot g \cdot l^3}{k \cdot \nu} = Ra \geq \mathrm{C} = Ra_\mathrm{krit}\,. \tag{8.16}$$

Offenbar hat die Rayleigh-Zahl die Bedeutung des Verhältnisses aus Auftriebskraft zu Reibungskraft.

Stabilitätsanalyse

Die *Grundgleichungen* der thermischen Zellularkonvektion (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (85)) unter Voraussetzung der *Boussinesq-Approximation* wurden in Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik bereitgestellt. Mit dem Störansatz

$$\begin{aligned} u &= U_0 + \varepsilon \cdot u', \quad p = p_0 + \varepsilon \cdot p', \\ \rho &= \rho_0 + \varepsilon \cdot \rho', \quad T = T_0 + \varepsilon \cdot T' \end{aligned} \tag{8.17}$$

und $\varepsilon \ll 1$ ergeben sich die linearisierten Differentialgleichungen der kleinen Störungen

$$\nabla \cdot u' = 0.$$

$$\frac{1}{Pr_\infty} \cdot \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla u' + u' \cdot \nabla U_0 \right) = -\nabla p' + \Delta u' + Ra_\infty \cdot T' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8.18}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla T' + T' \cdot \nabla U_0 = \Delta T'.$$

Der *Grundzustand* $\boldsymbol{U}_0$, p_0, T_0, dessen Stabilität untersucht werden soll ist durch den Ruhezustand mit $\boldsymbol{U}_0 = 0$ gegeben. Die Energiegleichung lautet damit:

$$\Delta T_0 = 0\,. \tag{8.19}$$

Sie stellt das stationäre Wärmeleitungsproblem dar. Für den Ruhezustand ist es erforderlich, dass der Temperaturgradient parallel zu $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$ ist. Für die Rayleigh-Bénard-Konvektion gilt die Randbedingung:

$$T_0(x, y, z = -\frac{1}{2}) = T_1\,, \qquad T_0(x, y, z = \frac{1}{2}) = T_2\,.$$

Der Grundzustand ist nur von der Vertikalrichtung z abhängig:

$$\frac{\mathrm{d}^2 T_0}{\mathrm{d}z^2} = 0\,, \qquad T_0(z) = \mathrm{C}_1 \cdot z + \mathrm{C}_0\,.$$

Die Konstanten $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$ folgen aus den Randbedingungen. Für den dimensionslosen Wärmeleitungsgrundzustand erhält man:

$$T_0 = -z\,. \tag{8.20}$$

Die Impulsgleichungen (8.18) ergeben:

$$0 = -\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}z} + Ra \cdot T_0 \,,$$

mit Gl. (8.20) für den Druck

$$p_0 = -\frac{1}{2} \cdot Ra \cdot z^2 + p_\infty \,, \tag{8.21}$$

mit dem Umgebungsdruck p_∞. Die oben ermittelte Temperaturverteilung und damit auch das gesamte Wärmeleitungsproblem ist unabhängig von p_∞. Nicht das Niveau des Drucks p_∞ hat einen Einfluss auf das Stabilitätsproblem, sondern ausschließlich sein Gradient.

Bei den *Randbedingungen* für die Störgrößen unterscheidet man freie und feste horizontale Berandungen der Flüssigkeitsschicht. Auf *freien* Berandungen (Flüssigkeitsoberfläche) $z = \pm 1/2$ gilt als kinematische Strömungsbedingung die Nichtdurchdringung der Oberfläche mit

$$w'(x, y, \pm\frac{1}{2}) = 0 \,, \tag{8.22}$$

unter der Voraussetzung, dass die Verformung aufgrund kleiner Störung vernachlässigt werden kann. An *festen* Berandungen gilt die Haftbedingung:

$$\boldsymbol{u}'(x, y, \pm\frac{1}{2}) = 0 \,. \tag{8.23}$$

Man unterscheidet isotherme und adiabate Berandungen. Besitzt die horizontale Berandung eine große Wärmeleitfähigkeit verhält sie sich *isotherm* und die Temperaturstörungen verschwinden:

$$T'(x, y, \pm\frac{1}{2}) = 0 \,. \tag{8.24}$$

Bei *adiabaten Berandungen* wird ein konstanter Wärmefluss aufgeprägt. Änderungen $\dot{q}' = -\lambda \cdot \partial T'/\partial z$ dieses Wärmeflusses durch Temperaturstörungen sind gleich Null, wenn die Temperaturleitfähigkeit des Begrenzungsmediums sehr klein ist.

Die mit dem fest vorgegebenen Wärmestrom einhergehenden lokalen Änderungen in der Temperatur des Begrenzungsmediums sind ebenfalls klein und Rückwirkungen auf die Grundlösung vernachlässigbar. Das führt zu der Temperaturrandbedingung:

$$\frac{\partial T'}{\partial z}(x, y, z_r) = 0 \,. \tag{8.25}$$

Die Störungsdifferentialgleichungen (8.18) führen mit den jeweiligen Randbedingungen auf ein Eigenwertproblem, das die Berechnung der kritischen Rayleigh-Zahl Ra_{krit} und Wellenzahl a_{krit} der periodischen Zellstrukturen der Rayleigh-Bénard-Konvektion ermöglicht. Fasst man in den Störungsdifferentialgleichungen die Variablen zum Lösungsvektor $\boldsymbol{u}' = (u', v', w', p', T')$ zusammen, lassen sich mit dem Separationsansatz

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}'_x(x, y, z, \omega) \cdot \exp(-\mathrm{i} \cdot \omega \cdot t) \tag{8.26}$$

die Zeit- und Ortsabhängigkeit separieren. Eliminiert man weiterhin u', v' und p' (siehe z. B. Oertel und Delfs 1996, 2005) erhält man für die Störungsdifferentialgleichungen:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\Delta^2 & -Ra \cdot \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ -1 & -\Delta \end{bmatrix} - \mathrm{i} \cdot \omega \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{1}{Pr} \cdot \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} w' \\ T' \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{8.27}$$

Elimination von w' führt für $\boldsymbol{u}' = T'$ auf das Eigenwertproblem:

$$\left\{ \left[-\Delta^3 + Ra \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] - \mathrm{i} \cdot \omega \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \cdot \Delta^2 \right] + \omega^2 \cdot \left[\frac{1}{Pr} \cdot \Delta \right] \right\} T'_x = 0 . \tag{8.28}$$

Das Eigenwertproblem für T'_x enthält den Eigenwert ω quadratisch.

Für die unendlich ausgedehnte Fluidschicht des Rayleigh-Bénard-Stabilitätsproblems lässt die periodische Zellstruktur den Separationsansatz zu:

$$(u', v', w', p', T')(x, y, z) = \mathrm{F}(x, y) \cdot \left(\hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z), \hat{p}(z), \hat{T}(z) \right) . \tag{8.29}$$

Zu beachten ist, dass dieser Ansatz bei seitlichen Behälterberandungen nicht mehr möglich ist, da in diesem Fall explizite Randbedingungen an den Seitenwänden gefordert werden müssen. Die Substitution des Ansatzes Gl. (8.29) in die stationäre Energiegleichung (8.18) liefert zunächst den Zusammenhang der Funktion $\mathrm{F}(x, y)$ mit dem frei wählbaren Separationsparameter a^2:

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 \hat{T}}{\mathrm{d}z^2} + \hat{w}}{\hat{T}} = -\frac{\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2}}{F} = a^2 = \text{konst.} . \tag{8.30}$$

In der separierten Differentialgleichung für T' Gl. (8.28) erscheint dann a^2 in Verbindung mit der Voraussetzung $\omega = 0$ (Neutralzustand):

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} - a^2\right)^3 \hat{T}(z) + Ra \cdot a^2 \cdot \hat{T}(z) = 0\,. \tag{8.31}$$

Mit den jeweiligen Randbedingungen ist dadurch wieder ein Eigenwertproblem definiert, in dem bei gegebenem a der periodischen Zellstruktur jetzt die Rayleigh-Zahl Ra als Eigenwert auftritt. Das Eigenwertproblem Gl. (8.31) beschreibt das Einsetzen der thermischen Zellularkonvektion eines Fluids. Zu jeder beliebigen vorgegebenen Wellenzahl a wird die dazugehörige Rayleigh-Zahl $Ra(a)$ ermittelt. Für die räumlich periodische Zellstruktur gilt:

$$\mathrm{F}(x, y) = \exp(\mathrm{i} \cdot a_x \cdot x + \mathrm{i} \cdot a_y \cdot y)\,, \tag{8.32}$$

mit

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2\,. \tag{8.33}$$

Der Ausdruck Gl. (8.32) stellt für reelle Zahlen a_x, a_y eine räumlich periodische ebene Welle dar, mit den Teilwellenzahlen $a_x = 2 \cdot \pi/\lambda_x$ und $a_y = 2 \cdot \pi/\lambda_y$ (Abb. 8.8). Man erkennt, dass die Wahl einer Teilwellenzahl a_x (bzw. a_y) nur der Einschränkung $a_x^2 \leq a^2$ (bzw. $a_y^2 \leq a^2$) unterliegt. Die jeweils andere Teilwellenzahl folgt danach aus Gl. (8.33). Der Separationsparameter a hat offenbar die Bedeutung einer charakteristischen Wellenzahl. Das Stabilitätsproblem wird nur durch die Wellenlänge $\lambda = 2 \cdot \pi/a$ der dazugehörigen charakteristischen Störwelle bestimmt, nicht aber von der Orientierung ihrer Wellennormalen $\varphi = 1/\tan(a_y/a_x)$ in der (x, y)-Ebene.

Wegen des Fehlens einer ausgezeichneten Richtung kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit z. B. $a_x \in [0, a/\sqrt{2}]$ wählen. Die (x, y)-Struktur der

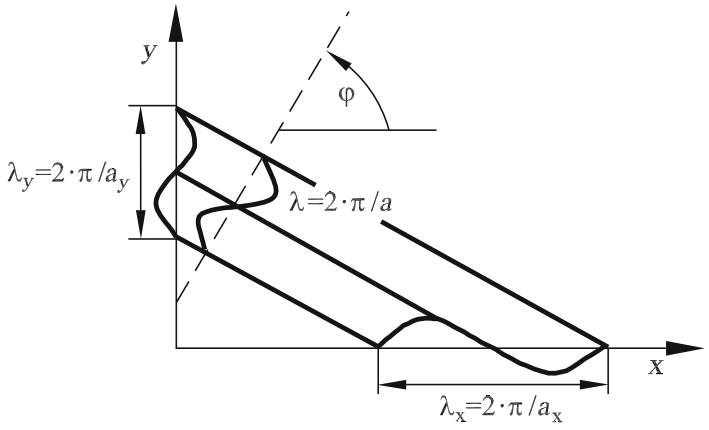


Abb. 8.8 Zur Interpretation des Separationsparameters a als Wellenzahlen

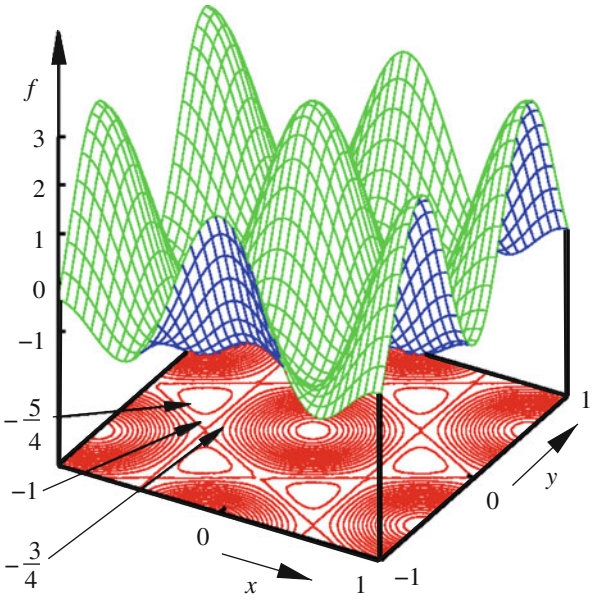


Abb. 8.9 Entstehung von hexagonalen Zellstrukturen (Höhenlinien) durch Überlagerung dreier Eigenlösungen

Lösung ist ebenfalls unabhängig von der speziellen Lösung $\hat{T}(z)$, die aus Gl. (8.31) ermittelt wird. Bestimmt man beispielsweise aus dem Eigenwertproblem Gl. (8.31) die kritische Wellenzahl a_{krit}, so gibt es unendlich viele Möglichkeiten diese mittels Gl. (8.33) aus Teilwellen zusammenzusetzen.

So sind eindimensionale (z. B. $a_x = 0$, $a_y = a$) Rollenstrukturen ebenso denkbar wie zweidimensionale Zellstrukturen mit sechseckförmigem Grundriss. Ein Beispiel gibt die Abb. 8.9), in der die Funktion $f(x, y) = \cos(a \cdot y) + \cos(\sqrt{3}/2 \cdot a \cdot x + 1/2 \cdot a \cdot y) + \cos(\sqrt{3}/2 \cdot a \cdot x - 1/2 \cdot a \cdot y)$ mit $a = 2 \cdot \pi$ aufgetragen ist.

Welche der möglichen Strukturen sich ausbildet, ist nach der linearen Theorie einzig von Anfangsbedingungen abhängig. In der Realität zeigt sich jedoch, dass z. B. bei freien Berandungen auch bei verschiedenen Anfangsstörungen die hexagonalen Zellen bevorzugt sind, während bei festen Berandungen Rollenstrukturen beobachtet werden.

Stabilitätsdiagramm

In diesem Abschnitt werden drei Lösungen des Eigenwertproblems Gl. (8.31) für unterschiedliche Randbedingungen Gl. (8.22), (8.23), (8.24) und (8.25) diskutiert.

Für den Fall zweier *freier isothermer Berandungen*, ist die Lösung des Eigenwertproblems in geschlossener Form angebbar. Es gelten die Randbedingungen:

$$\hat{T}(z = \pm\frac{1}{2}) = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\hat{T}}{\mathrm{d}z^2}(z = \pm\frac{1}{2}) = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^4\hat{T}}{\mathrm{d}z^4}(z = \pm\frac{1}{2}) = 0\,. \quad (8.34)$$

Jede gerade Funktion $\hat{T}^g(z) = \cos((2 \cdot n + 1) \cdot \pi \cdot z)$ erfüllt diese Randbedingungen. Das Gleiche gilt für die ungerade Funktion $\hat{T}^u(z) = \sin(2 \cdot n \cdot \pi \cdot z)$. Setzt man $\hat{T}^g$ in das Eigenwertproblem Gl. (8.31) ein, ergibt sich die Eigenlösung:

$$Ra(a) = \frac{((2 \cdot n + 1)^2 \cdot \pi^2 + a^2)^3}{a^2} \,. \tag{8.35}$$

Damit ist die gesuchte Beziehung zwischen der Rayleigh-Zahl Ra und der Wellenzahl a auf der Indifferenzkurve $Ra(a)$ gefunden. Bei genauer Betrachtung von Gl. (8.35) fällt auf, dass es unendlich viele solcher Indifferenzkurven gibt, denn die Ordnungszahl n kann beliebig vorgegeben werden. Es ist leicht einsehbar, dass für alle a die niedrigsten (und damit relevanten) Rayleigh-Zahlen für die Grundmode $n = 0$ vorliegen. Die kritische Rayleigh-Zahl Ra_{krit} erhält man dadurch, dass die Bedingung verschwindender Ableitung im Minimum der Funktion $Ra(a)$ gilt:

$$Ra_{\text{krit}} = \frac{27}{4} \cdot \pi^4 = 658 \,, \text{ bei} \qquad a_{\text{krit}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2.22 \,. \tag{8.36}$$

Setzt man die ungeraden Eigenfunktionen $\hat{T}^u$ an, erkennt man, dass die am tiefsten liegende $Ra(a)$-Kurve weit oberhalb Derjenigen für die geraden Eigenfunktionen liegt. Sie besitzt eine kritische Rayleigh-Zahl von $Ra_{\text{krit}} = 108 \cdot \pi^4 \simeq 10520$ bei $a = \sqrt{2} \cdot \pi \simeq 4.44$. Man erkennt daraus, dass die ungerade Lösung physikalisch irrelevant ist, weil in jedem Fall die gerade Eigenlösung vorher instabil wird. Die Indifferenzkurven niedrigster Ordnung bei gerader und ungerader Eigenlösung haben das in der Abb. 8.10 gezeigte Aussehen. Bei der kritischen Rayleigh-Zahl stellen sich längliche *Konvektionsrollen* bzw. hexagonale Zellen ein, deren Auftreten in der Meteorologie in Kap. 11 ▸ Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean behandelt werden.

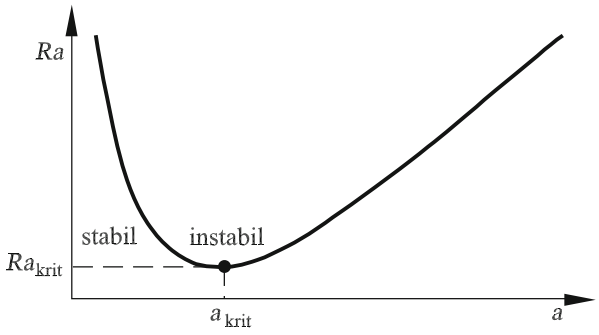


Abb. 8.10 Stabilitätsdiagramm der Rayleigh-Bénard-Zellularkonvektion

Die Randbedingungen der thermischen Zellularkonvektion bei zwei *festen isothermen Berandungen* sind:

$$\hat{T}(z=\pm\frac{1}{2})=0\ ,\quad \frac{\mathrm{d}^2\hat{T}}{\mathrm{d}z^2}(z=\pm\frac{1}{2})=0\ ,\quad \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}-a^2\right)\frac{\mathrm{d}\hat{T}}{\mathrm{d}z}(z=\pm\frac{1}{2})=0 \tag{8.37}$$

Das Eigenwertproblem ist durch die lineare gewöhnliche Differentialgleichung sechster Ordnung in z mit konstanten Koeffizienten Gl. (8.31) gegeben. Diese wird mittels eines $e^{\lambda\cdot z}$-Ansatzes auf die charakteristische Gleichung

$$\left(\lambda^2-a^2\right)^3+Ra\cdot a^2=0 \tag{8.38}$$

zurückgeführt. Die Konstanten $\mathrm{C_i}$ der allgemeinen Lösung $\hat{T}(z)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{6}\mathrm{C_i}\cdot e^{(\lambda_\mathrm{i}\cdot z)}$ müssen nichttrivial an die sechs homogenen Randbedingungen Gl. (8.37) angepasst werden. Nichttriviale Lösungen $\hat{T}(z)\neq 0$ können nur dann vorliegen, wenn die Determinante der entsprechenden 6×6-Matrix verschwindet. Diese Bedingung führt auf die gesuchte Beziehung zwischen der Rayleigh-Zahl Ra und der Wellenzahl a, die numerisch gelöst wird.

Die Indifferenzkurven $\omega_\mathrm{i}=0$ sind im Stabilitätsdiagramm der Abb. 8.10 eingetragen. Eine negative Anfachungsrate $\omega_\mathrm{i}<0$ führt zum zeitlichen Abklingen der Störungen. Der Wärmeleitungs-Grundzustand bleibt stabil. Positive Anfachungsraten $\omega_\mathrm{i}>0$ führen zur Instabilität. Die Indifferenzkurve besitzt eine minimale Rayleigh-Zahl Ra_krit, unterhalb derer Störungen jedweder Wellenlänge abklingen. Diese Grenze errechnet man als Minimum der Funktion $Ra(a)$ zu

$$Ra_\mathrm{krit}=1708\,,\qquad a_\mathrm{krit}=3.12\,. \tag{8.39}$$

Die Eigenlösungen sind längliche *Konvektionsrollen*, die bereits im einführenden Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik in Abb. 5 gezeigt wurden. Die Lösung für die ungeraden (asymmetrischen) Eigenfunktionen $\mathrm{f}_i^u(z)$ ist ebenfalls in Abb. 8.10 dargestellt. Die kritische Rayleigh-Zahl liegt hier jedoch etwa 10-fach höher als im Falle gerader (symmetrischer) Störfunktionen ($Ra_\mathrm{krit}\simeq 17610$ bei $a_\mathrm{krit}\simeq 5.37$). Die ungeraden Störfunktionen erreichen erst dann zeitliche Anfachung, wenn die geraden bereits instabil sind.

Für den Fall einer freien und einer festen isothermen Berandung ist bei $z=1/2$ die Bedingung Gl. (8.34), bei $z=-1/2$ hingegen Gl. (8.37) einzuhalten. Dieses Problem kann auf das Vorangegangene bei zwei festen Berandungen zurückgeführt werden. Da eine ungerade Funktion grundsätzlich mit allen ihren geraden Ableitungen bei $z=0$ verschwindet, erfüllt die ungerade Eigenlösung bei $z=0$ gerade die Bedingungen des freien isothermen Randes. Man kann sich also die obere Hälfte $0<z\leq 1/2$ des beidseitig fest berandeten Rayleigh-Bénard-Problems wegdenken. Die Rayleigh-Zahl und die dimensionslose Wellenzahl a müssen lediglich mit der auf die Hälfte verkleinerten Schichtdicke l neu gebildet werden. Man halbiert dazu die Temperaturdifferenz ΔT und substituiert in der Definition der Rayleigh-Zahl l

durch $l/2$ $Ra(\Delta T/2, l/2) = 2^{-4} \cdot Ra$. Da die Wellenzahl a durch Multiplikation mit l dimensionslos gemacht wurde, muss sie halbiert werden $a(l/2) = 1/2 \cdot a$. Damit ergibt sich:

$$Ra_{\text{krit}} = \frac{17610}{2^4} = 1101 \text{ bei} \qquad a_{\text{krit}} = \frac{5.37}{2} = 2.68\,. \tag{8.40}$$

Man beobachtet bei der kritischen Rayleigh-Zahl *hexagonale Konvektionszellen*, die an der freien Flüssigkeitsoberfläche durch die Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung verursacht werden. Beispiele zeigen die Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik, Abb. 5 und 1.

Einfluss von Behälterberandungen

In den bisher behandelten Stabilitätsproblemen war die Grundströmung in einer Raumrichtung (z) inhomogen. Nur in dieser einen Richtung wurden explizit Randbedingungen gefordert. In den homogenen Richtungen (ohne explizite Randbedingungen) konnten Wellenansätze (Separationsansätze) verwendet werden, was zu gewöhnlichen homogenen Differentialgleichungen führte. Wenn aber die Rayleigh-Bénard-Instabilität in Behältern mit endlichen Querabmessungen betrachtet wird, müssen explizite Randbedingungen an allen Wänden erfüllt sein, wodurch die separate Betrachtung vorgegebener Wellenstörungen nicht mehr zulässig ist. Die numerische Lösung des Eigenwertproblems Gl. (8.28) für $\omega_{\text{i}} = 0$ wird aufwendiger.

Ergebnisse der numerischen Lösung des Eigenwertproblems zeigen, dass vertikale Berandungen stabilisierend auf das Einsetzen der Zellularkonvektion wirken, da mit der Haftbedingung zusätzliche Reibung eingeführt wird. Dieses wird in Abb. 8.11 mit der Auftragung der kritischen Rayleigh-Zahl über dem Verhältnis aus Behälterlänge l_x zu Behälterhöhe l deutlich. Bei vorgegebenem Verhältnis $l_y/l = 4$ strebt für große l_x/l die kritische Rayleigh-Zahl gegen den Wert 1815. Man erkennt aus dem Diagramm 8.11 ferner, dass der asymptotische Wert die

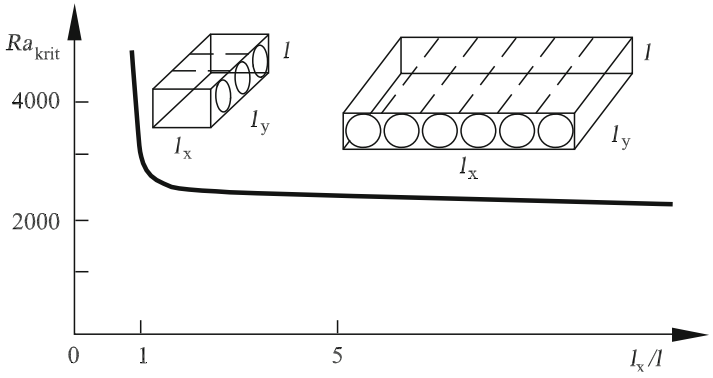


Abb. 8.11 Kritische Rayleigh-Zahlen von rechteckigen Behältern mit endlicher Ausdehnung, $l_y/l = 4$

kritische Rayleigh-Zahl bereits bei relativ niedrigen Werten des Verhältnisses l_x/l angenommen wird. Bei der Verringerung der Behälterlängen l_x/l auf sehr kleine Werte wächst die kritische Rayleigh-Zahl stark an. Die Reibungskraft infolge der Haftbedingung an den Seiten wirkt sich im ganzen Strömungsfeld aus und verhindert am Ende vollends die Ausbildung der Konvektionsrollen. Im Allgemeinen orientieren sich die Längsachsen der Konvektionsrollen parallel zu den kürzeren Seiten des Behälters. Das Strömungsfeld ist grundsätzlich dreidimensional. Der Randeinfluss wirkt sich bis zu einer Tiefe von etwa einer charakteristischen Länge l im Strömungsfeld aus. Im Innern des Strömungsfeldes kann so gerechnet werden, als sei keine Berandung vorhanden. Dieses führt u. a. zu dem überraschenden Ergebnis, dass sich auch im Innern eines kreisrunden Behälters zeitasymptotisch gerade Walzenstrukturen bilden und nicht, wie früher vermutet, konzentrische Ringzellen.

Sekundäre Instabilitäten

Bisher wurde das Einsetzen der thermischen Zellularkonvektion behandelt. Für überkritische Rayleigh-Zahlen stellen sich abhängig von den Anfangs- und Randbedingungen eine Vielzahl von Verzweigungslösungen ein. Entsprechend Abschn. 2 des Kap. 7 ▸ Instabilitäten und turbulente Strömungen treten stationäre dreidimensionale sowie zeitabhängige oszillatorische Zellstrukturen bis hin zur turbulenten Zellularkonvektion ein.

Die Theorie dieser sekundären Instabilitäten ist u. a. in *H. Oertel jr.* und *J. Delfs* 1996, 2005 beschrieben. Dabei geht man davon aus, dass bei der kritischen Rayleigh-Zahl der Grundzustand $\boldsymbol{U}_0$ von der instabilen stationären Zellularkonvektion abgelöst wird, die jetzt mit $\boldsymbol{U}_1$ bezeichnet und als neuer Grundzustand aufgefasst wird. In Analogie zur primären Stabilitätsanalyse wird der periodischen Grundströmung $\boldsymbol{U}_1$, eine kleine Störung $\varepsilon \cdot \boldsymbol{u}''$ überlagert. Dies führt zum Störansatz:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_1 + \varepsilon \cdot \boldsymbol{u}'' \tag{8.41}$$

und den Störungsdifferentialgleichungen für die sekundären Instabilitäten $\boldsymbol{u}''$.

Die insbesondere von *F. H. Busse* 1978a erzielten theoretischen und experimentellen Ergebnisse sind in den Abbildungen 8.12 und 8.13 zusammengefasst. Umfangreiche Parametervariationen haben ergeben, dass bei vorgegebener Rayleigh- und Prandtl-Zahl und derselben Grundwellenlänge λ der Bénard-Zellen mehrere verschiedene instabile sekundäre Eigenformen $\boldsymbol{u}''$ existieren können. Die Erscheinungsformen der sekundären Instabilitäten sind je nach Kombination $Pr, Ra, a = 2 \cdot \pi/\lambda$ unterschiedlich. Im Bereich sehr kleiner Prandtl-Zahlen werden die Konvektionsrollen z. B. gegenüber instationären, oszillatorischen Störungsformen *os* instabil. Dafür gibt es eine plausible Erklärung. Die lokale Beschleunigung $\partial \boldsymbol{u}/\partial t$ wird in den zugrunde liegenden Boussinesq-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (85)) durch die Prandtl-Zahl dividiert. Je kleiner die Prandtl-Zahl, desto stärker ist der Einfluss der instationären Glieder.

Die Zustände, bei denen diese oszillatorische Instabilität an den Konvektionsrollen einsetzt, sind u. a. im Diagramm Abb. 8.12 dargestellt, das für die unendlich ausgedehnte Fluidschicht mit festen horizontalen Berandungen gilt. Es zeigt das

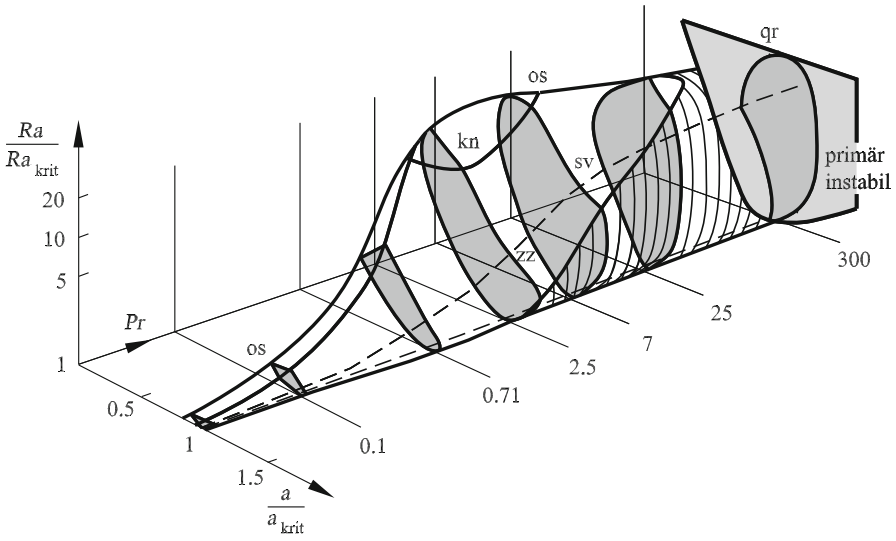


Abb. 8.12 Stabilitätsgebiet für Konvektionsrollen zwischen zwei festen horizontalen Berandungen. Sekundäre Eigenlösungen: *os*: oszillatorisch, *sv*: schief-varikos, *zz*: zick-zack, *qr*: Querrollen, *kn*: Knoten, Ra_{krit}: kritische Rayleigh-Zahl der primären Instabilität

dreidimensionale Gebiet im (a, Pr, Ra)-Raum, für das alle Sekundärstörungen zeitlich abklingen. Die durch die Parameter innerhalb des Stabilitätsgebietes gekennzeichneten Konvektionsrollen sind demnach gegenüber kleinen Störungen stabil. Die Gestalt dieses Gebiets ist anhand von fünf Schnitten bei jeweils konstanter Prandtl-Zahl verdeutlicht. Je nachdem, wo das Stabilitätsgebiet verlassen wird, werden die Konvektionsrollen gegenüber verschiedenen Störformen instabil. Das gesamte Instabilitätsgebiet berührt die Linie $Ra = Ra_{\text{krit}}$, $a = a_{\text{krit}}$, Pr, die den kritischen Zustand $Ra_{\text{krit}} = 1708$, $a_{\text{krit}} = 3.12$ der primären Instabilität darstellt. Die kritische Rayleigh-Zahl Ra_{krit} wird unabhängig von der Prandtl-Zahl Pr erreicht. Im Schnitt ist für $Pr = 300$ das Instabilitätsgebiet der primären Stabilitätsanalyse (Abb. 8.10) in das Diagramm Abb. 8.12 eingetragen um anzudeuten, dass das gezeigte Stabilitätsgebiet für sekundäre Störungen darin eingebettet ist. Das Stabilitätsdiagramm macht keine Aussage darüber, ob eine auftretende sekundäre Instabilität im Verlaufe einer Störungsentwicklung am Ende zu einem Strömungszustand führt, der der Eigenform dieser Instabilität entspricht. Es sagt lediglich aus, dass die Konvektionsrollen beim Überschreiten der das Stabilitätsgebiet begrenzenden kritischen Fläche instabil gegenüber infinitesimal kleinen Störungen werden. Die sekundäre Stabilitätsanalyse macht zudem eine Aussage darüber, welchen räumlich-zeitlichen Charakter die für die Rollen instabilen, d. h. zeitlich angefachten Störformen haben, solange sie noch eine infinitesimal kleine Amplitude besitzen.

Dabei unterscheidet man neben den oszillatorischen Instabilitäten *os* drei Typen von zeitabhängigen sekundären Instabilitäten (Abb. 8.13), die Zick-zack-Instabilität

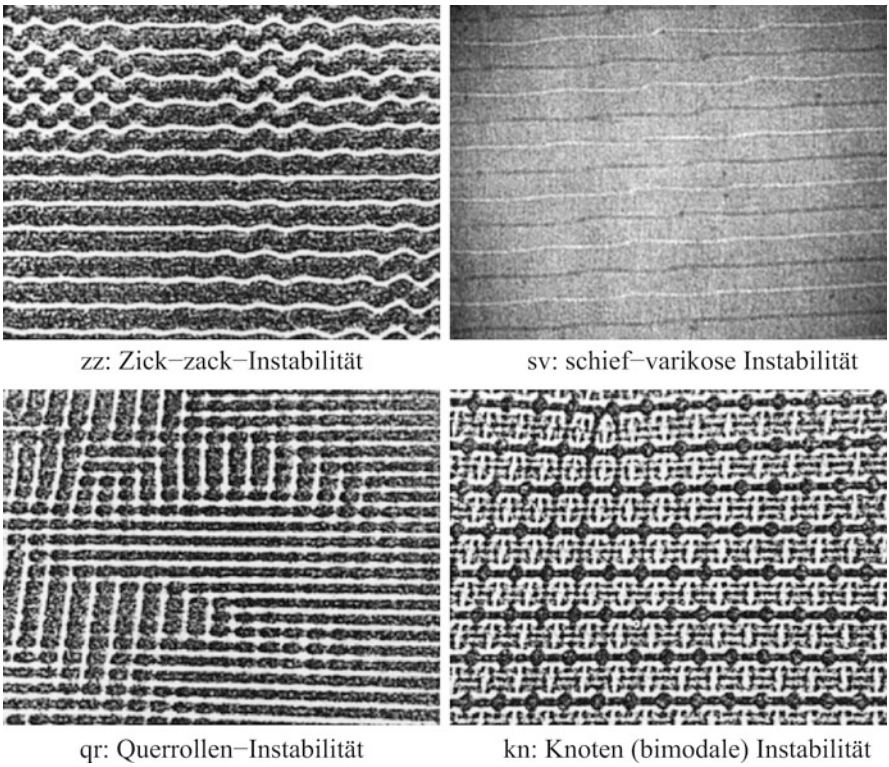


Abb. 8.13 Momentanaufnahmen der zeitabhängigen Zellularkonvektion, ursprünglicher Zustand: Konvektionsrollen vorgegebener Wellenlänge, Busse (1978a)

zz, die schief-varikose Instabilität *sv* und die Querrollen-Instabilität *qr*. Die Zick-zack-Instabilität tritt dann auf, wenn die vorgegebene Wellenlänge der Konvektionsrollen zu groß bei der jeweiligen Reynolds-Zahl ist und sich eine Verkleinerung der Wellenlänge durch die Zick-zack-Bildung ergibt. Die schief-varikose Instabilität bildet eine räumlich periodische Variation in beiden horizontalen Richtungen mit einer periodischen Versetzung der Rollen von einer Rolle zur anderen. Die Querrollen-Instabilität führt schließlich zu einer vollständigen Versetzung der Konvektionsrollen, die im rechten Winkel zueinander mit unterschiedlichen Wellenlängen orientiert sind.

Für Flüssigkeiten mit Prandtl-Zahlen größer als 7 ist die dreidimensionale Strömung bei Rayleigh-Zahlen größer als $2 \cdot 10^4$ stationär. Diese Instabilität bezeichnet man als Knoten (bimodale)-Instabilität (viertes Bild in Abb. 8.13). In Gasen mit der Prandtl-Zahl $0,71$ beginnen die Konvektionsrollen bei der Rayleigh-Zahl $1 \cdot 10^4$ zu oszillieren und es werden keine stationären Knoten-Instabilitäten beobachtet. Ein weiteres Anwachsen der Rayleigh-Zahl führt zu einem Anwachsen der Oszillationsamplitude. Die zeitabhängige Struktur der Konvektionzellen wird zunehmend irregulär bis sich schließlich der Übergang zur turbulenten Konvektionsströmung

vollzieht. Bei flüssigen Metallen mit Prandtl-Zahlen der Größenordnung 10^{-2} ist der Rayleigh-Zahlbereich stationärer Konvektionsströmung sehr begrenzt und die turbulente Strömung wird bereits bei einer Rayleigh-Zahl von 2500 erreicht.

2.2 Konvektion an der vertikalen Platte

Die Abb. 8.14 zeigt die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile der *laminaren Konvektionsströmung* der beheizten vertikalen Platte. Aus den Boussinesq-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (85)) lassen sich durch Größenordnungsabschätzung die zweidimensionalen Grenzschichtgleichungen ableiten. Mit der Grenzschichttransformation

$$
\begin{aligned}
x^* &= \frac{x}{l} \cdot Gr_z^{\frac{1}{4}}\,, \qquad z^* = \frac{z}{l}\,,\\
u^* &= \frac{u}{\sqrt{g \cdot \alpha \cdot l \cdot (T_\mathrm{m} - T_\infty)}} \cdot Gr_z^{\frac{1}{4}}\,, \quad w^* = \frac{w}{\sqrt{g \cdot \alpha \cdot l \cdot (T_\mathrm{m} - T_\infty)}}\,,\\
T^* &= \frac{T - T_\infty}{T_\mathrm{m} - T_\infty}
\end{aligned}
\tag{8.42}
$$

werden die *Grenzschichtgleichungen* unabhängig von der Rayleigh- bzw. Grashof-Zahl. Es ergibt sich das Gleichungssystem ohne Bezeichnung $*$ der dimensionslosen Größen:

$$
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,, \tag{8.43}
$$

$$
u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T\,, \tag{8.44}
$$

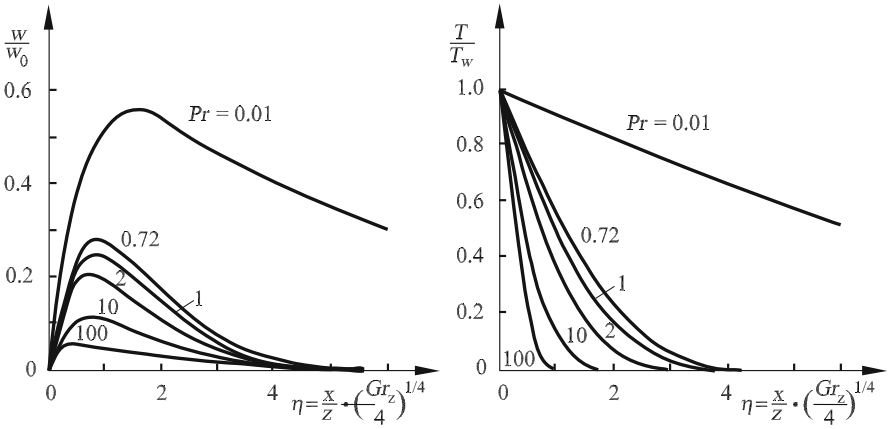


Abb. 8.14 Geschwindigkeits- und Temperaturprofile an einer vertikalen beheizten Platte bei konstanter Wandtemperatur T_w

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pr} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \,. \tag{8.45}$$

Der Energie- und Impulsausgleich ist über die Temperatur im Auftriebsterm gekoppelt. Die Temperaturverteilung der freien Konvektionsströmung erzeugt demzufolge die Geschwindigkeitsverteilung.

Die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile der beheizten vertikalen Platte sind ähnlich, so dass sie sich mit einer geeigneten Koordinatentransformation ineinander überführen lassen. Man erhält für das Gleichungssystem Gl. (8.43), (8.44) und (8.45) zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für die Geschwindigkeit w und die Temperatur T, die numerisch gelöst werden.

Die berechneten Geschwindigkeits- und Temperaturprofile für unterschiedliche Prandtl-Zahlen sind in Abb. 8.14 für eine isotherme Berandung bei konstanter Wandtemperatur T_w dargestellt. Die charakteristische Geschwindigkeit $w_0 = \sqrt{g \cdot \alpha \cdot l \cdot (T_\mathrm{m} - T_\infty)}$ entspricht der Transformationsgleichung (8.42). Für $Pr \leq 1$ ist die Reibungsgrenzschicht δ und die thermische Grenzschichtdicke δ_T etwa gleich groß. Für $Pr \gg 1$ beschränkt sich die thermische Grenzschicht auf eine wandnahe Schicht. Der Wärmeübergang an der Wand folgt aus:

$$q_\mathrm{w} = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_\mathrm{w} = -\lambda \cdot (T_\mathrm{w} - T_\infty) \cdot \frac{\mathrm{C}}{z^{\frac{1}{4}}} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\eta}\right)_\mathrm{w} \,, \tag{8.46}$$

mit der dimensionslosen Vertikalkoordinate

$$\eta = -\frac{x}{z} \cdot \left(\frac{Gr_z}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

und der Konstanten C. Darin ist

$$Gr_z = \frac{\alpha \cdot g \cdot (T_\mathrm{w} - T_\infty) \cdot z^3}{\nu^2} \tag{8.47}$$

die mit der z-Koordinate gebildete lokale Grashof-Zahl.

Die lokale Nußelt-Zahl

$$Nu_z = \frac{h \cdot z}{\lambda} = -\left(\frac{Gr_z}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\eta}\right)_\mathrm{w} \tag{8.48}$$

ist in Abb. 8.15 in Abhängigkeit der Prandtl-Zahl aufgetragen. Die numerische Lösung kann durch die Beziehung

$$\frac{Nu_z}{\left(\frac{Gr_z}{4}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{0,676 \cdot Pr^{\frac{1}{2}}}{(0,861 + Pr)^{\frac{1}{4}}} \tag{8.49}$$

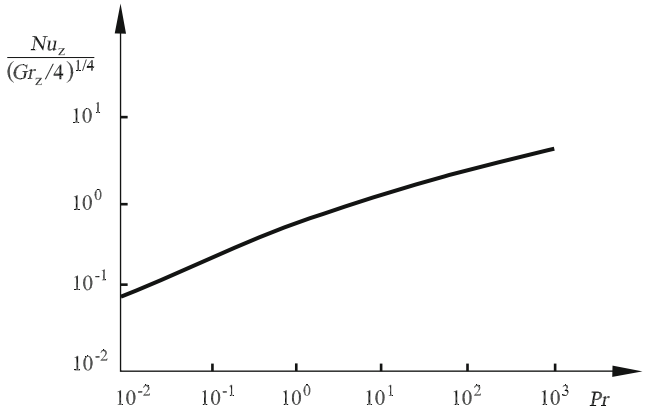


Abb. 8.15 Lokale Nußelt-Zahl an der vertikalen beheizten Platte bei konstanter Wandtemperatur T_w

approximiert werden. Neben der lokalen Nußelt-Zahl interessiert die mittlere Nußelt-Zahl:

$$\frac{Nu_l}{\left(\frac{Gr_l}{4}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{0,902 \cdot Pr^{\frac{1}{2}}}{(0,861 + Pr)^{\frac{1}{4}}} . \tag{8.50}$$

Die Lösungsfunktionen für die Geschwindigkeiten ergeben den Reibungsbeiwert:

$$c_f = 2 \cdot \left(\frac{Gr_z}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{dw}{d\eta}\right)_w . \tag{8.51}$$

Gibt man den *Wärmestrom* q_w statt der Wandtemperatur T_w vor, so erhält man die Grashof-Zahl Gl. (8.6). Das Gleichungssystem (8.43), (8.44) und (8.45) bleibt unverändert und ist mit der Randbedingung $(\partial T/\partial x) = q_w(z)/\lambda$ (Wärmeleitung an der Stelle $x = 0$) zu lösen. Für die Grenzschichtdicke δ ergibt sich $\delta \sim \nu^{2/5}$ im Vergleich zu $\delta \sim \sqrt{\nu}$ bei vorgegebener Wandtemperatur T_w.

Der *Gültigkeitsbereich* der bisher beschriebenen laminaren Grenzschichtströmung mit Wärmetransport beschränkt sich auf $10^4 < Ra_l = Gr_l \cdot Pr < 10^8$. Für Rayleigh-Zahlen kleiner 10^4 trifft die Grenzschichtapproximation nicht mehr zu und für Rayleigh-Zahlen größer 10^8 vollzieht sich der Übergang zur turbulenten freien Konvektionsströmung.

Mit der linearen Stabilitätstheorie Abschn. 2 des Kap. 7 ▸ Instabilitäten und turbulente Strömungen berechnet man mit den Grundprofilen des Gleichungssystems (8.43), (8.44) und (8.45) eine kritische Grashof-Zahl Gr_{krit} von $3 \cdot 10^6$ für Luft mit $Pr = 0,71$. Diese ist wesentlich kleiner als der im Experiment bestimmte Abschluss des Transitionsprozesses Gr_t von 10^9. Dies deutet darauf hin, dass im

Abb. 8.16
Differentialinterferogramm der vertikal beheizten Platte, $Gr_z = 8 \cdot 10^6$

Experiment die Störwellen kleiner Amplituden nicht erkannt werden und lediglich stromauf der Abschluss des Transitionsprozesses gemessen wird. Die Abb. 8.16 zeigt ein Differentialinterferogramm in Luft der laminaren Konvektionsströmung der vertikalen Platte bei konstanter Wandtemperatur T_w für die Grashof-Zahl $8 \cdot 10^6$, die im Experiment stabil ist. Die Interferenzstreifen zeigen näherungsweise Linien gleicher Temperaturgradienten.

Für den Bereich der *turbulenten freien Konvektionsströmung* sind die Reynolds-Gleichungen Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik in Gl. (40), (41) und (42) und Energiegleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (63)) mit Auftriebsterm und Boussinesq-Approximation (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (85)) in Grenzschichtnäherung numerisch zu lösen.

Das dimensionsbehaftete Gleichungssystem der zweidimensionalen turbulenten Grenzschicht ergibt:

$$\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{w} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2} \right) - \overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}} - \overline{\frac{\partial (u' \cdot w')}{\partial z}}, \tag{8.52}$$

$$\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} + \overline{w} \cdot \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial z^2} \right) - \overline{\frac{\partial (u' \cdot w')}{\partial x}} - \overline{\frac{\partial w'^2}{\partial z}} + \alpha \cdot z \cdot (\overline{T} - T_\infty) \tag{8.53}$$

$$\overline{u} \cdot \overline{\frac{\partial T}{\partial x}} + \overline{w} \cdot \overline{\frac{\partial T}{\partial z}} = k \cdot \left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial z^2} \right) - \overline{\frac{\partial (u' \cdot T')}{\partial x}} - \overline{\frac{\partial (w' \cdot T')}{\partial z}}, \tag{8.54}$$

mit den Schwankungsgrößen u', w', T' des Reynolds-Ansatzes.

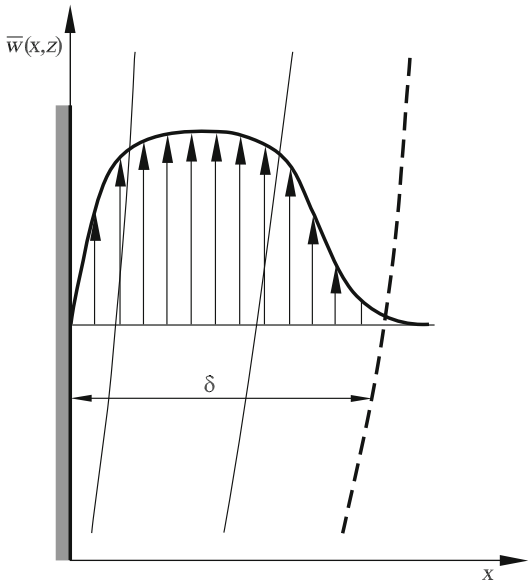


Abb. 8.17 Turbulentes Geschwindigkeitsprofil an der vertikalen beheizten Platte

Das turbulente Geschwindigkeitsprofil an der vertikalen beheizten Platte ist in Abb. 8.17 skizziert. Es lässt sich in drei Bereiche einteilen. In ausreichender Entfernung von der Wand findet man den Bereich ausgebildeter Turbulenz. In unmittelbarer Wandnähe ist der in Abschn. 5 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten eingeführte Bereich der viskosen Unterschicht. Dazwischen befindet sich ein Übergangsbereich, in dem sich die Geschwindigkeit nur wenig verändert.

Entsprechend dem Boussinesq-Ansatz berechnet sich die turbulente Wandschubspannung mit

$$\tau_{\mathrm{w}} = (\mu + \mu_t) \cdot \left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial x} \right)_{x=0} \tag{8.55}$$

und der Wärmestrom an der Wand:

$$q_{\mathrm{w}} = (\lambda + \lambda_t) \cdot \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \right)_{x=0} . \tag{8.56}$$

Das zeitlich gemittelte Temperaturprofil in Luft ist in Abb. 8.18 gezeigt. Für den gemittelten Wärmestrom ergibt sich die Korrelation

$$\overline{Nu}_z \sim (Pr \cdot Gr_z)^{\frac{1}{3}} \tag{8.57}$$

für große Werte von $Pr \cdot Gr_z$.

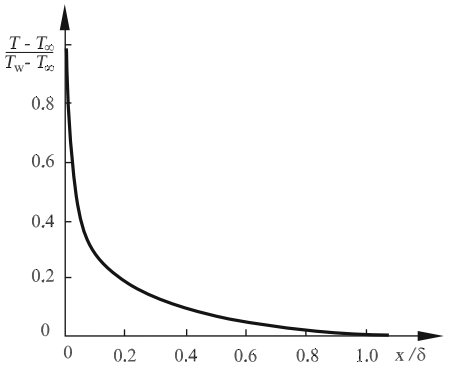


Abb. 8.18 Turbulentes Temperaturprofil an der vertikalen beheizten Platte in Luft $Pr = 0{,}71$ bei vorgegebener Wandtemperatur T_w

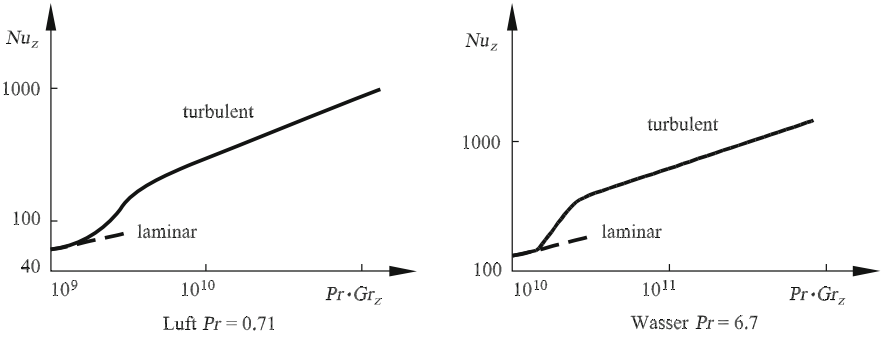


Abb. 8.19 Lokaler Wärmeübergang an der vertikalen beheizten Platte

Die auftriebsbedingte Turbulenzproduktion verursacht einen deutlich verbesserten Wärmeübergang. Dies gilt für Fluide großer Prandtl-Zahlen. Für Medien kleiner Prandtl-Zahlen wie z. B. in Luft ist die auftriebsbedingte Turbulenzproduktion näherungsweise zu vernachlässigen. Die Abhängigkeit des lokalen Wärmeübergangs für Luft und Wasser ist in Abb. 8.19 gezeigt.

In der Praxis haben sich zur Abschätzung des Wärmeübergangs der beheizten vertikalen Platte Interpolationsformeln eingebürgert. Für den gemittelten Wärmestrom ergibt sich im Bereich $0 < Pr \cdot Gr_z < 10^{12}$:

$$\sqrt{\overline{Nu}_z} = 0{,}825 + \frac{0{,}387 \cdot (Pr \cdot Gr_z)^{\frac{1}{6}}}{\left(1 + \left(\frac{0{,}492}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right)^{\frac{8}{27}}}. \tag{8.58}$$

2.3 Konvektion am waagerechten Zylinder

Die freie Konvektionsströmung um einen beheizten horizontalen Zylinder ist in Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik, Abb. 6 gezeigt. Das Gleichungs-

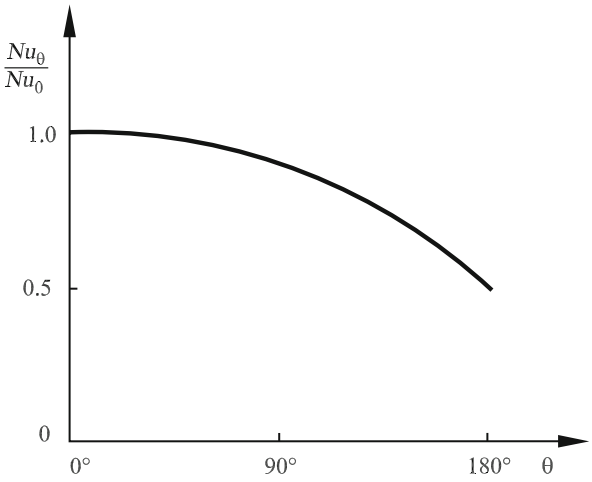


Abb. 8.20 Lokaler Wärmeübergang über dem Umfang eines horizontalen Kreiszylinders in Luft $Pr = 0{,}71$ bei vorgegebener Wandtemperatur T_w

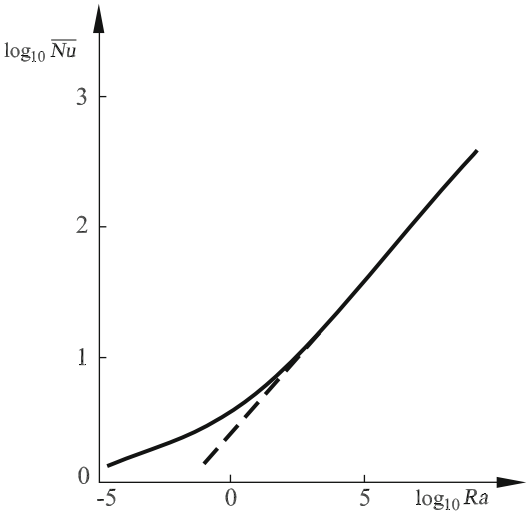


Abb. 8.21 Mittlere Nußelt-Zahl eines beheizten horizontalen Kreiszylinders in Luft $Pr = 0,71$ bei vorgegebener Wandtemperatur T_w

system (8.43), (8.44) und (8.45) führt wiederum zu ähnlichen Lösungen für die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung, so dass alle Schlussfolgerungen des vorangegangenen Kapitels übernommen werden können. Der laminar-turbulente Übergang vollzieht sich ebenfalls bei der kritischen Grashof-Zahl 10^8.

Die Abb. 8.20 zeigt die lokale Nußelt-Zahl Nu_θ über dem Umfang des horizontalen Kreiszylinders für Luft bei vorgegebener Wandtemperatur T_w. Nu_0 bezeichnet den Wärmeübergang im Staupunkt. Die Integration der Nußelt-Zahl Nu_θ über den Umfang liefert die mittlere Nußelt-Zahl $\overline{Nu} \cdot Gr^{(-1/4)} = 0,372$. In Abb. 8.21 ist die mittlere Nußelt-Zahl über der Rayleigh-Zahl $Ra = Pr \cdot Gr$ aufgetragen. Für große Grashof-Zahlen verhält sich $\overline{Nu} \sim Ra^{(1/4)}$, wobei die Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl für $Pr > 0,71$ gering ist.

3 Erzwungene Konvektion

3.1 Rohrströmung

Für die *ausgebildete Rohrströmung* (Abb. 8.4) stellt sich das in Abschn. 1 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten behandelte parabolische Geschwindigkeitsprofil ein:

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 , \tag{8.59}$$

mit dem Rohrradius R, der Maximalgeschwindigkeit $u_{\max} = \Delta p \cdot R^2/(4 \cdot \mu \cdot l) = 2 \cdot u_{\mathrm{m}}$ und dem konstanten Druckgradienten $\Delta p/l$. Das thermisch ausgebildete Temperaturprofil berechnet sich mit der Energiegleichung:

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = k \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r}\right) . \tag{8.60}$$

Die mittlere Geschwindigkeit u_{m} und die mittlere Temperatur T_{m} berechnen sich mit:

$$u_{\mathrm{m}} = \frac{1}{\pi \cdot R^2} \cdot \int_0^R 2 \cdot \pi \cdot r \cdot u \cdot \mathrm{d}r ,$$

$$T_{\mathrm{m}} = \frac{1}{u_{\mathrm{m}} \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \int_0^R 2 \cdot \pi \cdot r \cdot u \cdot T \cdot \mathrm{d}r .$$

Für die Berechnung des Temperaturprofils werden zwei Fälle bei konstantem Wärmeübergang q_{w} und konstanter Wandtemperatur T_{w} betrachtet.

Für den Fall *konstanter Wärmeübertragung* $q_{\mathrm{w}} = h \cdot (T_{\mathrm{w}} - T_{\mathrm{m}})$ ist bei der thermisch ausgebildeten Rohrströmung der Wärmeübergangskoeffizient h konstant:

$$h = \frac{q_{\mathrm{w}}}{T_{\mathrm{w}} - T_{\mathrm{m}}} = \frac{\lambda}{R} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\left(\frac{z}{R}\right)} \cdot \left(\frac{T_{\mathrm{w}} - T}{T_{\mathrm{w}} - T_{\mathrm{m}}}\right)\right)_{\mathrm{w}} . \tag{8.61}$$

$(T_{\mathrm{w}} - T_{\mathrm{m}})$ ist konstant. Daraus resultiert:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{w}}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}x} .$$

In die Energiegleichung (8.60) eingesetzt, ergibt sich:

$$\frac{u}{k} \cdot \frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r}\right) \text{ für } \qquad q_{\mathrm{w}} = \text{konst.} . \tag{8.62}$$

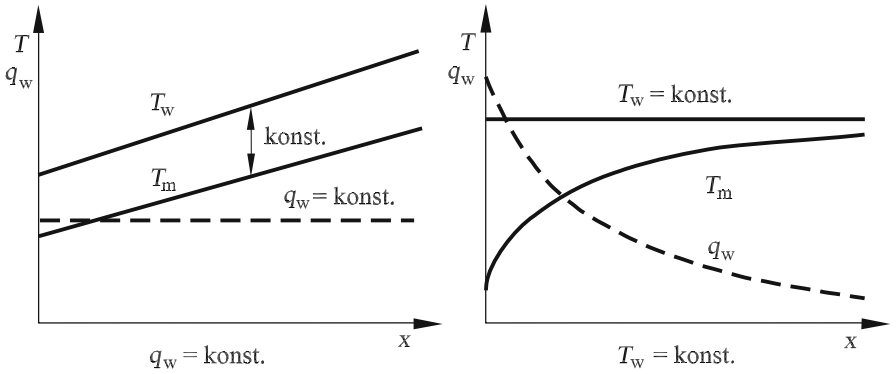


Abb. 8.22 Verlauf der mittleren T_m und Wandtemperatur T_w sowie des Wärmestroms q_w bei beheizter Rohrwand

Den Fall konstanter Wärmestromdichte findet man bei vielen technischen Anwendungen wie z. B. bei der elektrischen Heizung, nuklearer Heizung oder Wärmetauschern.

Für die thermisch ausgebildete Rohrströmung gilt bei *vorgegebener Wandtemperatur* T_w

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_w - T}{T_w - T_m} \cdot \frac{dT_m}{dx} .$$

Damit ergibt sich für die Energiegleichung (8.60)

$$\frac{u}{k} \cdot \left(\frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right) \cdot \frac{dT_m}{dx} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \text{ für } \quad T_w = \text{konst.} \qquad (8.63)$$

Die Lösungen von Gl. (8.62) und (8.63) sind in Abb. 8.22 dargestellt. Im Falle q_w = konst. ist die Temperaturdifferenz $(T_w - T_m)$ = konst. Im Fall T_w = konst. nimmt $(T_w - T_m(x))$ mit der Rohrlänge x ab, da $T_m(x)$ aufgrund der Energiezufuhr anwächst. Für q_w = konst. ergibt sich die Nußelt-Zahl $Nu = 4.36$ und bei T_w = konst. der Wert $Nu = 3.66$.

Berücksichtigt man die Einlaufströmung (Abb. 8.4) so erhält man die lokale Nußelt-Zahl entlang des Rohres mit dem Durchmesser $D = 2 \cdot R$. Die Abb. 8.23 zeigt den Verlauf von Nu_l für q_w = konst. und T_w = konst. mit den Grenzfällen der hydrodynamischen und thermisch ausgebildeten Rohrströmung für das Medium Luft mit $Pr = 0.71$. Man erkennt, dass die thermische Einlaufstrecke l mit

$$\frac{l_T}{D} \approx 0,05 \cdot Re_D \cdot Pr \qquad (8.64)$$

angenähert werden kann. Für das Verhältnis der Einlaufstrecken gilt $l_T/l \approx Pr$. Hochviskose Öle haben demzufolge große thermische Einlaufstrecken.

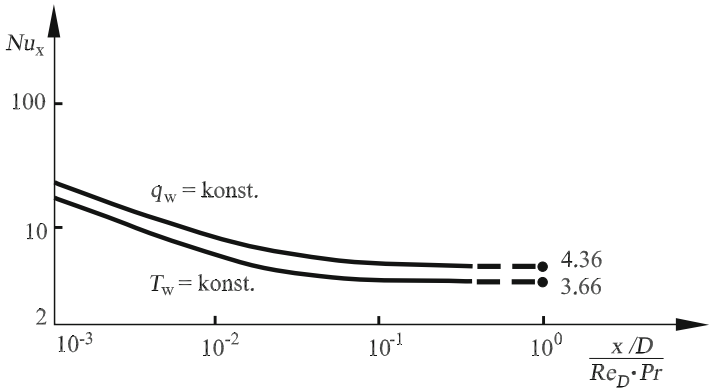


Abb. 8.23 Lokale Nußelt-Zahl in der Einlaufstrecke einer Rohrströmung

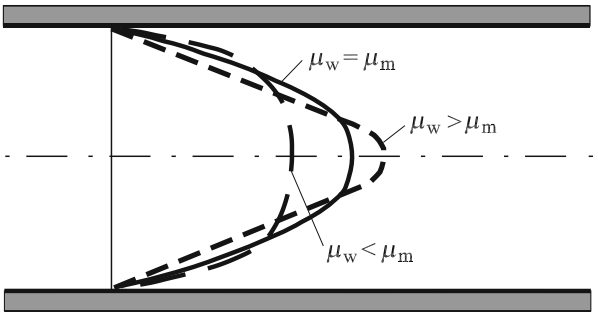


Abb. 8.24 Einfluss veränderlicher Viskosität auf das parabolische Geschwindigkeitsprofil

Der Wärmeübergangskoeffizient ist im Einlaufbereich größer als im ausgebildeten Bereich. Dies ist verständlich, da die Grenzschicht im Einlaufbereich anwächst und demzufolge der lokale Wärmeübergang abfällt.

Für die praktische Anwendung interessiert die mittlere Nußelt-Zahl:

$$\overline{Nu} = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l Nu_x \cdot \mathrm{d}x \,. \tag{8.65}$$

Der Vergleich mit Experimenten ergibt bei größeren Temperaturdifferenzen Abweichungen. Diese haben ihre Ursache in den bisher als konstant vorausgesetzten Stoffwerten. Bei großen Temperaturdifferenzen variieren die Viskosität und Wärmeleitfähigkeit über dem Rohrradius. Die Abb. 8.24 zeigt den Einfluss veränderlicher Viskosität auf das Geschwindigkeitsprofil. Für $\mu_w > \mu_m$ wird aufgrund der Zunahme der Viskosität in Wandnähe bei Kühlung einer Flüssigkeit bzw. Heizung eines Gases das Geschwindigkeitsprofil schlanker. Für $\mu_w < \mu_m$ ist die Reibung in Wandnähe für beheizte Flüssigkeiten bzw. gekühlte Gase geringer, so dass das Geschwindigkeitsprofil völliger wird.

Entsprechende Ergebnisse erhält man für nichtkreisförmige und variable Rohrquerschnitte. Dabei geht die Rotationssymmetrie verloren und es muss das vollständige Gleichungssystem der laminaren inkompressiblen Strömung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (85)) numerisch gelöst werden.

Die *turbulente Rohrströmung* ohne Wärmezufuhr wurde bereits im Abschn. 5 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten beschrieben. Mit Wärmetransport sind die Reynolds-Gleichungen Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (40), (41) und (42) und (63) numerisch zu lösen. Für die rotationssymmetrische Rohrströmung konstanten Querschnitts gelten die folgenden Vereinfachungen. Für die Schubspannung $\tau(r)$ der turbulenten Rohrströmung erhält man:

$$\tau(r) = \tau_\mathrm{w} \cdot \frac{r}{R} = -\mu \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} + \rho \cdot \overline{u' \cdot v'} = -(\mu + \rho \cdot \epsilon_\tau) \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial r}\,, \tag{8.66}$$

mit $\tau_\mathrm{w} = -(\mathrm{d}p/\mathrm{d}x) \cdot R/2$ und für den Wärmestrom ergibt sich:

$$q(r) = \frac{2 \cdot q_\mathrm{w}}{u_\mathrm{m} \cdot r \cdot R} \cdot \int_0^r \overline{u} \cdot r \cdot \mathrm{d}r = \lambda \cdot \frac{\overline{\partial T}}{\partial r} - \rho \cdot c_p \cdot \overline{T' \cdot v'}$$

$$= (\lambda + \rho \cdot c_p \cdot \epsilon_q) \cdot \frac{\partial \overline{T}}{\partial r}\,, \tag{8.67}$$

mit den turbulenten Austauschgrößen ϵ_τ und ϵ_q.

Mit der vereinfachten Annahme vorgegebenen Wärmestroms $q_\mathrm{w} = \text{konst.}$ an der Rohrwand und damit der Vernachlässigung der konvektiven Terme in der Energiegleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (63)) benötigt man keine Information über das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofil. Es verbleibt die Lösung der vereinfachten Energiegleichung:

$$-(\lambda + \rho \cdot c_p \cdot \epsilon_q) \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{T}}{\mathrm{d}r} = -\mu \cdot c_p \cdot \left(\frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_\tau}{\nu \cdot Pr_t}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{T}}{\mathrm{d}r}\,. \tag{8.68}$$

Mit den dimensionslosen Variablen

$$z^+ = \frac{r \cdot u_\tau}{\nu}\,, \qquad T^+ = \frac{(T_\mathrm{w} - \overline{T}) \cdot \rho \cdot c_p \cdot u_\tau}{q_\mathrm{w}}\,, \qquad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_\mathrm{w}}{\rho}} \tag{8.69}$$

und empirischen Ansätzen für Pr_t und ϵ_τ erhält man die Temperaturverteilungen der ausgebildeten Rohrströmung (Abb. 8.25) für vorgegebenen Wärmestrom $q_\mathrm{w} = \text{konst.}$. Im logarithmischen Bereich des zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofils ist der molekulare Austausch näherungsweise gegenüber dem turbulenten Austausch vernachlässigbar. Dieser Bereich rückt mit wachsender Prandtl-Zahl immer näher an die Rohrwand. Die viskose Unterschicht wird dünner. Damit erhöht sich der Widerstand gegenüber der Wärmeleitung und die Temperaturprofile werden völliger womit der Wärmeübergang demzufolge zunimmt. Die Abhängigkeit der

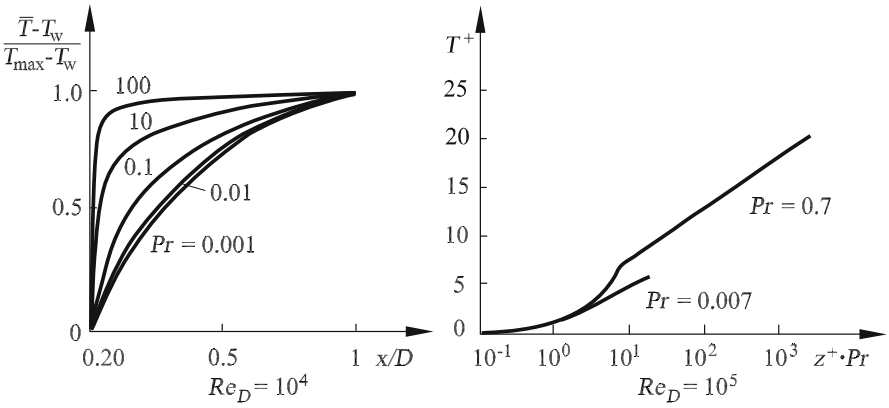


Abb. 8.25 Temperaturprofile der ausgebildeten turbulenten Rohrströmung für $q_w = \text{konst.}$

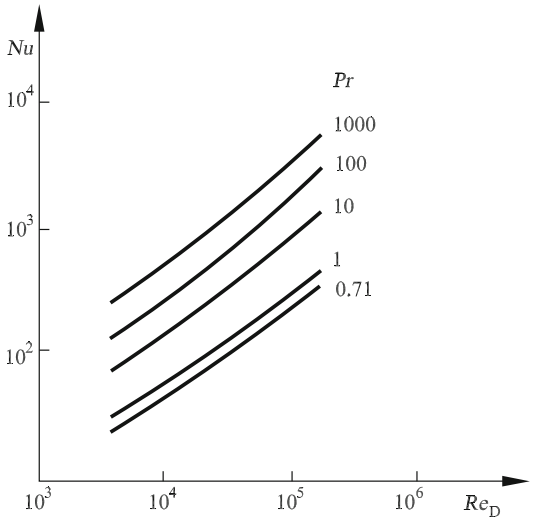


Abb. 8.26 Nußelt-Zahl der ausgebildeten turbulenten Rohrströmung für $q_w = \text{konst.}$

Nußelt-Zahl Nu von der Reynolds-Zahl Re_D und der Prandtl-Zahl Pr ist in Abb. 8.26 dargestellt.

In der Literatur gibt es eine Reihe von empirischen Beziehungen für die Nußelt-Zahl, die sowohl für konstanten Wärmestrom q_w als auch für konstante Wandtemperatur T_w verwendet werden. Ein Beispiel einer solchen Beziehung ist:

$$Nu = \frac{(Re_D - 1000) \cdot Pr \cdot \frac{\tau_w}{\rho \cdot u_m^2}}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho \cdot u_m^2}} \cdot (Pr^{\frac{2}{3}} - 1)} \cdot \left(1 + \left(\frac{D}{l}\right)^{\frac{2}{3}}\right), \tag{8.70}$$

mit $\tau_w = (\mathrm{d}p/\mathrm{d}x) \cdot R/2$.

3.2 Grenzschichtströmung

Bei *erzwungener Konvektionsströmung in der Grenzschicht* der längs angeströmten Platte ist in der Grenzschichtgleichung der freien Konvektionsströmung Gl. (8.44) der Druckgradient zu ergänzen. Die Druckarbeit wird in der Energiegleichung (8.45) nicht berücksichtigt. Ebenso wird im Folgenden wieder die Dissipation vernachlässigt, was für inkompressible Strömungen näherungsweise erfüllt ist. Das Verhältnis der Temperatur- und Strömungsgrenzschichtdicken ist wie bei der freien Konvektionsströmung

$$\frac{\delta_\tau}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}} . \tag{8.71}$$

Sind der konvektive Wärmetransport und die Wärmeleitung von gleicher Größenordnung, so folgt daraus:

$$\frac{\delta_\tau}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_x \cdot Pr}} . \tag{8.72}$$

Für unterschiedliche Prandtl-Zahlen ergeben sich die in Abb. 8.27 skizzierten Verhältnisse. Flüssige Metalle besitzen für $Pr \ll 1$ eine sehr gute Wärmeleitfähigkeit bei geringer Viskosität. Gase $Pr \approx 1$ besitzen vergleichsweise eine geringe Viskosität und Wärmeleitfähigkeit, während Öle mit $Pr \gg 1$ die Wärme schlecht leiten, aber eine höhere Viskosität besitzen.

Bei flüssigen Metallen ist die Strömungsgrenzschicht vernachlässigbar. Für die Berechnung der Temperaturgrenzschicht kann das Geschwindigkeitsprofil näherungsweise am Grenzschichtrand $U_\delta(x)$ ermittelt werden. Für Gasströmungen sind die Dicke der Temperatur- und Strömungsgrenzschicht von gleicher Größenordnung und es müssen die vollständigen Grenzschichtgleichungen gelöst werden. Diese

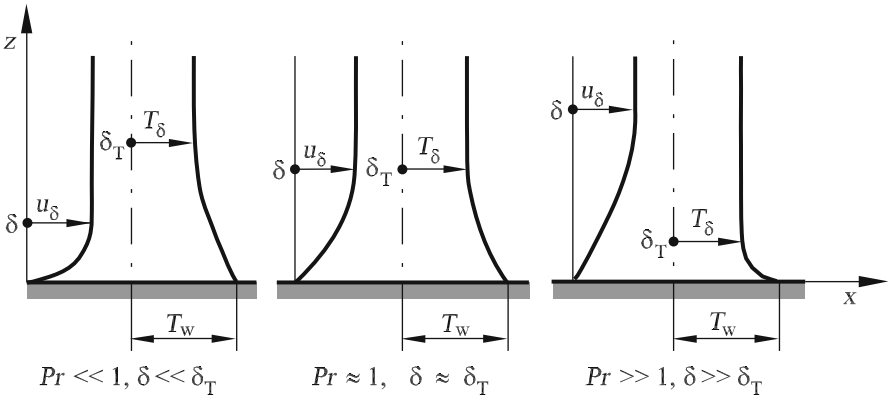


Abb. 8.27 Verhältnis der Grenzschichtdicken δ_T, δ für unterschiedliche Prandtl-Zahlen

schreiben sich entsprechend Gl. (8.43), (8.44) und (8.45) für die inkompressible erzwungene Konvektionsströmung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,, \tag{8.73}$$

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{Re_l} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,, \tag{8.74}$$

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pr \cdot Re_l} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,. \tag{8.75}$$

Für die Gültigkeit der Grenzschichtgleichungen muss zusätzlich zu $Re_l \gg 1$ und $Re_l \cdot Pr \gg 1$ gefordert werden. Die Kontinuitäts- und Impulsgleichungen (8.73) und (8.74) sind jetzt von der Energiegleichung (8.75) entkoppelt. Damit kann die Strömungsgrenzschicht unabhängig von der Temperaturgrenzschicht berechnet werden.

Für $Pr = 1$ lassen sich die Grenzschichtgleichungen (8.73), (8.74) und (8.75) exakt lösen. Mit der Blasius-Strömung ist zugleich die Lösung der Energiegleichung gegeben. Die Abb. 8.28 zeigt die berechneten Geschwindigkeits- und Temperaturprofile bei vorgegebener Wandtemperatur T_w. Da das Temperatur- und das Geschwindigkeitsprofil identisch ist, besteht eine direkte Proportionalität zwischen dem Wärmeübergang und der Wandschubspannung. Diese bezeichnet man als *Reynolds-Analogie* zwischen dem Impuls- und Wärmeaustausch, mit der Stanton-Zahl

$$St = \frac{c_\mathrm{f}}{2}\,, \tag{8.76}$$

$$St = \frac{q_\mathrm{w}}{\rho \cdot c_p \cdot (T_\mathrm{w} - T_\infty) \cdot u_\infty}$$

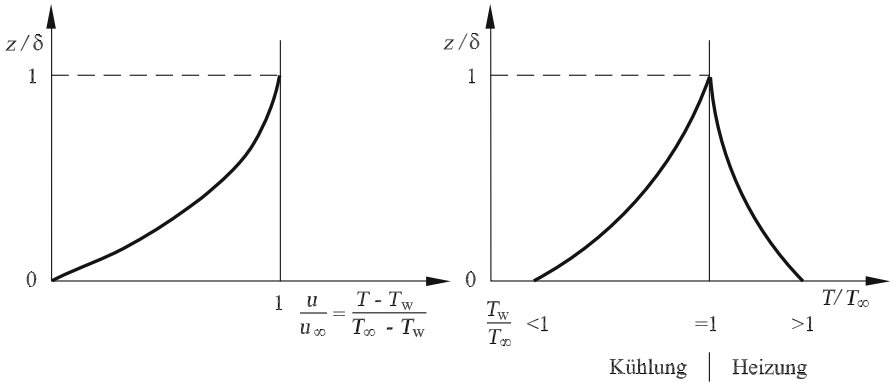


Abb. 8.28 Geschwindigkeits- und Temperaturprofile der ebenen Plattenströmung für $Pr = 1$ und vorgegebener Wandtemperatur $T_\mathrm{w} = \mathrm{konst}$

und dem Reibungsbeiwert $c_f = 2 \cdot \tau_w/(\rho \cdot u_\infty^2)$. Für den Wärmeübergang folgt die exakte Lösung:

$$St \cdot \sqrt{Re_x} = \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0,332 \tag{8.77}$$

und für die mittlere Nußelt-Zahl:

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{h} \cdot l}{R} = 0,664 \cdot \sqrt{Re_l}\,. \tag{8.78}$$

Die numerischen Lösungen des Gleichungssystems Gl. (8.73), (8.74) und (8.75) zeigen, dass sich entgegen der bisherigen Abschätzung das Verhältnis der Grenzschichtdicken für $Pr > 1$ proportional $Pr^{(-1/3)}$ verhält:

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{0,975}{Pr^{\frac{1}{3}}}\,. \tag{8.79}$$

Damit folgt für die lokale Nußelt-Zahl:

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0,332 \cdot Pr^{\frac{1}{3}}\,. \tag{8.80}$$

Für flüssige Metalle mit $Pr \ll 1$ erhält man wiederum die Abhängigkeit $\sqrt{Pr}$:

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{0,58}{\sqrt{Pr}}\,. \tag{8.81}$$

und die lokale Nußelt-Zahl:

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0,5 \cdot \sqrt{Pr}\,. \tag{8.82}$$

Die Abb. 8.29 fasst die Ergebnisse des lokalen Wärmeübergangs in Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl zusammen.

Dissipation

Bei *hohen Strömungsgeschwindigkeiten* kann die Dissipation

$$\Phi = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \tag{8.83}$$

der zweidimensionalen Grenzschichtströmung nicht vernachlässigt werden. Für den Fall einer adiabaten Wand mit $q_w = 0$ ist das Temperaturprofil der Abb. 8.30 zu erwarten. Die Dissipation ist in Wandnähe am größten. Demzufolge wird

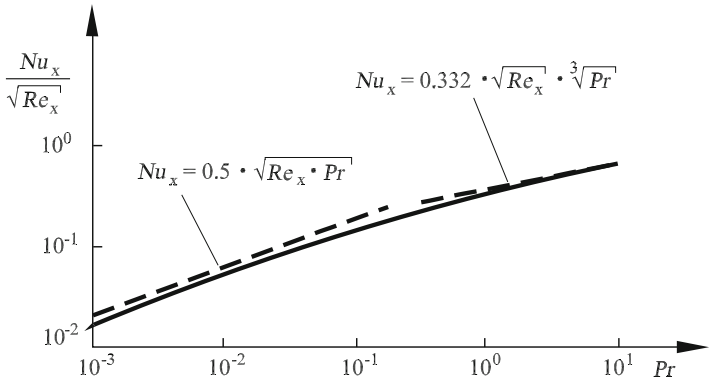


Abb. 8.29 Lokale Nußelt-Zahl in Abhängigkeit der Prandtl-Zahl für die ebene Platte mit konstanter Wandtemperatur T_w

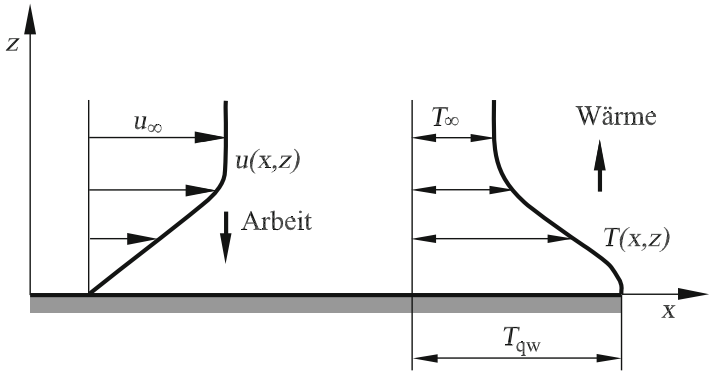


Abb. 8.30 Temperaturprofil infolge der Dissipation an einer adiabaten Wand

die Temperatur T_{q_w} an der Wand ein Maximum aufweisen, das man *Recovery-Temperatur* nennt. In Abb. 8.31 sind die Temperaturprofile für unterschiedliche Prandtl-Zahlen für die adiabate Wand gezeigt. Durch die Dissipation werden die Temperaturprofile völliger. Der Verlauf der adiabaten Wandtemperatur (Recovery-Faktor) zeigt, dass für $Pr > 1$ eine Temperatur T_{q_w} erreicht wird, die größer als die adiabate Stautemperatur ist. Der Verlauf kann durch

$$\begin{aligned} \frac{c_p \cdot (T_{q_w} - T_\infty)}{\frac{1}{2} \cdot u_\infty^2} &\approx \sqrt{Pr} \text{ für} \qquad 0,6 < Pr < 1,5\,, \\ &\approx 1,9 \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \text{ für} \qquad Pr \gg 1 \end{aligned} \tag{8.84}$$

approximiert werden.

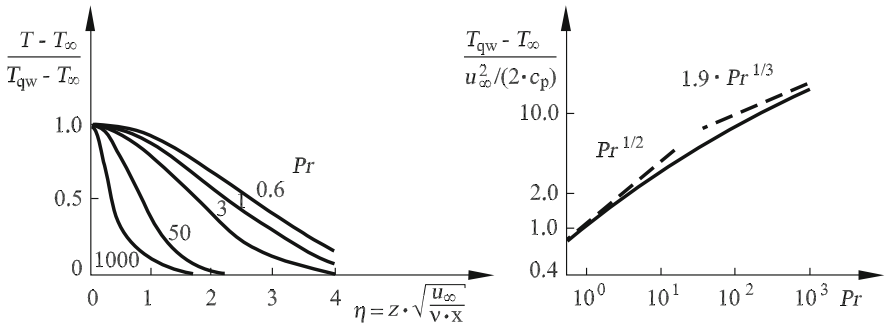


Abb. 8.31 Temperaturprofile und adiabate Wandtemperatur an der ebenen Platte bei konstanten Fluideigenschaften

Für den Fall konstanter Wandtemperatur T_w wird bei der Definition des Wärmeübergangskoeffizienten h die Temperatur T_∞ durch T_{q_w} ersetzt. Damit gilt auch mit Dissipation die Beziehung Gl. (8.80):

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0,332 \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \text{ für} \qquad 0,6 < Pr < 10\,.$$

Kompressibilität

Da in Gasen die Stautemperatur quadratisch mit der Mach-Zahl wächst, müssen sehr bald Kompressibilitätseffekte berücksichtigt werden. Neben der Mach-Zahl tritt zusätzlich die Eckert-Zahl

$$Ec = \frac{u_\infty^2}{c_p \cdot (T_m - T_w)} \tag{8.85}$$

als Maß für die Kompressibilität auf $Ec \sim M^2$. Auch bei der kompressiblen Strömung gilt die Reynolds-Analogie Gl. (8.76) in der Form:

$$St = \frac{c_f}{2 \cdot Pr}. \tag{8.86}$$

Für kompressible Grenzschichtströmungen gilt die Koppelung zwischen Temperatur und Geschwindigkeit

$$\frac{T}{T_\infty} = \frac{T_w}{T_\infty} + \frac{T_\infty - T_w}{T_\infty} \cdot \frac{u}{u_\infty} + Pr \cdot \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M_\infty^2 \cdot \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right), \tag{8.87}$$

die von Crocco (1932) und Busemann (1931) angegeben wurde. Der Einfluss der Kompressibilität ist im dritten Summanden und der Einfluss des Wärmeübergangs im zweiten Summanden der Beziehung Gl. (8.87) zu erkennen.

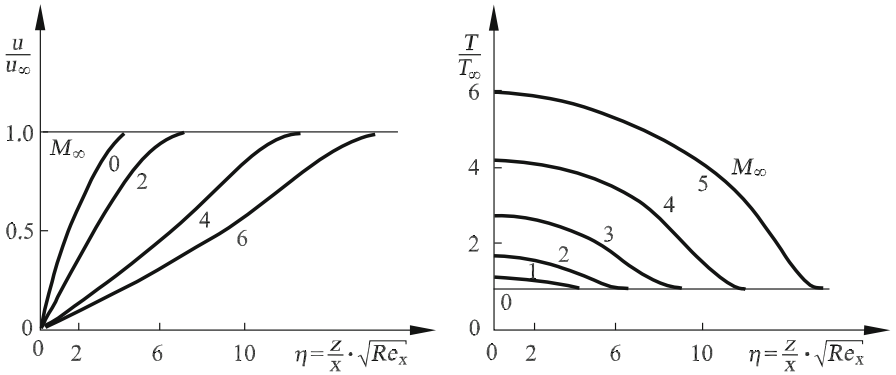


Abb. 8.32 Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung der adiabaten ebenen Platte für $Pr = 1$

Die Abb. 8.32 zeigt die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile der adiabaten ebenen Platte für $Pr = 1$. Die Grenzschichtdicke wächst mit zunehmender Mach-Zahl und die Geschwindigkeitsprofile nehmen für große Mach-Zahlen nahezu einen linearen Verlauf an. Bei starker Wandkühlung wird die Aufdickung und damit die Verdrängungswirkung der Grenzschicht verringert und die Geschwindigkeitsprofile werden völliger. Eine Heizung der Wand verstärkt die Verdrängungswirkung der kompressiblen Plattengrenzschicht.

Turbulente Grenzschichtströmung

Die Erkenntnisse der turbulenten Rohrströmung können auf die ebene Plattengrenzschichtströmung übertragen werden. Ausgangspunkt sind die Grenzschichtgleichungen (8.73), (8.74) und (8.75). Der Reynolds-Ansatz liefert die zeitlich gemittelten Grenzschichtgleichungen bei Vernachlässigung der Druckarbeit und der Dissipation:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0\,, \tag{8.88}$$

$$\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{w} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{p}}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2} - \frac{\partial(\overline{u' \cdot w'})}{\partial z}\,, \tag{8.89}$$

$$\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} + \overline{w} \cdot \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = k \cdot \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial z^2} - \frac{\partial(\overline{w' \cdot T'})}{\partial z}\,, \tag{8.90}$$

mit dem Reynoldsschen Wärmestrom

$$q_t = \rho \cdot c_p \cdot \overline{w' \cdot T'}\,.$$

Für $Pr = 1$ gilt auch bei der Plattengrenzschichtströmung die *Reynolds-Analogie*:

$$St = \frac{Nu_x}{Re_x \cdot Pr} = \frac{c_\mathrm{f}}{2}\,. \tag{8.91}$$

Bei der *Prandtl-Analogie* wird das Strömungsfeld in die viskose Unterschicht und den vollturbulenten Bereich eingeteilt. Damit ergibt sich:

$$St = \frac{\frac{c_f}{2}}{1 + 5 \cdot \sqrt{\frac{c_f}{2}} \cdot (Pr - 1)} . \tag{8.92}$$

Für $Pr = 1$ ist die Prandtl-Analogie mit der Reynolds-Analogie Gl. (8.91) identisch.

T. von Kármán folgte den Überlegungen von Prandtl und unterteilt die Grenzschicht in drei Bereiche. Zwischen der viskosen Unterschicht und dem vollturbulenten Bereich berücksichtigt er eine Übergangsschicht ($5 < z^+ < 30$) in der die molekularen und turbulenten Austauschgrößen von gleicher Größenordnung sind. Damit ergibt sich die *von Kármán-Analogie*:

$$St = \frac{\frac{c_f}{2}}{1 + 5 \cdot \sqrt{\frac{c_f}{2}} \cdot (Pr - 1 + \ln(\frac{5 \cdot Pr + 1}{6}))} , \tag{8.93}$$

die wiederum für $Pr = 1$ in die Reynolds-Analogie übergeht.

Der lokale Reibungsbeiwert der ebenen Platte ist dabei:

$$c_f = \text{konst.} \cdot Re_x^{-\frac{1}{5}} . \tag{8.94}$$

Die lokalen Nußelt-Zahlen für die turbulente Grenzschicht der ebenen Platte sind in Abb. 8.33 dargestellt. Für sämtliche Analogien gilt die Voraussetzung, dass die turbulente Prandtl-Zahl $Pr_t = 1$ gesetzt wird. Deshalb sind sie für flüssige Metalle bei $Pr \ll 1$ nicht mehr anwendbar.

Bei der ausgebildeten turbulenten Rohrströmung wurde angenommen, dass in der Kernströmung das Verhältnis von Wärmestromdichte und Schubspannung näherungsweise über dem Rohrquerschnitt konstant ist. Auch bei der Plattenströmung ist dies angenähert erfüllt. Mit den dimensionslosen Größen $u^+ = \overline{u}/u_\tau$ und $T^+ = (T_w - \overline{T}) \cdot \rho \cdot c_p \cdot u_\tau / q_w$ sowie $z^+ = z \cdot u_\tau / \nu$ ergeben sich die Temperaturprofile der Abb. 8.34.

3.3 Umströmte Körper

Der einfachste Fall eines umströmten Körpers mit Wärmeübergang ist der quer angeströmte Kreiszylinder. In einem großen Bereich der Reynolds-Zahlen erfolgt der Wärmeübergang überwiegend in der Grenzschicht, so dass die Gesetzmäßigkeiten des vorangegangenen Kapitels auf die Zylindergrenzschicht übertragen werden können.

Nach Experimenten von *R. Hilpert* 1933 lässt sich die Abhängigkeit der mittleren Nußelt-Zahl in Luft und bei konstanter Zylindertemperatur T_w in verschiedene Reynolds-Zahl Bereiche einteilen:

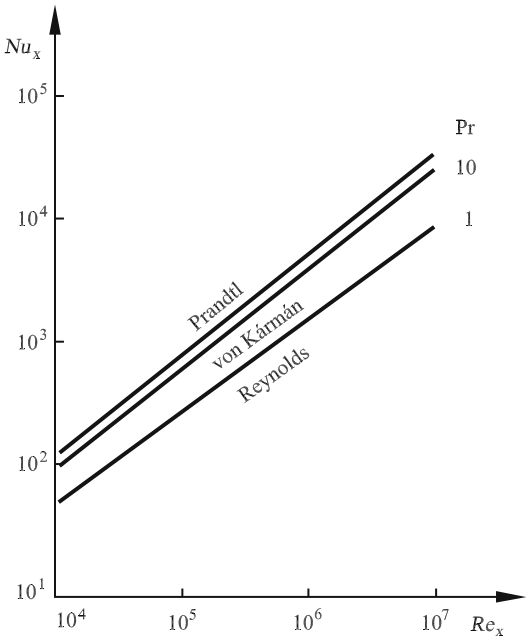


Abb. 8.33 Lokale Nußelt-Zahl der turbulenten, ebenen Plattengrenzschichtströmung

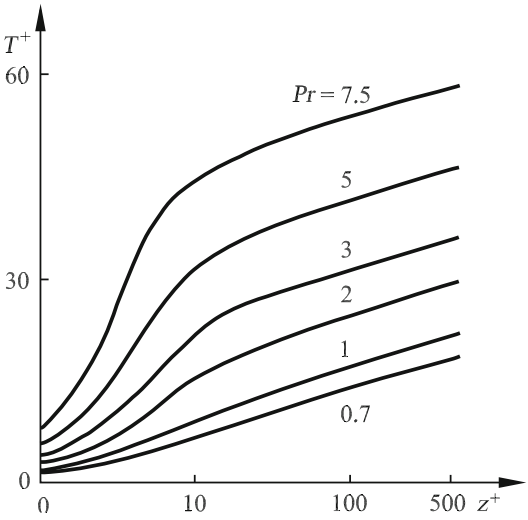


Abb. 8.34 Temperaturprofile der turbulenten, ebenen Plattengrenzschichtströmung

$$
\begin{aligned}
40 < Re_D < 4000\,, \qquad & \overline{Nu} = 0,615 \cdot Re_D^{0,466}\,, \\
4000 < Re_D < 4 \cdot 10^4\,, \qquad & \overline{Nu} = 0,174 \cdot Re_D^{0,618}\,, \\
4 \cdot 10^4 < Re_D < 2,5 \cdot 10^5\,, \qquad & \overline{Nu} = 0,0239 \cdot Re_D^{0,805}\,.
\end{aligned}
\tag{8.95}
$$

Der Exponent steigt von $0,46$ bis $0,8$ bei Reynolds-Zahlen größer $4 \cdot 10^4$. Dies deutet darauf hin, dass mit wachsender Reynolds-Zahl die Kármánsche Wirbelstraße der Nachlaufströmung zunehmend zum Wärmeübergang beiträgt. Die Beziehungen Gl. (8.95) gelten für turbulenzarme Anströmung. Erhöht sich der Turbulenzgrad der Anströmung auf 2.5 %, so erhöht sich die mittlere Nußelt-Zahl um bis zu 80 %. Dies erklärt, dass die in Windkanälen gemessenen Nußelt-Zahlen meist höher liegen als in Gl. (8.95) angegeben.

4 Wärme- und Stoffaustausch

Wärme- und Stoffaustauschvorgänge entstehen in Grenzschichten, wenn z. B. Kühlgas der Grenzschichtströmung zugegeben wird. Das Ausblasen von leichtem Gas an der Wand reduziert den Wärmeübergang. Verdunstete Flüssigkeitsschichten an der Wand dienen der Kühlung. Zum Impuls- und Wärmeaustausch tritt zusätzlich der Stoffaustausch durch Diffusion hinzu. Neben den Geschwindigkeits- und Temperaturgrenzschichten bilden sich Konzentrationsgrenzschichten aus.

4.1 Diffusions-Konvektion

In Analogie zur Rayleigh-Bénard-Konvektion kann selbst bei konstanter Temperatur in einem Stoffgemisch ein Konzentrationsgradient für eine instabile Dichteschichtung verantwortlich sein. In einer Salzlösung nimmt z. B. die Dichte mit der Konzentration zu. Verdunstet Wasser an der freien Oberfläche einer Salzlösung (Abb. 8.35), so verbleibt eine hohe Salzkonzentration und es entsteht eine instabile

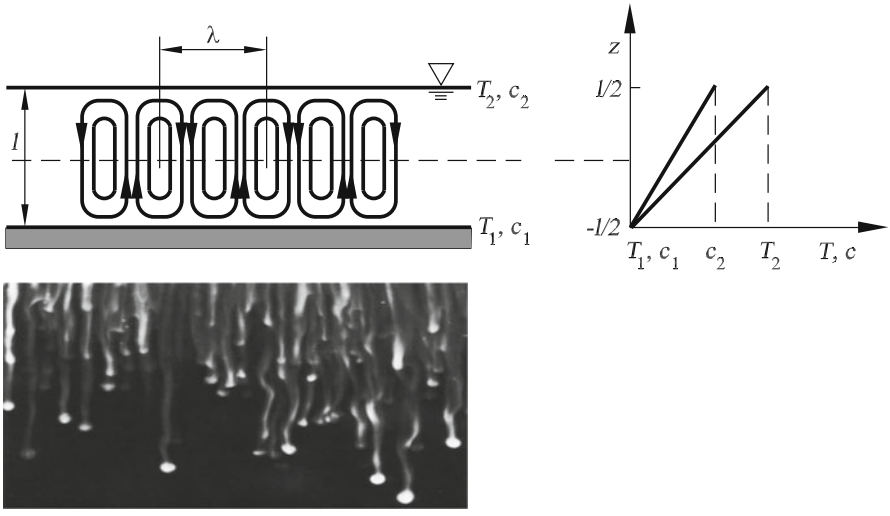


Abb. 8.35 Doppel-Diffusions-Instabilität, Turner (1985)

Dichteschichtung. Es wird sich zeigen, dass die Behandlung einer durch Konzentrationsunterschiede getriebenen Konvektionsströmung eines Zweistoffgemisches der Analyse der Rayleigh-Bénard-Konvektion identisch wird. Dazu muss lediglich die charakteristische Temperaturdifferenz ΔT durch die Konzentrationsdifferenz Δc, der Wärmeausdehnungskoeffizient $\alpha = \rho^{-1} \cdot \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}T$ durch den Konzentrationsausdehnungskoeffizienten $\beta = \rho^{-1} \cdot \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}c$ und die Wärmeleitzahl k durch den Diffusionskoeffizienten D ersetzt werden. Entsprechend ersetzt die Diffusions-Rayleigh-Zahl $Ra_D = \beta_\mathrm{m} \cdot \Delta \cdot c_\mathrm{m} \cdot g \cdot l^3/(\nu \cdot D)$ die Rayleigh-Zahl Ra und die Schmidt-Zahl $Sc = \nu/D$ die Prandtl-Zahl Pr, mit g der Erdbeschleunigung, l der Flüssigkeitsschichtdicke und ν der kinematischen Zähigkeit. Alle Ergebnisse der thermischen Zellularkonvektion sind damit übertragbar auf die Diffusionskonvektion.

Im Folgenden wird deshalb die *Doppeldiffusions-Instabilität* behandelt. Die einfache Diffusions-Instabilität ist dann ein Spezialfall davon. Doppeldiffusionsphänomene sind Vorgänge, bei denen zwei Diffusionseinflüsse gleichzeitig auftreten, zum einen die Massendiffusion und zum anderen die Wärmediffusion (Wärmeleitung). Es wird die Stabilität eines Doppeldiffusionssystems, das durch Überlagerung der Massendiffusion (z. B. Salz-Wasserlösung im Ozean) mit der Wärmeleitung zustandekommt, behandelt. Je nach Fall können diese zwei unterschiedlichen Diffusionsvorgänge in ihrem Zusammenwirken sowohl eine Instabilität begünstigen als auch die Fluidschicht stabilisieren.

Die Oberseite der Flüssigkeitsschicht wird nach Abb. 8.35 auf einer höheren Temperatur T_2 als der Boden T_1 gehalten. Die Salzkonzentration c_2 an der Oberfläche sei ebenfalls größer als am Boden c_1. Mit c ist die Massenkonzentration $c = \rho_s/\rho$ mit der Partialdichte des Salzes ρ_s und der Gesamtdichte der Lösung ρ gemeint. Mit dieser Anordnung kann sowohl eine instabile, als auch stabile Dichteschichtung vorliegen.

Überschreitet die instabile Konzentrationsdifferenz $\Delta c = c_2 - c_1$ einen kritischen Wert, wird auch bei stabiler Temperaturschichtung die horizontale Flüssigkeitsschicht instabil. Es bilden sich Salzfinger, die schmale hohe Konvektionszellen formen.

Analog zum Rayleigh-Bénard-Problem betrachtet man ein Flüssigkeitselement der charakteristischen Ausdehnung l, das infolge einer kleinen Störung mit kleiner Vertikalgeschwindigkeit w aufsteigt (Abb. 8.36). Es hat in der neuen Schicht eine gegenüber der Umgebung kleinere Temperatur und einen kleineren Salzgehalt. Es steigt mit der Geschwindigkeit w auf und wandert dabei entlang des in der umgebenden Fluidschicht befindlichen Temperaturgradienten $\Delta T/l$. Die dazugehörige Änderung an innerer Energie im Volumen l^3 des Teilchens ist $\dot{E}_k = \rho_\mathrm{m} \cdot c_v \cdot w \cdot (\Delta T/l) \cdot l^3$. Diese Änderung wird durch den Energiefluss über die Teilchenoberfläche $\sim l^2$ infolge Wärmeleitung $\dot{q} \sim \lambda \cdot \Delta T_w/l$ erreicht. Der wirksame Temperaturgradient ΔT_w wurde eingeführt um anzudeuten, dass während des Vorgangs i.d.R. nicht der gesamte aus der Schichtung bereitgestellte Temperaturgradient ΔT wirksam ist. Ist die Steiggeschwindigkeit w des Teilchen groß, hat das Teilchen nicht genügend Zeit, sich der jeweils angetroffenen Umgebungstemperatur anzupassen. Die Bilanz $\dot{E}_k = \dot{q} \cdot l^2$ liefert eine Abschätzung für den wirksamen

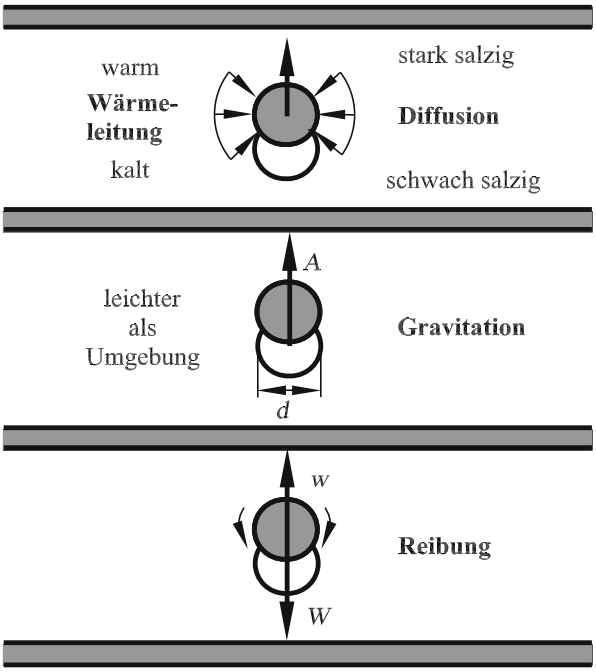


Abb. 8.36 Zum physikalischen Verständnis der Doppel-Diffusions-Instabilität

Temperaturgradienten $\Delta T_w = w \cdot l \cdot \Delta T / k$, mit der Wärmeleitzahl $k = \lambda/(\rho_\mathrm{m} \cdot c_v)$. Würde die Teilchengeschwindigkeit so vorgegeben, dass der Temperaturausgleich gerade erreicht wird, würden sich ΔT und ΔT_w nicht unterscheiden. Die dazugehörige thermische Diffusionsgeschwindigkeit w_T wäre damit $w_T = k/d$.

Während das Teilchen dem Konzentrationsgradienten der Schichtung $\Delta c/l$ ausgesetzt ist, reichert es sich mit Salz an. Die Konzentrationsänderung, die sich ihm während des Aufsteigens mit der Geschwindigkeit w mitteilt, ist also $w \cdot \Delta c/l$. Das entspricht einer Massenänderung von $\dot{m} = \rho_\mathrm{m} \cdot w \cdot (\Delta c/l) \cdot l^3$. Die Anreicherung findet in der Form eines über die Teilchenoberfläche l^2 fließenden Diffusionsstroms $j = \rho_\mathrm{m} \cdot D \cdot (\Delta c_w/l) \cdot l^2$ statt. Hierbei bezeichnet D den Diffusionskoeffizienten. Es wurde wiederum der wirksame Konzentrationsunterschied Δc_w eingeführt, da das Fluidteilchen aufgrund seiner Geschwindigkeit nicht genügend Zeit hat, den aufgeprägten Unterschied Δc vollständig auszugleichen. Durch Bilanzierung $\dot{m} = j$ erhält man den wirksamen Konzentrationsgradienten zu $\Delta c_w = w \cdot l \cdot \Delta c/D$. Könnte die Teilchengeschwindigkeit so vorgegeben werden, dass der Konzentrationsausgleich gerade erreicht wird, würden sich Δc und Δc_w nicht unterscheiden. Die dazugehörige Stoffdiffusionsgeschwindigkeit w_D wäre damit $w_D = D/l$.

Zu einer Aussage bezüglich der Instabilität kommt man analog zur Rayleigh-Bénard-Konvektion, wenn die auf das Fluidelement wirkende Auftriebskraft A mit der Widerstandskraft W verglichen wird. Die Auftriebskraft $A = A_T + A_D$

setzt sich aus einem thermisch bedingten Anteil A_T und einem diffusionsbedingten Anteil A_D zusammen. Die mit der Temperaturänderung einhergehende Dichteänderung des Flüssigkeitsteilchens ergibt sich zu $\Delta\rho_T \sim \rho_\mathrm{m} \cdot \alpha_\mathrm{m} \cdot \Delta T_w$. Der hierdurch hervorgerufene Anteil an der Auftriebskraft ist $A_T \sim \rho_\mathrm{m} \cdot \alpha_\mathrm{m} \cdot \Delta T_w \cdot g \cdot l^3$, mit dem mittleren Temperaturausdehnungskoeffizient α_m. Die diffusionsbedingte Dichteänderung ist $\Delta\rho_D \sim \rho_\mathrm{m} \cdot \beta_\mathrm{m} \cdot \Delta c_w$ und führt zu einer anteiligen Auftriebskraft von $A_D \sim -\rho_\mathrm{m} \cdot \beta_\mathrm{m} \cdot \Delta c_w \cdot g \cdot l^3$. Mit β_m ist der mittlere Konzentrationsausdehnungskoeffizient bezeichnet. Das negative Vorzeichen wurde eingeführt, damit A_T und A_D in die gleiche Richtung weisen, wenn Δc_w und ΔT_w das gleiche Vorzeichen besitzen. Der Bewegung des Teilchens wirkt die Widerstandskraft W entgegen. Gemäß der schleichenden Strömung (kleine Störgeschwindigkeiten w) gilt nach Stokes $W \sim \mu \cdot w \cdot l = \mu \cdot l^2/\Delta t$. Die Bedingung für die Instabilität ist offensichtlich durch das Dominieren des Auftriebs über den Widerstand bestimmt:

$$A = A_T + A_D \geq W\,,$$
$$\rho_\mathrm{m} \cdot \alpha_\mathrm{m} \cdot \Delta T_w \cdot g \cdot l^3 - \rho_\mathrm{m} \cdot \beta_\mathrm{m} \cdot \Delta c_w \cdot g \cdot l^3 \geq \mu \cdot w \cdot d \cdot \mathrm{C}$$

Die Konstante C fasst sämtliche bei den vorgenommenen Abschätzungen auftretenden Proportionalitätsfaktoren zusammen. Mit den oben abgeleiteten Beziehungen für ΔT_w und Δc_w und Division durch $\mu \cdot w \cdot l$ erhält man:

$$\underbrace{\frac{\alpha_\mathrm{m} \cdot \Delta T \cdot g \cdot l^3}{k \cdot \nu}}_{Ra} - \underbrace{\frac{\beta_\mathrm{m} \cdot \Delta c \cdot g \cdot l^3}{D \cdot \nu}}_{Le \cdot Ra_D} \geq C\,. \tag{8.96}$$

Man erkennt in der ersten dimensionslosen Bildung auf der linken Seite die Rayleigh-Zahl Ra wieder. Die zweite dimensionslose Bildung wird üblicherweise als Produkt aus der Diffusions-Rayleigh-Zahl $Ra_D = \beta_\mathrm{m} \cdot \Delta c \cdot g \cdot l^3/(k \cdot \nu)$ und der *Lewis-Zahl* $Le = k/D$ geschrieben. Die *Lewis-Zahl* ist das Verhältnis aus charakteristischer thermischer Diffusionsgeschwindigkeit w_T und der Stoffdiffusionsgeschwindigkeit w_D. Daraus ergibt sich $Le = w_T/w_D$.

Es sei darauf hingewiesen, dass das Einsetzen der Rayleigh-Bénard-Konvektion ein Spezialfall des obigen Stabilitätskriteriums ist. Denn ohne Diffusionseinfluss ist $Ra_D = 0$ und man gelangt zu dem Stabilitätskriterium Gl. (8.16). Es ist ebenfalls bemerkenswert, dass die auftretende Konstante C, die die Bedeutung des Wertes der kritischen Kennzahl hat, einfach aus der Analyse der Rayleigh-Bénard-Konvektion ($Ra_D = 0$) entnommen werden kann, d. h. $\mathrm{C} = Ra_\mathrm{krit}$. Daher kann man aufgrund der phänomenologischen Überlegung schreiben:

$$Ra - Le \cdot Ra_D \geq Ra_\mathrm{krit}\,. \tag{8.97}$$

Die Beziehung Gl. (8.97) stellt für $Ra - Le \cdot Ra_D = Ra_\mathrm{krit}$ eine Geradengleichung im $Ra(Ra_D)$ Diagramm dar. Diese für die Instabilität kritische Gerade besitzt die Steigung Le (siehe Abb. 8.37).

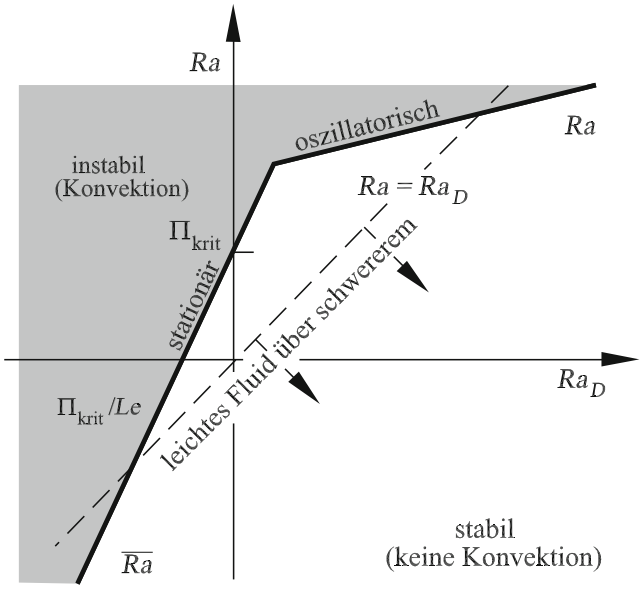


Abb. 8.37 Kritische Zustände einer frei berandeten Flüssigkeitsschicht aus einem Zweikomponentengemisch

Für positive Ra liegt eine thermisch instabile und für negative Ra_D eine diffusiv instabile Dichteschichtung vor. Bei z. B. fest vorgegebenem $Ra_D < 0$ wird die Dichteschichtung schon bei Werten von $Ra < Ra_{\text{krit}}$ instabil.

Man beachte ebenfalls, dass sich die thermisch und diffusiv bedingten Dichtegradienten $\Delta\rho_T = \rho_{\text{m}} \cdot \alpha_{\text{m}} \cdot \Delta T$ und $\Delta\rho_D = \rho_{\text{m}} \cdot \beta_{\text{m}} \cdot \Delta c$ der Schicht für $Ra = Ra_D$ gegenseitig aufheben. Die Bedingung $Ra > Ra_D$ drückt aus, dass dichteres Medium über leichterem liegt. Jenseits des Punktes in dem sich die kritische Gerade nach Gl. (8.97) mit der eben identifizierten Geraden $Ra = Ra_D$ schneidet (ein solcher Punkt existiert für $Le \neq 1$), ist Instabilität auch bei stabiler Dichteschichtung möglich.

Obwohl Gl. (8.97) ein exaktes Stabilitätskriterium ist, darf nicht unerwähnt bleiben, dass im Bereich sehr großer positiver Diffusions-Rayleigh-Zahlen Ra_D diese Gleichung nicht mehr gilt. Die Schichtung wird schon bei kleineren thermischen Rayleigh-Zahlen Ra instabil, als durch Gl. (8.97) vorausgesagt. Hierfür sind die bei den relativ starken Konzentrations- und Temperaturgradienten auftretenden starken Dichteänderungen des Teilchens verantwortlich. Diese Dichteänderungen sorgen dafür, dass die Trägheitskraft neben der Auftriebs- und Reibungskraft das Gleichgewicht mit beeinflusst. Die dann auftretenden Instabilitäten sind instationär. Als weitere dimensionslose Kennzahl tritt damit die Prandtl-Zahl $Pr = \nu/k$ auf. Bisher wurden wie bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion die Trägheitskräfte vernachlässigt, womit das Einsetzen der stationären Instabilitäten richtig beschrieben wird. Diese treten in Form von schmalen hohen Konvektionszellen auf, weshalb sie üblicherweise als *Finger-Instabilitäten* bezeichnet werden (siehe Abb. 8.35).

Stabilitätsanalyse

Für die Doppelt-Diffusionskonvektion (Temperature- und Konzentrationsgradient) schreiben sich die Störungsifferentialgleichungen:

$$\nabla \cdot u' = 0, \tag{8.98}$$

$$Le_\infty \cdot \frac{\partial c'}{\partial t} = \Delta c' + Le_\infty \cdot \omega', \tag{8.99}$$

$$\frac{1}{Pr_\infty} \cdot \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla u' + u' \cdot \nabla U_0 \right) = -\nabla p' + \Delta u' + (Ra_\infty \cdot T' + Ra_{D\infty} \cdot c') \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8.100}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla T' \cdot \nabla U_0 = \Delta T'. \tag{8.101}$$

Der *Grundzustand* der Doppeldiffusions-Konvektions-Instabilität $\boldsymbol{U}_0 = (c_0, \boldsymbol{u}_0, p_0, T_0)$ ergibt sich aus der Kontinuitäts- und Energiegleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (90)):

$$\boldsymbol{\Delta} c_0 = 0\,, \qquad \boldsymbol{\Delta} T_0 = 0\,. \tag{8.102}$$

Eine Ruhelage $\boldsymbol{u} = 0$ ist dabei auch möglich, wenn der Temperaturgradient $\boldsymbol{\nabla} T_0$ nicht parallel zur Richtung der Schwerkraft $\boldsymbol{e}_z$ zeigt. Nimmt man die Rotation der Impulsgleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (90)) und setzt $\boldsymbol{u} = 0$ ein, so folgt die Bedingung $(Ra \cdot \boldsymbol{\nabla} T_0 - Ra_D \cdot \boldsymbol{\nabla} c_0) \times \boldsymbol{e}_z = 0$. Die Parallelitätsforderung gilt jetzt allgemeiner für die Vektorsumme aus Temperatur- und Konzentrationsgradienten $(\boldsymbol{\nabla} T_0 - (Ra_D/Ra) \cdot \boldsymbol{\nabla} c_0) \,||\, \boldsymbol{e}_z$. Hierin ist $Ra_D/Ra = -\boldsymbol{\Delta}\rho_D/\boldsymbol{\Delta}\rho_T$ zu interpretieren als das Verhältnis der Dichteänderung infolge Temperaturgradienten $\Delta\rho_T = -\rho_\mathrm{m} \cdot \alpha_\mathrm{m} \cdot \boldsymbol{\Delta} T$ zur Dichteänderung infolge Konzentrationsgradienten $\boldsymbol{\Delta}\rho_D = \rho_\mathrm{m} \cdot \beta_\mathrm{m} \cdot \boldsymbol{\Delta} c$. Für $\boldsymbol{\Delta}\rho_D/\boldsymbol{\Delta}\rho_T = 1$ ist die Dichte an jedem Ort gleich, da sich in diesem Fall die temperatur- und konzentrationsbedingten Dichteänderungen gerade kompensieren. Die Situation der indifferenten Dichteschichtung ist also durch $Ra = Ra_D$ gegeben.

Für eine in den horizontalen Richtungen x und y unendlich ausgedehnten Schicht, ist der Grundzustand von x und y unabhängig. Die Temperatur und die Konzentrationen an den beiden horizontalen Berandungen der Flüssigkeitsschicht seien jeweils konstant und vorgegeben:

$$T_0\left(x, y, z = -\frac{1}{2}\right) = T_1\,, \qquad T_0\left(x, y, z = \frac{1}{2}\right) = T_2\,,$$

$$c_0\left(x, y, z = -\frac{1}{2}\right) = c_1\,, \qquad c_0\left(x, y, z = \frac{1}{2}\right) = c_2\,.$$

Entlang der homogenen Parallelrichtungen x, y ist der Grundzustand nur von der Vertikalrichtung z abhängig. Man erhält aus den obigen Laplacegleichungen für T_0 und c_0:

$$T_0(z) = \mathrm{C}_1^T \cdot z + \mathrm{C}_0^T\,, \qquad c_0(z) = \mathrm{C}_1^c \cdot z + \mathrm{C}_0^c\,.$$

Die Konstanten $(\mathrm{C}_0^T, \mathrm{C}_1^T)$ bzw. $(\mathrm{C}_0^c, \mathrm{C}_1^c)$ folgen aus den angeführten Randbedingungen zu $\mathrm{C}_1^T = -1$, $\mathrm{C}_0^T = (T_1 + T_2 - 2 \cdot T_\mathrm{m})/\Delta T$ bzw. $\mathrm{C}_1^c = -1$, $\mathrm{C}_0^c = (c_1 + c_2 - 2 \cdot c_\mathrm{m})/\Delta c$. Mit $T_\mathrm{m} = 1/2 \cdot (T_1 + T_2)$, entsprechend der Rayleigh-Bénard-Konvektion, bzw. $c_\mathrm{m} = 1/2 \cdot (c_1 + c_2)$ ergibt sich die Grundlösung:

$$T_0 = c_0 = -z\,. \tag{8.103}$$

Aus den ersten beiden Boussinesq-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (90)) erhält man $p_0 = p_0(z)$. Die z-Boussinesq-Gleichung ergibt:

$$0 = -\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}z} + (Ra \cdot T_0 - Ra_D \cdot c_0)\,,$$

bzw. mit Gl. (8.102) für den Druck:

$$p_0 = -\frac{1}{2} \cdot (Ra - Ra_D) \cdot z^2 + p_\infty\,. \tag{8.104}$$

Dabei ist p_∞ der Umgebungsdruck. Die ermittelten Temperatur- und Konzentrationsverteilungen und damit auch das gesamte Wärmeleitungs-Diffusionsproblem ist unabhängig von p_∞. Nicht das Niveau des Drucks p_0 hat einen Einfluss auf das Problem, sondern ausschließlich sein Gradient $\mathrm{d}p_0/\mathrm{d}z$.

Die lineare Stabilitätsanalyse liefert wiederum das *Stabilitätsdiagramm* (Abb. 8.37). Das Vorgehen entspricht dem der Rayleigh-Bénard-Konvektion im Abschn. 2.1. Für eine horizontale Zweikomponenten-Schicht mit *freien Berandungen* kann die *Finger-Instabilität* sowohl stationär als auch oszillatorisch einsetzen. Die Indifferenzkurve für die stationäre Doppel-Diffusions-Instabilität berechnet sich mit (siehe Oertel und Delfs 1996, 2005)

$$\overline{\Pi}(a) = Ra - Le \cdot Ra_D = \frac{(a^2 + \pi^2)^3}{a^2}\,. \tag{8.105}$$

$\overline{\Pi}(a)$ beschreibt dabei dieselbe Kurve wie beim Rayleigh-Bénard-Problem $Ra(a)$. Für die Indifferenzkurve für oszillatorische Fingerinstabilitäten erhält man:

$$\widetilde{\Pi}(a) = \frac{Pr \cdot Le^2 \cdot Ra - Pr \cdot Le \cdot \dfrac{1 + Pr \cdot Le}{1 + Pr} \cdot Ra_D}{Pr \cdot Le^2 + Le \cdot (1 + Pr) + 1} = \frac{(a^2 + \pi^2)^3}{a^2}\,. \tag{8.106}$$

Die Kennzahl $\tilde{\Pi}$ entspricht im oszillatorischen Fall der Kennzahl $\overline{\Pi}$ für die stationäre Instabilität. $\tilde{\Pi}$ hat wiederum denselben Verlauf wie $Ra(a)$ bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion. Damit wurde für die Flüssigkeitsschicht mit freien Berandungen ohne Temperatur- und Konzentrationsstörungen das Doppeldiffusionsproblem vollständig auf die viel einfachere stationäre Rayleigh-Bénard-Konvektion zurückgeführt.

Das Minimum der Funktion $\overline{\Pi}(a) = \tilde{\Pi}(a)$ ergibt die kritischen Werte (vgl. freie Flüssigkeitsschicht bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion) $\Pi_{\text{krit}} = (27/4) \cdot \pi^4 = 658$ und die kritische Wellenzahl von $a_{\text{krit}} = \pi/\sqrt{2} = 2,22$.

Damit sind auch die kritischen Zustände der Flüssigkeitsschicht bestimmt. Da die Lewis-Zahl Le und die Prandtl-Zahl Pr als konstante gegebene Stoffeigenschaften betrachtet werden können, ist es sinnvoll die kritischen Zustände in einem Diagramm der Rayleigh-Zahlen $Ra(Ra_D)$ darzustellen. Man erhält aus Gl. (8.105) die Geradengleichung:

$$\overline{Ra} = \Pi_{\text{krit}} + Le \cdot Ra_D \tag{8.107}$$

und aus Gl. (8.106):

$$\widetilde{Ra} = \Pi_{\text{krit}} \cdot \left(1 + \frac{1}{Le}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{Le \cdot Pr}\right) + \frac{\frac{1}{Le} + Pr}{1 + Pr} \cdot Ra_D \,. \tag{8.108}$$

Beide Geraden sind in der Abb. 8.37 eingetragen. Das Diagramm zeigt ebenfalls, dass die Stabilitätsgrenzen $\overline{Ra}$ und $\tilde{Ra}$ i. d. R. die Winkelhalbierende $Ra = Ra_D$ schneiden, die die linke Begrenzung des Bereichs von Rayleigh-Zahlen darstellt, in dem eine stabile Dichteschichtung (leichtes Fluid über schwerem) vorliegt. Dieses zeigt, dass doppeldiffusive Instabilitäten auch bei stabiler Dichteschichtung möglich sind. Sogar wenn schweres Fluid über leichterem liegt, kann der Zustand der Flüssigkeitsschicht stabil sein.

4.2 Stoffaustausch an der ebenen Platte

Die erzwungene Konvektionsströmung der längs angeströmten *ebenen Platte mit Stoffaustausch* ist in Abb. 8.38 skizziert. Einer heißen Gasströmung wird Kühlluft der wandnormalen Geschwindigkeitskomponente $w(x)$ zugeführt. In diesem Kapitel wird der einfachste Fall einer ebenen inkompressiblen Grenzschichtströmung eines inerten Binärgemisches behandelt. Das Kühlgas 1 mit der Massenkonzentration $c_1 = c$ diffundiert durch die poröse Oberfläche in das strömende Gas 2 mit der Massenkonzentration $c_2 = 1 - c$. Die bisher diskutierten zweidimensionalen Grenzschichtgleichungen mit Wärmetransport Gl. (8.73), (8.74) und (8.75) werden um die Massentransportgleichungen ergänzt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \,, \tag{8.109}$$

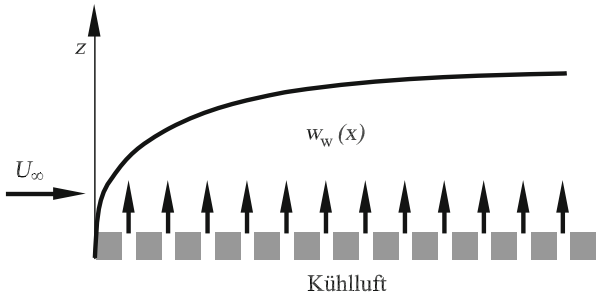


Abb. 8.38 Stoffaustausch in der ebenen Plattengrenzschicht

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re_l} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,, \tag{8.110}$$

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pr \cdot Re_l} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,, \tag{8.111}$$

$$u \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{Le} \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\,, \tag{8.112}$$

mit der Lewis-Zahl $Le = D/k = Pr/Sc$. Dabei werden Kopplungseffekte wie die Thermodiffusion, die z. B. bei der Isotopentrennung benutzt wird, vernachlässigt. Die Stoffwerte eines Zweistoffgemisches sind nicht nur von Temperatur und Druck abhängig, sondern auch von der Konzentration. Diese Abhängigkeit ist jedoch gering und wird wie die Druckabhängigkeit vernachlässigt. Im Rahmen der Boussinesq-Approximation werden die Stoffwerte bei der mittleren Temperatur T_m als konstant vorausgesetzt. In der Energiegleichung (8.111) wurde der Energiediffusionsterm gegenüber dem Wärmeleitungsterm vernachlässigt, was bei inerten Gasgemischen näherungsweise erfüllt ist. Demzufolge beeinflusst der Stoffaustausch das Geschwindigkeitsprofil ausschließlich über die Randbedingung $w_\mathrm{w}(x)$. Die Kontinuitätsgleichung (8.109) und Impulsgleichung (8.110) bleiben unverändert.

Das Gleichungssystem besitzt für die ebene Plattengrenzschicht z. B. die Randbedingungen an der Wand $w = w_\mathrm{w}$, die vorgegebene Wandtemperatur T_w und Wandkonzentration $c = c_\mathrm{w}$. Am Fernfeldrand gelten $T = T_\infty$ und $c = c_\infty$. Abb. 8.39 zeigt die berechneten Temperatur- und Konzentrationsprofile bei unterschiedlichen Ausblasraten für die Prandtl- und Schmidt-Zahl 0.7. Durch den Stofftransport zur Wand mit $w_\mathrm{w} < 0$ werden die Profile völliger. Die Absaugung wird in der Praxis ausgenutzt, um die Strömungsablösung in Grenzschichten mit Druckgradienten zu verhindern. Der Stofftransport lässt die Profile durch Ausblasen flacher werden. Dadurch wird die Strömungsablösung begünstigt. Die Profile weisen einen Wendepunkt auf, der auch den laminar-turbulenten Übergang in der Grenzschicht fördert.

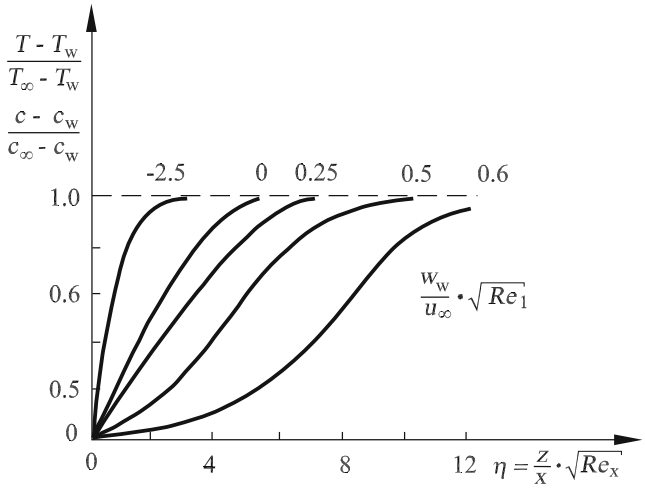


Abb. 8.39 Temperatur- und Konzentrationsprofile an der ebenen Platte mit Stofftransport, $Pr = Sc = 0,7$

Die Verhältnisse der Strömungs- und Temperaturgrenzschichten können auch auf den Stofftransport übertragen werden. Der Aussage $\delta/\delta_T \approx Pr^{(1/3)}$ für $Pr \geq 1$ entspricht

$$\frac{\delta}{\delta_D} \approx Sc^{\frac{1}{3}} \text{ für} \qquad Sc \geq 1 \quad . \tag{8.113}$$

Für die Diffusions-Nußelt-Zahl Nu_D gilt:

$$\frac{Nu_D}{\sqrt{Re_x}} = 0,332 \cdot Sc^{\frac{1}{3}} \text{ für} \qquad Sc \geq 1\,, \tag{8.114}$$

sofern die Ausblasgeschwindigkeit sehr gering ist. Für beliebige Ausblasraten muss die Konstante in Gl. (8.114) entsprechend angepasst werden.

Für den turbulenten Massentransport werden die Reynolds-Gleichungen (8.88), (8.89) und (8.90) der ebenen Plattengrenzschicht um die Reynolds-Transportgleichung ergänzt:

$$\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{c}}{\partial x} + \overline{w} \cdot \frac{\partial \overline{c}}{\partial z} = D \cdot \frac{\partial^2 \overline{c}}{\partial z^2} - \frac{\partial(\overline{w' \cdot c'})}{\partial z}\,, \tag{8.115}$$

mit dem Reynoldsschen Massenstrom

$$j_z = \rho \cdot \overline{w' \cdot c'} = -\rho \cdot \epsilon_D \cdot \frac{\partial \overline{c}}{\partial z}$$

und der turbulenten Austauschgröße ϵ_D für den Massenaustausch. In Anlehnung an die molekularen Prandtl- und Schmidt-Kennzahl werden die turbulente Prandtl- und Schmidt-Zahl definiert:

$$Pr_t = \frac{\epsilon_\tau}{\epsilon_q} = \frac{\overline{u' \cdot w'}}{\overline{w' \cdot T'}} \cdot \frac{\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}}{\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}}, \tag{8.116}$$

$$Sc_t = \frac{\epsilon_\tau}{\epsilon_D} = \frac{\overline{u' \cdot w'}}{\overline{w' \cdot c'}} \cdot \frac{\frac{\partial \overline{c}}{\partial z}}{\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}}. \tag{8.117}$$

Damit ergibt sich die turbulente Lewis-Zahl:

$$Le_t = \frac{Sc_t}{Pr_t} = \frac{\epsilon_q}{\epsilon_D} = \frac{\overline{w' \cdot T'}}{\overline{w' \cdot c'}} \cdot \frac{\frac{\partial \overline{c}}{\partial z}}{\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}}. \tag{8.118}$$

Näherungsweise kann in Scherschichten $Le_t = 1$ gesetzt werden. Damit können alle Aussagen zum turbulenten Impulsaustausch auf den turbulenten Stoffaustausch übertragen werden.

Der laminare und turbulente Massentransport mit chemischen Reaktionen wird im Kap. 10 ▸ Strömungen mit chemischen Reaktionen ergänzt.

Weiterführende Literatur

Baehr, H.D., Stephan, K.: Heat and Mass Transfer. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1998)

Bénard, H.: Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. Rev. Gén. Sci. Pures Appl. **11**, 1261–1268 (1900)

Bennet, C.O., Myers, J.E.: Momentum, Heat and Mass Transfer. McGraw-Hill, New York (1966)

Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N.: Transport Phenomena. John Wiley & Sons, New York (1960)

Bodenschatz, E., Pesch, W., Ahlers, G.: Developments in Rayleigh-Bénard Convection. Ann. Rev. Fluid Mech. **32**, 709–777 (2000)

Busemann, A.: Gasdynamik. In: Schiller, L. (Hrsg.) Handbuch der Experimentalphysik, IV, S. 341–460. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1931)

Busse, F.H.: Bénard convection in particular. Rep. Prog. Phys. **41**, 1929 (1978a)

Busse, F.H.: Nonlinear properties of thermal convection. Rep. Prog. Phys. **41**, 1929–1967 (1978b)

Cebeci, T., Bradshaw, P.: Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1988)

Crocco, L.: Sulla trasmissione del calore da una lamina piana a un fluido scorrente ad alta velocità. L'Aerotechnica **12**(2), 181–197 (1932)

Eckert, E.: Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch. Springer, Berlin/Heidelberg (1959)

Eckert, E.R.G., Drake, R.U.: Analysis of Heat and Mass Transfer. McGraw-Hill, New York (1972)

Gebhart, B.: Heat Transfer. McGraw-Hill, New York (1971)

Gebhart, B., Jaluwina, Y., Mahajan, R.L., Sammakia, B.: Boyancy Induced Flows and Transport. Hemisphere Publishers, Washington (1988)

Gröber, H., Erk, S., Grigull, U.: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer, Berlin/Heidelberg (1961)
Hilpert, R.: Wärmeabgabe von geheizten drähten und rohren im luftstrom. Forsch. Geb. Ing.-Wes. **4**, 215–224 (1933)
Hirschfelder, J.O., Curtis, C.F., Bird, R.B.: Molecular Theory of Gases and Liquids. John Wiley & Sons, New York (1967)
Holman, J.P.: Heat Transfer. McGraw-Hill, New York (1976)
Jacob, M.: Heat Transfer. John Wiley & Sons, New York (1959)
Jischa, M.: Konvektiver Impuls-, Wärme und Stoffaustausch. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1982)
Kirchartz, R., Oertel, H., jr.: Three-dimensional thermal cellular convection in rectangular boxes. J. Fluid Mech. **192**, 249–286 (1988)
Kirchartz, R., Müller, U., Oertel, H., jr., Zierep, J.: Axisymmetric and non-axisymmetric convection in a cylindrical container. Acta Mech. **40**, 181–194 (1981)
Knudsen, J.G., Katz, D.L.: Fluid Dynamics and Heat Transfer. McGraw-Hill, New York (1958)
Koschmieder, E.: Bénard Cells and Taylor Vortices. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge (1993)
Merker, G.P.: Konvektive Wärmeübertragung. Springer, Berlin/Heidelberg (1987)
Mersmann, A.: Stoffübertragung. Springer, Berlin/Heidelberg (1986)
Müller, U., Erhard, P.: Freie Konvektion und Wärmeübertragung. Müller, Heidelberg (1999)
Oertel, H., jr., Delfs, J.: Strömungsmechanische Instabilitäten. Springer, Berlin/Heidelberg (1996), Universitätsverlag, Karlsruhe (2005)
Reynolds, J.A.: Turbulent Flows in Engineering. John Wiley & Sons, New York (1974)
Rohsenow, W.M., Hartnett, J.P., Gamić, E.N.: Handbook of Heat Transfer Fundamentals. McGraw-Hill, New York (1985)
Schlichting, H., Gersten, K.: Boundary Layer Theory. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (2003)
Schlichting, H., Gersten, K.: Grenzschicht-Theorie. Springer, Berlin/Heidelberg (2006)
Schlünder, E.K.: Einführung in die Wärmeübertragung. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1981)
Schmidt, E., Beckmann, W.: Das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld von einer wärmeabgebenden senkrechten Platte bei natürlicher Konvektion. Technische Mechanik und Thermodynamik **1**, 341–391 (1930). VDI, Berlin
Schneider, W.: Konvektive Wärme- und Stoffübertragung. In: Prandtl, L., Oswatitsch, K., Wieghardt, K. (Hrsg.) Führer durch die Strömungslehre, 293–342. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1990)
Stork, K., Müller, U.: Convection in boxes: experiments. J. Fluid Mech. **54**, 599–611 (1972)
Turner, J.S.: Boyancy Effects in Fluids. Cambridge University Press, Cambridge (1973)
Turner, J.S.: Convection in multicomponent systems. Naturwissenschaften **72**, 70–75 (1985)
Unger, J.: Konvektionsströmungen. Teubner, Stuttgart (1988)
Walz, A.: Strömungs- und Temperaturgrenzschichten. Braun, Karlsruhe (1966)
Welty, J.R., Wilson, R.E., Wicks, C.E.: Fundamentals of momentum, heat and mass transfer. John Wiley & Sons, New York (1976)
Wilde, K.: Wärme- und Stoffübertragung in Strömungen. Steinkopff, Darmstadt (1978)

Strömungen mit mehreren Phasen

9

Ulrich Müller

Zusammenfassung

Das Kapitel Strömungen mit mehreren Phasen ist Teil des Lehrbuches und Nachschlagewerkes H. Oertel jr. (Hrsg.) Prandtl-Führer durch die Strömungslehre. Es werden die Grundlagen der Mehrphasenströmungen mit den unterschiedlichen Strömungsformen und Strömungskarten der horizontalen und vertikalen Rohrströmungen bereitgestellt sowie vereinfachte Strömungsmodelle der Zweiphasenströmung, wie das Zwei-Fluid Modell, die Mischungsmodelle und das Driftströmungsmodell behandelt.

Das Kapitel gibt einen Einblick in Strömungen mit Blasen und Tropfen, Sprühströmungen, den Flüssig-Feststoff Transport, Dichtewellen und Kavitation sowie den Druckverlust in Hydraulikkomponenten und Instabilitäten in Zweiphasenströmungen.

1 Grundlagen der Strömungen mit mehreren Phasen

Die *Mehrphasenströmung* ist die am häufigsten auftretende Strömungsform in Natur und Technik. Dabei ist der Begriff Phase im thermodynamischen Sinne als Aggregatzustand fest, flüssig und gasförmig zu verstehen, die in ein- oder mehrkomponentigen Stoffsystemen simultan auftreten können. Die mit Regentropfen und Hagelkörnern driftenden Gewitterwolken, der schäumende Gebirgsbach, die abgehende Schneestaub-Lawine oder die Vulkanasche-Wolke sind eindrucksvolle Beispiele für Mehrphasenströmungen in der Natur.

In der Kraftwerks- und chemischen Verfahrenstechnik sind Mehrphasenströmungen ein entscheidendes Mittel für Wärme- und Stofftransport. Zweiphasenströmungen bestimmen das Geschehen in den Dampferzeugern, Kondensatoren und Kühltürmen von Dampfkraftwerken. Mehrphasen-Mehrkomponenten-Strömungen

U. Müller
Karlsruhe, Deutschland
E-Mail: ulrich.rom.mueller@t-online.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5_9

werden bei der Gewinnung, dem Transport und der Verarbeitung von Erdöl und Erdgas eingesetzt. Bei Destillations- und Rektifikationsprozessen der chemischen Industrie sind diese Strömungsarten ebenso maßgeblich beteiligt.

Die Bedeutung dieser Strömungsvorgänge für Umwelt und Technik erfordert grundlegendes physikalisches Verständnis der Transportvorgänge und der Wechselwirkungen in strömenden Mehrphasen-Mehrkomponenten-Mischungen.

Mehrphasenströmungen manifestieren sich im Allgemeinen als instationäre Vorgänge mit chaotischem Charakter und einem weiten Spektrum von Zeit und Längenskalen, das durch starke Verformungen der Phasengrenzflächen noch intensiviert wird. In weit stärkerem Maß als bei einphasigen turbulenten Strömungen sind daher für eine formale Beschreibung gemittelte Zustände und statistische Methoden sowie Skalierungsgesetzmäßigkeiten zu verwenden, um quantitative Aussagen über zu erwartende Phänomene, wie etwa Druckabfall oder Phasenverteilungen, treffen zu können.

Erschwerend für eine einheitliche mathematisch physikalische Beschreibung der Mehrphasenströmung sind die sehr unterschiedlichen Formen und Strukturen der Strömung, die selbst in einfachsten Geometrien wie Rohren und Kanälen konstanten Querschnitts bei Gas-Flüssigkeits- oder Gas-Feststoff-Strömungen beobachtet werden. Dabei hat die Schwerkraft einen maßgeblichen Einfluss. Daneben sind Grenzflächenspannungen und bei Feststoffen elektrostatische Kräfte von zentraler Bedeutung. Beispielhaft sind hier typische, immer wieder beobachtete Strömungsformen für eine Gas-Flüssigkeitsströmung im horizontalen und vertikalen Rohr in den Abbildungen 9.1 und 9.2 schematisch dargestellt.

Mehrphasenströmungen können grundsätzlich auf zwei Weisen mathematisch-physikalisch beschrieben werden. Man kann einerseits die Mehrphasenströmung als ein bewegtes Kontinuum von einander durchdringenden Phasen auffassen, wobei jede Phase an jedem Ort mit einem bestimmten Anteil vorhanden ist. Diese Modellvorstellung ist nützlich, wenn großskaliges Verhalten eines Mehrphasenfluids erfasst werden soll. Andererseits kann die Bewegung in jeder Phase separat beschrieben werden, wobei der Kopplung zwischen den Phasen an den Grenzflächen besondere Bedeutung zukommt. Dies kommt bei der rechnerischen Behandlung dadurch zum Ausdruck, dass die Bewegung der Grenzflächen durch spezifische mathematische Methoden (siehe Shyy et al. 1996 und Tryggvason et al. 2011) im Detail berechnet wird. Diese Betrachtungsweise bietet Vorteile, wenn das Geschehen durch Wechselwirkungen an den *Zwischenphasenflächen* etwa durch Massenflüsse bestimmt wird. Kleinskalige Effekte stehen hier im Vordergrund.

In Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik werden die *Grundgleichungen der Zweiphasenströmungen* und die vereinfachten Modelle im Sinne der ersten Betrachtungsweise vorgestellt. Die zweite Betrachtungsweise, die beispielhaft anhand der Rayleigh-Plesset-Gleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (93)) im Rahmen des Euler-Lagrange-Modells vorgestellt wird, findet in dem nachfolgenden Kapitel keine Anwendung.

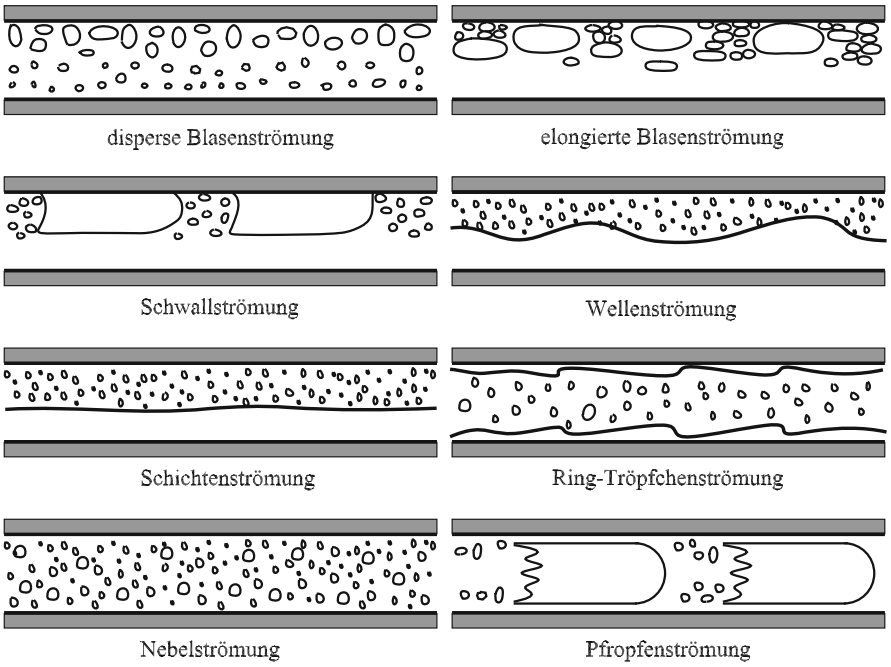


Abb. 9.1 Strömungsformen im horizontalen Rohr

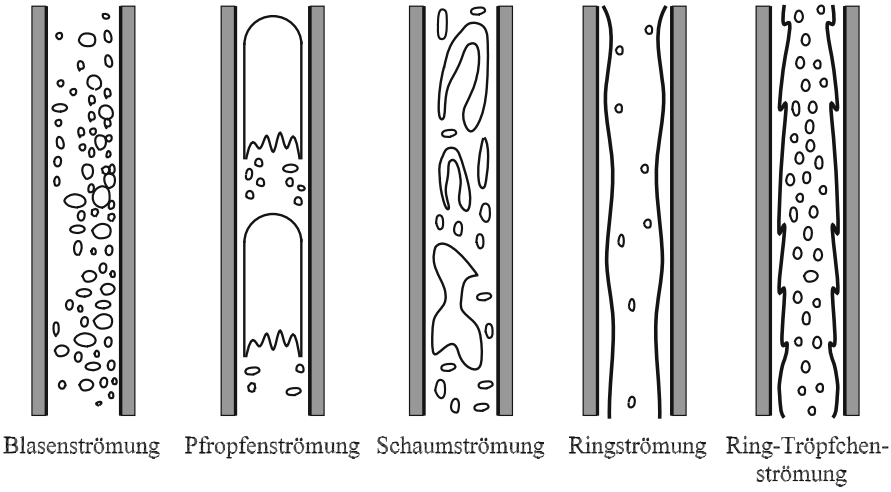


Abb. 9.2 Strömungsformen im vertikalen Rohr, bei gleichgerichteter Aufwärtsströmung

1.1 Definitionen

Mit der in Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik eingeführten Mittelwertdefinition werden im Folgenden einige grundlegende Größen und Begriffe der Mehrphasenströmungen festgelegt.

Als *Void* oder Phasenanteil $\varepsilon_k(\boldsymbol{x},t)$ der Phase k am Strömungsgeschehen bezeichnet man den Anteil des Strömungskanals in Raum bzw. Zeit, der von der Phase k (Gas oder Flüssigkeit) besetzt ist. Der Anteil ε kann als eine lokale, über die Zeit, über eine Sehnenlänge L, die Kanalquerschnittsfläche A oder ein Kanalvolumen ΔV gemittelte Größe definiert werden. Entsprechend sind *Zeitanteil*, *Flächenanteil* oder *Volumenanteil* der Phase k durch die einfache Beziehung

$$\varepsilon_{k,t} = \frac{\Delta t_k}{\Delta t}\,, \qquad \varepsilon_{k,A} = \frac{A_k}{\Delta A}\,, \qquad \varepsilon_{k,V} = \frac{V_k}{\Delta V} \tag{9.1}$$

definiert, wobei Δt_k, A_k und V_k als entsprechende Mittelwerte einer Phasenindikatorfunktion $X_k(\boldsymbol{x},t)$ zu verstehen sind. Die Flächen- und Volumenanteile können zusätzlich noch zeitlich gemittelt sein.

Bei den Geschwindigkeiten der Phasen werden entsprechend zeitlich gemittelte lokale Werte $\overline{u_k(\boldsymbol{x},t)}^{\Delta t}$, querschnittsgemittelte $\langle u_k(\boldsymbol{x},t)\rangle_{k,A}$ oder räumlich gemittelte Werte $\langle u_k(\boldsymbol{x},t)\rangle_{k,V}$ eingeführt. Die weitere Diskussion wird der Einfachheit halber für eine Geschwindigkeitskomponente durchgeführt.

Als *bezogene Geschwindigkeiten* bezeichnet man das Produkt aus *Phasenanteil* ε_k und *Phasengeschwindigkeit* u_k und definiert:

$$U_k = \varepsilon_k \cdot u_k\,.$$

Für den Mittelwert ergibt sich dann

$$\overline{U_k}^{\Delta t} = \overline{\varepsilon_k \cdot u_k}^{\Delta t}\,, \qquad \langle U_k\rangle_A = \langle \varepsilon_k \cdot u_k\rangle_A\,, \qquad \langle U_k\rangle_V = \langle \varepsilon_k \cdot u_k\rangle_V\,. \tag{9.2}$$

Dabei kann die querschnittsgemittelte Geschwindigkeit auch als mittlere Volumenstromdichte der Phase k interpretiert und in der Form

$$\langle U_k\rangle = \frac{\dot{V}_k}{A} \tag{9.3}$$

dargestellt werden. Hier ist $\dot{V}_k$ der Volumenstrom der Phase k. Die auf die Phase k bezogene Geschwindigkeit $\langle U_k\rangle$ ist also physikalisch so zu interpretieren, als fließe die Phase k allein im Kanal. An dieser Stelle werden ferner die totalen bezogenen Geschwindigkeiten definiert durch die Beziehung:

$$U = \sum_k U_k\,, \tag{9.4}$$

die hier lokal oder in querschnittsgemittelter Form $\langle U \rangle = \sum_k \langle U_k \rangle$ benutzt wird. Es liegt in der Natur der Mittelwertbildung, dass zwischen den gemittelten Größen $\langle U_k \rangle$, $\langle u_k \rangle$ und $\langle \varepsilon_k \rangle$ die Beziehung

$$\langle U_k \rangle = \langle \varepsilon_k \cdot u_k \rangle = \mathrm{C} \cdot \langle \varepsilon_k \rangle \cdot \langle u_k \rangle \tag{9.5}$$

gilt, mit C als Korrelationsfaktor. Der Korrelationsfaktor trägt der im Allgemeinen nicht gleichmäßigen und nicht kongruenten Verteilung der Phasengeschwindigkeit und des Volumenanteils im Gebiet der Mittelung Rechnung. Damit lassen sich die querschnittsgemittelten Phasengeschwindigkeiten $\langle U_k \rangle$ durch $\langle \varepsilon_k \rangle$ und $\langle u_k \rangle$ darstellen. Es ist nützlich, das Verhältnis der Phasengeschwindigkeiten einzuführen

$$S = \frac{\langle u_i \rangle}{\langle u_k \rangle} = \frac{\langle \varepsilon_i \rangle \cdot \langle U_i \rangle}{\langle \varepsilon_k \rangle \cdot \langle U_k \rangle} \cdot \frac{C_{0,i}}{C_{0,k}} \,. \tag{9.6}$$

Missverständlich wird das Verhältnis bisweilen auch als Schlupf bezeichnet. Mit den so definierten Geschwindigkeiten und den Dichten ρ_k der Phasen werden die Massenstromdichten $\dot{m}_k$ und Massenströme $\dot{M}_k$ dargestellt. Es gelten die Beziehungen:

$$\dot{m}_k = \rho_k \cdot \langle u_k \rangle \,, \qquad \dot{M}_k = \rho_k \cdot \langle U_k \rangle \cdot A \,. \tag{9.7}$$

Für den Gesamtmassenstrom $\dot{M}$ gilt aufgrund der Massenbilanz $\dot{M} = \sum_k \dot{M}_k$.

Zur Charakterisierung der Mehrphasenströmungen wird neben dem Volumenanteil (Void) ε_k auch ein *Massenanteil* χ als Verhältnis von Massenstrom der Phase k zum Gesamtmassenstrom benutzt:

$$\chi_k = \frac{\dot{M}_k}{\dot{M}} \,, \qquad \dot{M} = \sum \dot{M}_k \,. \tag{9.8}$$

Für Gas-Flüssigkeitsströmungen heißt dieses Verhältnis Dampfgehalt. Es ist für einkomponentige Zweiphasenströmungen z. B. Wasser-Wasserdampf thermodynamisch durch die Enthalpie der Phasen bestimmt (vgl. dazu Abschn. 4). Zwischen den Größen der Phasengeschwindigkeiten, Massenströmen und Dichten besteht eine funktionale Abhängigkeit. Für zweiphasige Strömungen, gas-flüssig, lässt sich die Abhängigkeit in der Form

$$\frac{\chi_\mathrm{G}}{\chi_\mathrm{L}} = \frac{\rho_\mathrm{G}}{\rho_\mathrm{L}} \cdot S \cdot \frac{\varepsilon_\mathrm{G}}{\varepsilon_\mathrm{L}} \tag{9.9}$$

angeben, wobei hier für jede Art der Mittelung und aus Gründen der Massenerhaltung $\chi_\mathrm{L} = 1 - \chi_\mathrm{G}$ und $\varepsilon_\mathrm{L} = 1 - \varepsilon_\mathrm{G}$ gilt. Insbesondere wird aus dieser Beziehung deutlich, dass der Volumenanteil ε ganz allgemein vom Geschwindigkeitsverhältnis S, vom Dichteverhältnis und vom Dampfgehalt einer Zweiphasenströmung abhängt.

Weil Zweiphasenströmungen in der Anwendung eine besondere Bedeutung haben, sind zur Beschreibung der Transportvorgänge weitere Begriffe für Geschwindigkeiten eingeführt worden. Als *Driftgeschwindigkeit* wird die Abweichung der tatsächlichen Phasengeschwindigkeit u_k von der totalen *bezogenen Phasengeschwindigkeit* $U = U_\mathrm{G} + U_\mathrm{L}$ bezeichnet. Es wird z. B. für eine gas-flüssig Strömung definiert:

$$u_{\mathrm{G,U}} = (u_\mathrm{G} - U)\,, \qquad u_{\mathrm{L,U}} = (u_\mathrm{L} - U)\,. \tag{9.10}$$

Diese *Driftgeschwindigkeiten* sind in einfacher Weise mit der *Relativgeschwindigkeit* $u_\mathrm{G} - u_\mathrm{L}$ zwischen den beiden Phasen verknüpft. Es gilt:

$$u_{\mathrm{G,U}} = (1 - \varepsilon_\mathrm{G}) \cdot (u_\mathrm{G} - u_\mathrm{L})\,, \qquad u_{\mathrm{L,U}} = -\varepsilon_\mathrm{G} \cdot (u_\mathrm{G} - u_\mathrm{L})\,. \tag{9.11}$$

Diese Relation gilt wiederum für jede Art der Mittelung. Deshalb wird hier in der Darstellung auf die besondere Symbolisierung zur Kennzeichnung der Mittelung verzichtet. In Analogie zu den bezogenen Geschwindigkeiten U_k werden bei der Herleitung einiger Modelle zur Beschreibung von Zweiphasenströmungen auch bezogene Driftgeschwindigkeiten, genannt Driftflüsse, eingeführt. Ihre Definition lautet:

$$U_{\mathrm{G,U}} = \varepsilon_\mathrm{G} \cdot u_{\mathrm{G,U}}\,, \qquad U_{\mathrm{L,U}} = (1 - \varepsilon_\mathrm{G}) \cdot u_{\mathrm{L,U}}\,. \tag{9.12}$$

Ein weiterer charakteristischer Parameter für Zweiphasenströmungen wurde von Lockhart und Martinelli (1949) eingeführt. Er ist als Verhältnis der Reibungs-Druckverluste für den Fall, dass Gas und Flüssigkeit jeweils allein durch die Leitung strömen. Wenn mit $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}z)_\mathrm{L}$ und mit $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}z)_\mathrm{G}$ jeweils der Druckverlust der über den Gesamtquerschnitt gemittelten Flüssigkeit- bzw. Gasvolumenströme bezeichnet wird, dann gilt für den *Martinelli-Parameter*:

$$X^2 = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_\mathrm{L}}{\left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_\mathrm{G}}\,. \tag{9.13}$$

Dieser Parameter ist u. a. ein Maß für den Volumenanteil der Strömung. Für $X^2 \gg 1$ besteht die Zweiphasenströmung überwiegend aus Flüssigkeit für $X^2 \ll 1$ überwiegend aus Gas.

1.2 Strömungsformen

Zweiphasenströmungen können bedingt durch die unterschiedliche Art der Grenzflächenwechselwirkung bei unterschiedlichen Volumenströmen der Phasen verschiedene Formen haben. Bei sehr unterschiedlichen Dichten der Phasen hat die

Schwerkraft einen maßgeblichen Einfluss. Um den Einfluss der Schwerkraft zu charakterisieren hat es sich als zweckmäßig erwiesen, die Strömungsformen für horizontale und vertikale Rohrströmungen zu klassifizieren. Die typischen Strömungsmuster sind für die beiden Fälle in Abb. 9.1 und 9.2 skizziert.

Die dargestellten Strömungsformen treten in Reihenfolge mit zunehmendem Gasanteil ε_G und wachsender Gasgeschwindigkeit auf. Die nicht scharfen Übergänge zwischen den Mustern werden durch die Strömungsturbulenz der Phasen, die Volumenanteile und die Stabilität der Grenzflächen bestimmt.

1.3 Strömungskarten

Zur Abgrenzung der unterschiedlichen Strömungsformen gegeneinander sind mit Hilfe experimenteller Beobachtungen Strömungskarten entwickelt worden. Eine stark vereinfachte Darstellung der Zustände kann für ein bestimmtes Gas-Flüssigkeitsgemisch, z. B. Luft und Wasser, mit Hilfe der beiden Kontrollparameter bezogene Flüssigkeits- und Gasgeschwindigkeit U_L und U_G erfolgen. Eine solche Karte wurde aus einer großen experimentellen Datenbank von Mandhane et al. (1974) erstellt. Sie ist aus einer Variation vorgegebener Flüssigkeits- und Gasvolumenströme in einer horizontalen Rohr-Teststrecke entstanden. Abb. 9.3 zeigt die Mandhane-Strömungskarte.

Ähnliche Karten sind von Govier und Aziz (1972) und Taitel et al. (1980) für Luft-Wasserströmungen in vertikalen Rohren angegeben worden. Die Grenzen

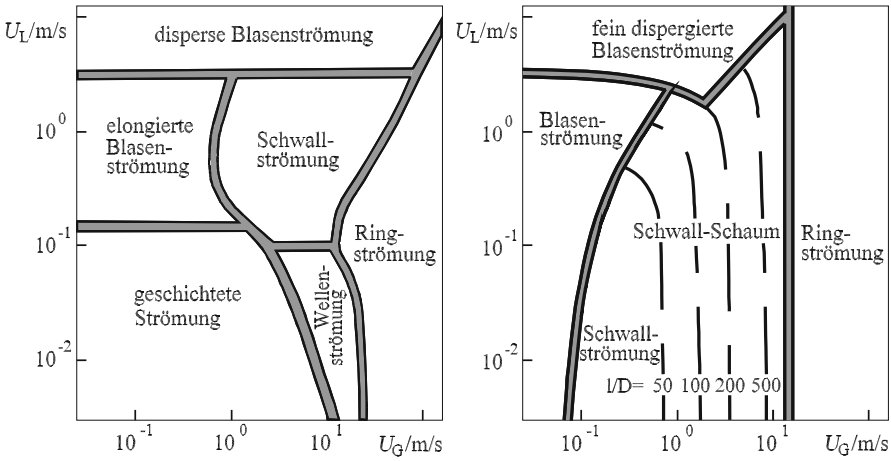


Abb. 9.3 Strömungskarte nach Mandhane et al. (1974) für eine horizontale Luft-Wasserströmung für die Versuchsdaten Druck 0.1 MPa, Rohrdurchmesser 2.5 cm. Nach Taitel et al. (1990) für eine vertikal aufwärtsgerichtete Luft-Wasserströmung für die Versuchsdaten Druck 0.1 MPa, Rohrdurchmesser 5.1 cm, l/D bezeichnet das Verhältnis von Rohrlänge zu Rohrdurchmesser

zwischen den Strömungsmustern sind nicht scharf und weisen z. T. hysteretischen Charakter auf. Bei vertikalen Rohrströmungen beeinflussen z. B. die Rohrlänge und der Strömungseinlass maßgeblich den Übergang zwischen Pfropfen- und Schaumströmung. Durch eine lineare Streckung der bezogenen Geschwindigkeiten für Luft-Wasser-Gemische mit Eigenschaftsparametern, die die Dichte und die Oberflächenspannung berücksichtigen, haben Govier und Aziz (1972) und Mandhane et al. (1974) ihre Strömungskarten auf andere Gas-Flüssigkeitsgemische verallgemeinert. Dazu führen sie die Dichteverhältnisse zwischen Gas und Luft ρ_G/ρ_{Luft}, Flüssigkeit und Wasser ρ_L/ρ_{Wasser} und das Verhältnis der Oberflächenspannungen $\sigma/\sigma_{Luft/Wasser}$ für das andersartige Gemisch und von Luft und Wasser ein. Sie definieren:

$$Y = \left(\frac{\rho_L}{\rho_{Wasser}} \cdot \frac{\sigma_{Luft/Wasser}}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{und} \quad X = \left(\frac{\rho_G}{\rho_{Luft}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot Y \,.$$

Als modifizierte bezogene Geschwindigkeiten für das andersartige Gemisch setzen sie $U_G^* = X \cdot U_{Luft}$ und $U_L^* = Y \cdot U_{Wasser}$ an. Entsprechend verschieben sich die Grenzen der Strömungsbereiche. Taitel und Dukler (1976) und Taitel (1990) leiten Strömungskarten aus theoretischen Überlegungen ab. Sie unterscheiden dabei drei Strömungsgruppen, geschichtete Strömungen in glatter oder welliger Form, intermittierende Strömungen in Form der *Schwall- und Pfropfenströmungen* und disperse Strömungen in Gestalt der *Blasen- oder Ring-Tröpfchenströmung*. Eine Bedingung für den Übergang von geschichteter zu intermittierender Strömung leiten sie aus der Instabilitätsbedingung für eine Solitonwelle her. Die Grenzkurve wird durch eine modifizierte Froude-Zahl

$$F = \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L - \rho_G}} \cdot \frac{U_G}{\sqrt{D \cdot g \cdot \cos(\beta)}}$$

als Funktion des in Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik definierten und in Beziehung Gl. (9.13) interpretierten Martinelli-Parameters X dargestellt. Dabei ist β der Neigungswinkel des Rohres, g die Gravitation und D der Rohrdurchmesser. Der Übergang von glatt zu wellig geschichteter Strömung wird durch die *Kelvin-Helmholtz-Instabilitätsbedingung* (siehe Abschn. 5) bestimmt. Sie lässt sich nach einigen vereinfachenden Annahmen in die Form

$$K = \frac{U_G}{\sqrt{D \cdot g \cdot \cos(\beta)}} \cdot \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L - \rho_G}} \cdot \sqrt{\frac{U_L \cdot D}{\nu_L}} \gtrsim 20 \cdot \sqrt{\varepsilon_L} \cdot \varepsilon_G$$

bringen. ν_L ist die kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit. Für die Volumenanteile lässt sich ein eindeutiger Zusammenhang zum Martinelli-Parameter herstellen, so dass die Grenzkurve in der Form $K(X)$ angegeben werden kann.

Der Übergang von der Ringströmung zur intermittierenden Strömung in nicht zu stark geneigten Rohren ist durch den minimal möglichen Flüssigkeitsanteil in einem mit Gasblasen durchsetzten Schwall bestimmt. Intermittierende Schwallströmung

setzt nach Taitel und Dukler (1976) für $\varepsilon_L \gtrsim 0.24$ ein. Dies entspricht etwa dem Wert $X \approx 1.6$ des Martinelli-Parameters. Der Zustand der dispersen Blasenströmung und der intermittierenden Strömung wird durch turbulente Agitation, durch die Schwerkraft und durch Aufbrechen und Koaleszenz der Blasen bewirkt. Die Turbulenzintensität in der flüssigen Phase wird im Wesentlichen durch den Druckabfall in der flüssigen Phase bestimmt. Taitel und Dukler (1976) führen das Verhältnis von bezogenem Druckabfall der flüssigen Phase und hydrostatischem Auftrieb der Blasen als Kennzahl in der Form

$$T^2 = \left| \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} \right) \right|_L \cdot \frac{1}{(\rho_L - \rho_G) \cdot g \cdot \cos(\beta)}$$

ein. Der Übergang zwischen den beiden Bereichen lässt sich dann als Funktion T des Martinelli-Parameters X darstellen. Die Strömungskarte nach Taitel und Dukler (1976) hat nach Auswertung der funktionalen Zusammenhänge die in der Abb. 9.4 dargestellte Form, wobei jede der Grenzkurven $K(X)$, $F(X)$ und $T(X)$ individuell einer Ordinate zugewiesen ist.

Taitel (1990) hat die Theorie der Strömungsbereichsgrenzen so verallgemeinert, dass Zweiphasenströmungen in Rohren mit beliebigem Neigungswinkel klassifiziert werden können. Die Übergangsbedingungen sind dabei entweder graphisch dargestellt oder können mit Hilfe eines Rechenprogramms jeweils punktweise ermittelt werden.

Die unterschiedlichen Zustandsgrößen und Veränderlichen der Zweiphasenströmung sowie deren Ableitungen, wie etwa der Druckgradient, der Volumenanteil, der Wärmeübertragungskoeffizient hängen maßgeblich von der Strömungsform ab. Es wird daher vielfach bei eindimensionalen und quasi-stationären Vorgängen angestrebt, Berechnungsverfahren für Zweiphasenströmungen individuell für die charakteristischen Strömungsmuster zu entwickeln. Dies ist eine komplexe und

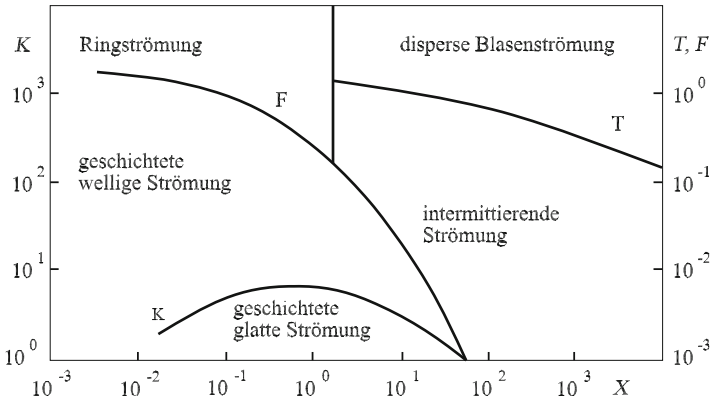


Abb. 9.4 Strömungskarte für horizontale und leicht geneigte Rohre mit den Kennzahlen K, F und T als Funktion des Martinelli-Parameters X nach Taitel und Dukler (1976)

umfangreiche Aufgabe. Die unterschiedlichen Berechnungsmodelle sind dann über Strömungskarten oder computergestützte Übergangsbedingungen miteinander zu verknüpfen, um für technische Systeme, etwa für Dampferzeuger die zweiphasigen Zustände hinreichend genau zu bestimmen. Die bereichsbezogene Berechnung von Zweiphasenströmungen ist bis heute nicht zufrieden stellend gelöst. Deshalb werden derzeit noch für bestimmte technisch relevante Größen wie Druckabfall und Wärmeströme Korrelationen benutzt, die auf der Basis umfangreicher experimenteller Daten hergeleitet wurden. Diese Zweiphasen-Gesetzmäßigkeiten werden in nachfolgenden Abschnitten angesprochen.

2 Strömungsmodelle

Für einfache Modellentwicklungen ist es vielfach zweckmäßig, die Zweiphasenströmungen nach der Vorstellung von Taitel und Dukler (1976) in drei Klassen einzuteilen: die *separaten Strömungen* wie Schichten-, Wellen- und Ringströmungen, die intermittierenden oder *Übergangsströmungen* in Form der elongierten Blasenströmungen, der Schwall- und Pfropfenströmungen und die *dispersen Strömungen* wie Blasen-, Schaum- und Tröpfchen- bzw. Nebelströmungen. Überwiegend wird zur Beschreibung der Zweiphasenströmung die mechanische Verknüpfung der Zustandsgrößen Geschwindigkeit, Druck und Temperatur in einer Eulerschen Form der Erhaltungsgleichung für Masse, Impuls und Energie vorgenommen. Im allgemeinen Fall erfolgt die Bilanzierung für jede Phase einzeln. Man spricht bei einer zweiphasigen Strömung dann auch von einem Zwei-Fluid-Modell. Diese Vorstellung kann grundsätzlich auch zur Beschreibung einer Strömung mit N-Fluiden angewandt werden und führt zu einem N-Fluid Modell. Dieses wurde bereits in allgemeiner Form in Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik dargestellt. Hier wird speziell die eindimensionale Form des Zwei-Fluid-Modells diskutiert.

2.1 Das eindimensionale Zwei-Fluid-Modell

Die formale Herleitung des eindimensionalen Zwei-Fluid-Modells erfolgt vereinfacht in heuristischer Weise mit Hilfe der Vorstellung einer Schichtenströmung im Rohr, wie sie in Abb. 9.1 (Abschn. 1) bereits dargestellt wurde, hier aber noch einmal vereinfacht in Abb. 9.5 wiederholt wird, um einige spezifische Größen zu erklären.

Bei der Herleitung der eindimensionalen Zwei-Fluid-Gleichungen aus den allgemeinen Grundgleichungen für Mehrphasenströmungen werden einige grundlegende Annahmen im Zusammenhang mit der räumlichen, hier querschnittsbezogenen und zeitlichen Mittelung gemacht.

Bei der räumlichen oder zeitlichen Mittelung eines Produktes von Zustandsgrößen f und g gilt im Allgemeinen $\langle f \cdot g \rangle = c \cdot \langle f \rangle \cdot \langle g \rangle$ oder $\overline{f \cdot g}^{\Delta t} = c \cdot \overline{f}^{\Delta t} \cdot \overline{g}^{\Delta t}$.

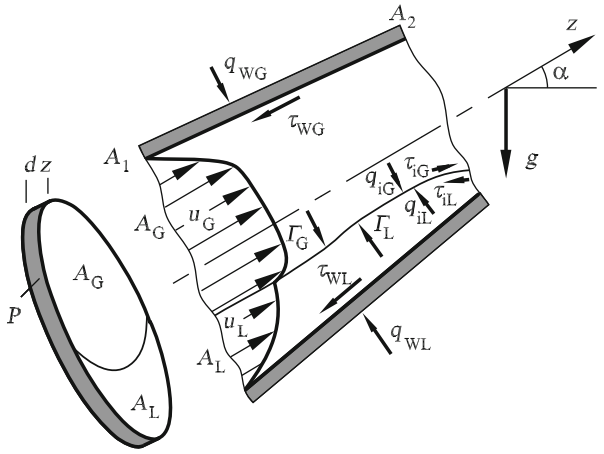


Abb. 9.5 Kontrollraum für eine separate Zweiphasenströmung mit Bezeichnungen

In der einfachsten Darstellung des eindimensionalen Zwei-Fluid-Modells wird $c = 1$ gesetzt.

Die thermodynamischen Zustandsgleichungen und die konstitutiven Gleichungen für lokale Größen gelten auch für die gemittelten Größen.

Die Wärmeleitung und die Änderung der Schubspannungen in Strömungsrichtung sowie die Dissipationsleistung der Reibungskräfte in den jeweiligen Phasen werden vernachlässigt.

Es wird lokales thermodynamisches Gleichgewicht in jeder Phase angenommen. Gegeneinander können die Phasen im thermodynamischem Nichtgleichgewicht sein.

In vertikaler Zweiphasenströmung wird der Druck über den Querschnitt des Rohres als konstant angenommen. In vielen Anwendungsfällen gilt dies auch noch in guter Näherung für horizontale Strömungen.

Die Wirkung der Zwischenflächenspannungen kann zunächst vernachlässigt werden. Sie tritt aber in einer allgemeinen Formulierung (vergl. Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik) oder bei der Einführung konstitutiver Gleichungen zur Schließung der Modellgleichungen wieder in Erscheinung.

Zur Darstellung der eindimensionalen Erhaltungsgleichungen werden folgende Bezeichnungen für die gemittelten Größen benutzt:

Geometrie:	$A_\mathrm{G}, A_\mathrm{L}, A$	Flächenquerschnitt mit $A_\mathrm{G} + A_\mathrm{L} = A$,
	$P_\mathrm{G}, P_\mathrm{L}, P$	Umfangsabschnitte mit $P_\mathrm{G} + P_\mathrm{L} = P$,
	$P_{\mathrm{G}i}, P_{\mathrm{L}i}, P_i$	Umfangsabschnitte auf den Grenzflächen,
	$\varepsilon_\mathrm{G} = A_\mathrm{G}/A$,	
	$\varepsilon_\mathrm{L} = A_\mathrm{L}/A$	Querschnittsanteile mit $\varepsilon_\mathrm{G} + \varepsilon_\mathrm{L} = 1$,

Zustandsvariable:	u_G, u_L	Geschwindigkeiten,
	p_G, p_L	Drücke,
	ρ_G, ρ_L	Dichten,
	$\dot{m}_\mathrm{G} = \rho_\mathrm{G} \cdot u_\mathrm{G}$,	
	$\dot{m}_\mathrm{L} = \rho_\mathrm{L} \cdot u_\mathrm{L}$	Massenstromdichte,
	e_G, e_L	spez. innere Energie,
	h_G, h_L	spez. Enthalpie,
Konstitutive Variable:	$\tau_{\mathrm{w,G}}$, $\tau_{\mathrm{w,L}}$	Wandschubspannung,
	$q_{\mathrm{w,G}}$, $q_{\mathrm{w,L}}$	Wandwärmestromdichte,
	$\tau_{i,\mathrm{G}}$, $\tau_{i,\mathrm{L}}$	Schubspannungen an der Phasengrenzfläche,
	$q_{i,\mathrm{G}}$, $q_{i,\mathrm{L}}$	Wärmestromdichten an der Phasengrenzfläche,
	Γ_G, Γ_L	Massenquelldichten an der Phasengrenzfläche,
	u_i	Geschwindigkeit an der Phasengrenzfläche,
	p_i	Druck an der Phasengrenzfläche,
bei Phasenübergängen:	$M_\mathrm{G}^{(\Gamma_\mathrm{G})}$, $M_\mathrm{L}^{(\Gamma_\mathrm{L})}$	Impulsquellterm durch Massenaustausch an der Phasengrenzfläche,
	$L_{\tau,\mathrm{G}}$, $L_{\tau,\mathrm{L}}$	Leistungsquelldichten durch Schubspannungen an Grenzflächen und Wänden,
	$L_\mathrm{G}^{(\Gamma_\mathrm{G})}$, $L_\mathrm{L}^{(\Gamma_\mathrm{L})}$	Leistungsquelldichten durch Massenaustausch an der Grenzfläche,
	Lg, L_q	Leistungsquelldichten durch Schwerkraft und Wärmezufuhr.

Aufgrund des lokalen Gleichgewichts gelten die folgenden Beziehungen zwischen den konstitutiven Variablen an der Grenzfläche:

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mathrm{G} - \Gamma_\mathrm{L} &= 0\,, \\
\tau_{i,\mathrm{G}} - \tau_{i,\mathrm{L}} &= 0\,, \\
q_{i,\mathrm{G}} - q_{i,\mathrm{L}} &= 0\,, \\
M_\mathrm{G}^{(\Gamma_\mathrm{G})} - M_\mathrm{L}^{(\Gamma_\mathrm{L})} &= 0\,, \\
L_\mathrm{G}^{(\Gamma_\mathrm{G})} - L_\mathrm{L}^{(\Gamma_\mathrm{L})} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Die Impulsquelldichten $M_\mathrm{G}^{(\Gamma_\mathrm{G})}$ und $M_\mathrm{L}^{(\Gamma_\mathrm{L})}$ sowie die Leistungsdichten können noch weiter spezifiziert werden (vgl. dazu Ishii (1975), Ishii und Hibiki (2006) und

Delhaye et al. (1981)). Diejenigen Anteile der Größen, die auf einem Massenaustausch beruhen summieren sich zu Null, wie oben bereits angegeben. Wenn jedoch Oberflächenspannungen eine Rolle spielen, treten in den Impuls- und Energie-Erhaltungsgleichungen für die jeweiligen Phasen noch weitere Terme auf, welche die Oberflächenspannungen berücksichtigen. Hier sollen Oberflächenspannungseffekte der Einfachheit halber nicht berücksichtigt werden. Unter den hier getroffenen Annahmen lassen sich die eindimensionalen Erhaltungsgleichungen für das Zwei-Fluid-Modell in der folgenden Form schreiben:

Masse:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\mathrm{G}} \cdot \varepsilon \cdot A) + \frac{\partial}{\partial z}(\dot{m}_{\mathrm{G}} \cdot \varepsilon \cdot A) = \Gamma_{\mathrm{G}}\,, \tag{9.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_{\mathrm{L}} \cdot (1-\varepsilon) \cdot A] + \frac{\partial}{\partial z}[\dot{m}_{\mathrm{L}} \cdot (1-\varepsilon) \cdot A] = \Gamma_{\mathrm{L}}\,, \tag{9.15}$$

Impuls:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\dot{m}_{\mathrm{G}} \cdot \varepsilon \cdot A) + \frac{\partial}{\partial z}(\dot{m}_{\mathrm{G}} \cdot u_{\mathrm{G}} \cdot \varepsilon \cdot A) = \\
&-\varepsilon \cdot A \cdot \frac{\partial}{\partial z} p_{\mathrm{G}} - \tau_{\mathrm{w,G}} \cdot P_{\mathrm{G}} - \tau_{i,\mathrm{G}} \cdot P_i - \varepsilon \cdot A \cdot \rho_{\mathrm{G}} \cdot g \cdot \sin(\alpha) + M_{\mathrm{G}}^{(\Gamma_{\mathrm{G}})}\,,
\end{aligned} \tag{9.16}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}[\dot{m}_{\mathrm{L}} \cdot (1-\varepsilon) \cdot A] + \frac{\partial}{\partial z}[\dot{m}_{\mathrm{L}} \cdot (1-\varepsilon) \cdot A \cdot u_{\mathrm{L}}] = \\
&-(1-\varepsilon) \cdot A \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot p_{\mathrm{L}} - \tau_{\mathrm{w,L}} \cdot P_{\mathrm{L}} - \tau_{i,\mathrm{L}} \cdot P_i - (1-\varepsilon) \cdot A \cdot \rho_{\mathrm{L}} \cdot g \cdot \sin(\alpha) + M_{\mathrm{L}}^{(\Gamma_{\mathrm{L}})}.
\end{aligned} \tag{9.17}$$

Dabei wurde $\varepsilon_{\mathrm{G}} = \varepsilon$ gesetzt. Hier kann man die Annahme $p_{\mathrm{L}} = p_{\mathrm{G}} = p$ einführen.

Energie:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\mathrm{G}} \cdot E_{\mathrm{G}} \cdot \varepsilon \cdot A) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\dot{m}_{\mathrm{G}} \cdot \left(h_{\mathrm{G}} + \frac{u_{\mathrm{G}}^2}{2}\right) \cdot \varepsilon \cdot A\right] = \\
&\qquad L_{\tau,\mathrm{G}} + L_{g,\mathrm{G}} + L_{\mathrm{G}}^{(\Gamma_{\mathrm{G}})} + L_{q,\mathrm{G}}\,.
\end{aligned} \tag{9.18}$$

Hier ist $E_{\mathrm{G}} = e_{\mathrm{G}} + u_{\mathrm{G}}^2/2$ die Energiedichte, h_{G} die spezifische Enthalpie der Gase und auf der rechten Seite der Gleichung sind ohne nähere Spezifizierung die Leistungsanteile der Schubspannung, der Schwerkraft, des Impulsaustausches durch Massenaustausch zwischen den Phasen und der Wärmeströme aufgeführt. Entsprechend ergibt sich für die flüssige Phase:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\mathrm{L}} \cdot E_{\mathrm{L}} \cdot (1-\varepsilon) \cdot A) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\dot{m}_{\mathrm{L}} \cdot \left(h_{\mathrm{L}} + \frac{u_{\mathrm{L}}^2}{2}\right) \cdot (1-\varepsilon) \cdot A\right] = \\
&\qquad L_{\tau,\mathrm{L}} + L_{g,\mathrm{L}} + L_{\mathrm{L}}^{(\Gamma_{\mathrm{L}})} + L_{q,\mathrm{L}}\,.
\end{aligned} \tag{9.19}$$

Die Gleichungen enthalten für den einfachsten Fall einer inkompressiblen Strömung die 6 Zustandsvariablen u_{G}, u_{L}, e_{G}, e_{L}, p, ε. Hinzu kommen eine große Anzahl konstitutiver Variabler, die sich bei detaillierter Herleitung der Impuls- und Energiegleichungen auf die folgenden unabhängigen Variablen Γ, $(\tau_{\mathrm{w,G}} \cdot P_{\mathrm{G}})$, $(\tau_{\mathrm{w,L}} \cdot P_{\mathrm{L}})$, $(\tau_{i,\mathrm{G}} \cdot P_{i,\mathrm{G}})$, $(q_{\mathrm{w,G}} \cdot P_{\mathrm{G}})$, $(q_{\mathrm{w,L}} \cdot P_{\mathrm{L}})$, $(q_{i,\mathrm{L}} \cdot P_{i,\mathrm{L}})$ reduzieren lassen (siehe Yadigaroglou und Lahey (1976)). Für die konstitutiven Variablen müssen Korrelationen zu den Zustandsgrößen auf der Basis experimenteller Befunde oder theoretischer Überlegungen hergestellt werden, um die Erhaltungsgleichungen zu schließen und sie für die Lösung von Zweiphasenströmungsproblemen anzuwenden. Die Modellkorrelationen für die konstitutiven Variablen sind dabei jeweils für spezielle Strömungsbereiche zu entwickeln. Solche Korrelationen sind von Ishii und Mishima (1984) und in noch allgemeinerer Form von Ishii und Hibiki (2006) angegeben worden.

2.2 Mischungsmodelle

Das Zwei-Fluid-Modell kann vereinfacht werden, wenn man aus technischen Gründen nur an den integralen Zuständen der Zweiphasenströmung wie Gesamtmassenstrom, Gesamtdruckabfall und Gesamtwärmetransport interessiert ist. Durch eine Addition von je zwei Erhaltungsgleichungen für die Einzelphasen erhält man dann drei Erhaltungsgleichungen für die Gesamtmasse, den Gesamtimpuls und die Gesamtenergie des Zweiphasengemisches. Diese Gleichungen lassen sich in einer Form darstellen, die der Form der eindimensionalen strömungsmechanischen Grundgleichungen für kompressible Medien entsprechen, wenn man die Dichten, die Wandschubspannung und den Wandwärmestrom in den Gemischgleichungen als gewichtete Größen einführt. Unter Verwendung der allgemeinen Definitionen aus Abschn. 1 und mit einfachen algebraischen Umformungen erhält man für das Zweiphasengemisch folgende drei Erhaltungsgleichungen:

Masse:

$$\frac{\partial \rho_H}{\partial t} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \dot{M}}{\partial z} = 0\,, \tag{9.20}$$

mit

$$\rho_H = \varepsilon \cdot \rho_{\mathrm{G}} + (1-\varepsilon) \cdot \rho_{\mathrm{L}}\,, \tag{9.21}$$

Impuls:

$$\frac{\partial}{\partial t}\dot{M} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{I}}} \cdot \frac{\dot{M}^2}{A}\right) = -A \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \langle \tau_{\mathrm{w}} \rangle \cdot P - A \cdot \rho_H \cdot g \cdot \sin(\alpha)\,, \tag{9.22}$$

mit $\chi_{\mathrm{G}} = \chi$ und

$$\frac{1}{\rho_I} = \frac{\chi^2}{\varepsilon \cdot \rho_{\mathrm{G}}} + \frac{(1-\chi)^2}{(1-\varepsilon) \cdot \rho_{\mathrm{L}}}\,, \qquad \langle \tau_{\mathrm{w}} \rangle = \tau_{\mathrm{w,G}} \cdot P_{\mathrm{G}} + \tau_{\mathrm{w,L}} \cdot P_{\mathrm{L}}\,, \tag{9.23}$$

Energie:

$$\frac{\partial}{\partial t}E + \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\dot{M}\left(h + \frac{1}{\rho_E^2}\cdot\frac{\dot{M}^2}{2\cdot A^2}\right)\right] = L_{\tau,\mathrm{w}} + L_{\mathrm{G}} + L_{q,\mathrm{w}}\,, \qquad (9.24)$$

mit der Gesamtenergie $E = \rho_{\mathrm{G}}\cdot E_{\mathrm{G}} + \rho_{\mathrm{L}}\cdot E_{\mathrm{L}}$, der Gesamtenthalpie:

$$h = \chi\cdot h_{\mathrm{G}} + (1-\chi)\cdot h_{\mathrm{L}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\rho_E^2} = \frac{\chi^3}{\varepsilon^2\cdot\rho_{\mathrm{G}}^2} + \frac{(1-\chi)^3}{(1-\varepsilon)^2\cdot\rho_{\mathrm{L}}^2}\,. \qquad (9.25)$$

Es ist zu erkennen, dass die Dichten der Einzelphasen in den verschiedenen Erhaltungsgleichungen unterschiedlich gewichtet werden und somit unterschiedliche Wirkungen im Vergleich zu einphasigen Strömungen haben. Man kann die Gemischgleichungen zur Definition von Gemischdichten benutzen, die bisweilen bei der Signalauswertung einer Zweiphasen-Instrumentierung verwendet werden. Die Definitionen sind im Folgenden aufgeführt:

Definitionen der Gemischdichten basierend auf Gemischbilanzen		
Masse:	$\rho_{\mathrm{H}} = \varepsilon\cdot\rho_{\mathrm{G}} + (1-\varepsilon)\cdot\rho_{\mathrm{L}}$	homogene Dichte
Impuls:	$\rho_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\chi^2}{\varepsilon\cdot\rho_{\mathrm{G}}} + \frac{(1-\chi)^2}{(1-\varepsilon)\cdot\rho_{\mathrm{L}}}\right)^{-1}$	Impuls-Dichte
Energie:	$\rho_{\mathrm{E}} = \left(\frac{\chi^3}{\varepsilon^2\cdot\rho_{\mathrm{G}}^2} + \frac{(1-\chi)^3}{(1-\varepsilon)^2\cdot\rho_{\mathrm{L}}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$	Energie-Dichte

Obwohl das Modell für die Gemischströmung sich durch die Reduktion der Gleichungen vereinfacht hat, ergibt sich jetzt das neue Problem, dass der Volumenanteil ε mit dem Dampfgehalt χ durch eine empirische Beziehung korreliert werden muss, um das vereinfachte Modell für Problemlösungen einsetzen zu können. Im Allgemeinen ist ε mit χ über das Geschwindigkeitsverhältnis $S = u_{\mathrm{G}}/u_{\mathrm{L}}$ der Phasen miteinander verknüpft (vgl. Gl. (9.9)). Deshalb werden bisweilen auch für das Geschwindigkeitsverhältnis S empirische Verknüpfungen ermittelt und die $\varepsilon(S,\chi)$-Beziehung in die Gemischgleichungen eingesetzt.

Die Gemischgleichungen sind naturgemäß für Anwendungsrechnungen geeignet, wenn disperse Strömungsformen wie Blasen- oder Tröpfchenströmungen vorliegen. Sie können noch weiter vereinfacht werden, wenn man mechanisches Gleichgewicht zwischen den Phasen voraussetzt, d. h. wenn jeweils die disperse Phase die gleiche Geschwindigkeit wie die homogene Phase besitzt. Man nennt das so vereinfachte Gemischmodell auch *homogenes Strömungsmodell*. Es besitzt wegen seiner Einfachheit besondere Bedeutung und kann auf disperse Strömungen mit sehr kleinen Volumenanteilen der dispersen Phase mit Erfolg angewendet werden. Mit der Annahme $S = 1$ ergibt sich eine eindeutige Beziehung zwischen ε und χ nach Gl. (9.9). Sie lautet:

$$\varepsilon_H = \frac{1}{1 + \frac{1-\chi}{\chi}\cdot\frac{\rho_{\mathrm{G}}}{\rho_{\mathrm{L}}}}\,. \qquad (9.26)$$

Der Index H deutet auf das *homogene Modell* hin. Mit dieser Beziehung reduzieren sich alle übrigen Dichtedefinitionen ρ_I und ρ_E nach kurzer algebraischer Rechnung auf den Ausdruck $\rho_H = \varepsilon \cdot \rho_\mathrm{G} + (1-\varepsilon) \cdot \rho_\mathrm{L}$ in der Mischungsbilanz, d. h. auf $\rho_H = \rho_I = \rho_E$. Das eindimensionale *homogene Strömungsmodell* wird daher durch die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_H + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \dot{M}}{\partial z} = 0\,, \tag{9.27}$$

$$\frac{\partial \dot{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_H} \cdot \frac{\dot{M}^2}{A}\right) = -A \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \overline{\tau}_\mathrm{w} \cdot P - A \cdot \rho_H \cdot g \cdot \sin(\alpha) \tag{9.28}$$

dargestellt, wenn sich die Phasen im thermodynamischen Gleichgewicht befinden, also $T_\mathrm{G} = T_\mathrm{L}$ gilt. Das homogene Modell ist das einfachste aller Zweiphasen-Strömungsmodelle. Es kann durchaus auf thermisch nicht im Gleichgewicht befindliche disperse Strömungen mit Verdampfungs- und Kondensationsvorgängen erweitert werden.

Mechanisches Gleichgewicht ist bei dispersen Zweiphasenströmungen mit größeren Anteilen der dispersen Phase im Allgemeinen nicht gegeben. Um diesem Sachverhalt Rechnung zu tragen und dennoch die Vorstellung einer guten Vermischung der Phasen zur Vereinfachung zu nutzen ist das Driftströmungsmodell entwickelt worden. Es wird nachfolgend beschrieben.

2.3 Das Driftströmungsmodell

Das Driftströmungsmodell wurde von Zuber und Findlay (1965) vorgeschlagen und beruht auf der Grundvorstellung, dass beide Phasen gut miteinander vermischt sind, aber sich relativ zueinander bewegen und im Allgemeinen unterschiedliche thermodynamische Zustände haben. Der Anwendungsbereich des Modells liegt daher in erster Linie bei dispersen Strömungen, also Blasen-, Schaum- und Tröpfchenströmungen. Es gibt aber auch Versuche, das Modell auf Pfropfen- und Ringströmungen zu erweitern. Das Modell basiert auf einer *dichtegewichteten Gemischgeschwindigkeit*

$$u_\mathrm{M} = \frac{\varepsilon \cdot \rho_\mathrm{G} \cdot u_\mathrm{G} + (1-\varepsilon) \cdot \rho_\mathrm{L} \cdot u_\mathrm{L}}{\varepsilon \rho_\mathrm{G} + (1-\varepsilon) \cdot \rho_\mathrm{L}} \tag{9.29}$$

und berücksichtigt die Relativgeschwindigkeiten durch so genannte Driftgeschwindigkeiten, die zunächst lokal wie folgt eingeführt werden:

$$u_{\mathrm{G,U}}^{(\mathrm{l})} = u_\mathrm{G}^{(\mathrm{l})} - U^{(\mathrm{l})}\,, \tag{9.30}$$

$$u_{\mathrm{L,U}}^{(\mathrm{l})} = u_\mathrm{L}^{(\mathrm{l})} - U^{(\mathrm{l})}\,, \tag{9.31}$$

dabei ist $U^{(\mathrm{l})}$ die lokale Gesamtvolumenstromdichte, dargestellt durch die bezogenen lokalen Geschwindigkeiten $U^{(\mathrm{l})} = U_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{l})} + U_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{l})}$. Aus diesen Definitionen lassen sich durch Querschnittsmittelung die Mittelwerte von Volumenanteil $\langle\varepsilon\rangle$, bezogenem Gesamtvolumenstrom $\langle U\rangle$ und einer noch zu definierenden mittleren Driftgeschwindigkeit miteinander verknüpfen. Dies geschieht durch Multiplikation der Beziehung Gl. (9.30) mit dem lokalen Volumenanteil ε und nachfolgender Querschnittsmittelung. Dabei ist zu beachten, dass wie in Abschn. 1 ausgeführt, allgemein $\langle\varepsilon \cdot U\rangle = C_0 \cdot \langle\varepsilon\rangle \cdot \langle U\rangle$ gilt. Nach algebraischer Umformungen erhält man zunächst die Beziehung:

$$\langle\varepsilon \cdot u_{\mathrm{G,U}}\rangle = \langle\varepsilon \cdot u_{\mathrm{G}}\rangle - C_0 \cdot \langle\varepsilon\rangle \cdot \langle U\rangle\,. \tag{9.32}$$

Mit den Definitionen $\overline{u}_{\mathrm{G,U}} = \langle\varepsilon{\cdot}u_{\mathrm{G,U}}\rangle/\langle\varepsilon\rangle$ und $U_{\mathrm{G}} = \langle\varepsilon{\cdot}u_{\mathrm{G}}\rangle$ als querschnittsgewichtete Drift- und gemittelte bezogene Gasgeschwindigkeit ergibt sich aus Gl. (9.32) für den querschnittsgemittelten Gasvolumenanteil

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{U_{\mathrm{G}}}{C_0 \cdot U + \overline{u}_{\mathrm{G,U}}}\,. \tag{9.33}$$

Zur Definition einer mittleren Driftgeschwindigkeit werden jetzt die volumengewichteten Größen $\overline{u}_{\mathrm{G,U}}$ und $\overline{u}_{\mathrm{G}} = \langle\varepsilon{\cdot}u_{\mathrm{G}}\rangle/\langle\varepsilon\rangle$ eingeführt. Für die Darstellung in den Erhaltungsgleichungen werden die Beziehungen

$$\overline{u}_{\mathrm{G,U}} = \overline{u}_{\mathrm{G}} - U\,, \qquad \overline{u}_{\mathrm{L,U}} = \overline{u}_{\mathrm{L}} - U \tag{9.34}$$

benutzt. Zur Vereinfachung der Schreibweise entfallen im Folgenden wieder die Mittelungssymbole. Die Driftgeschwindigkeit kann somit als Geschwindigkeit der Phase relativ zu einer mit der Mischungsgeschwindigkeit U bewegten Fläche verstanden werden. Mit der Beziehung für die Gemischgeschwindigkeit $U = \varepsilon{\cdot}u_{\mathrm{G}} + (1-\varepsilon){\cdot}u_{\mathrm{L}}$ kann unmittelbar der Bezug von Drift- und Relativgeschwindigkeit der Phasen zueinander hergestellt werden. Es ist

$$u_{\mathrm{G,U}} = (1-\varepsilon)\cdot(u_{\mathrm{G}} - u_{\mathrm{L}})\,, \qquad u_{\mathrm{L,U}} = -\varepsilon\cdot(u_{\mathrm{G}} - u_{\mathrm{L}}). \tag{9.35}$$

Aus dieser Beziehung und der Definitionsgleichung (9.29) folgt ein Zusammenhang zwischen u_{G}, u_{M} und $u_{\mathrm{G,U}}$ in der Form:

$$u_{\mathrm{G}} = u_{\mathrm{M}} + \frac{\rho_{\mathrm{L}}}{\rho_{\mathrm{H}}}\cdot u_{\mathrm{G,U}}\,, \qquad u_{\mathrm{L}} = u_{\mathrm{M}} - \frac{\rho_{\mathrm{L}}}{\rho_{\mathrm{H}}}\cdot\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot u_{\mathrm{G,U}}\,. \tag{9.36}$$

Entsprechende Beziehungen verknüpfen u_{G} und u_{L} mit u_{M} und $u_{\mathrm{L,U}}$.

Werden die Ausdrücke Gl. (9.36) in die Erhaltungsgleichung für die Mischungen eingesetzt und wird ferner die Erhaltungsgleichung für die Gasphase zur Beschreibung von Phasenübergängen beibehalten, so ergeben sich nach einigen algebraischen Umformungen vier Erhaltungsgleichungen für die Zustandsgrößen mittlere Geschwindigkeit u_{M}, Druck p, mittlere Enthalpie h_{M} und Volumenanteil ε.

Die Gleichungen haben die Form:
Masse:

$$\frac{\partial}{\partial t}\cdot\rho_{\mathrm{H}}+\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\rho_{\mathrm{H}}\cdot u_{\mathrm{M}}\cdot A)=0\,, \tag{9.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\cdot\rho_{\mathrm{G}})+\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon\cdot A\cdot\rho_{\mathrm{G}}\cdot u_{\mathrm{M}})+\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon\cdot A\cdot\frac{\rho_{\mathrm{G}}\cdot\rho_{\mathrm{L}}}{\rho_{\mathrm{H}}}\cdot u_{\mathrm{G,U}})=\frac{\Gamma_{\mathrm{G}}}{A}\,, \tag{9.38}$$

Impuls:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\mathrm{H}}\cdot u_{\mathrm{M}})+\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(A\cdot\rho_{\mathrm{H}}\cdot u_{\mathrm{M}}^2)+\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(A\cdot\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\frac{\rho_{\mathrm{G}}\cdot\rho_{\mathrm{L}}}{\rho_{\mathrm{H}}}\cdot u_{\mathrm{G,U}}^2\right)= -\frac{\partial p}{\partial z}-\tau_{\mathrm{w}}\cdot\frac{P}{A}-\rho_{\mathrm{H}}\cdot g\cdot\sin(\alpha)\,. \tag{9.39}$$

Nach einigen weiteren Umformungen mit Hilfe der Impulserhaltungsgleichungen für die Einzelphasen folgt für die Energie:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\mathrm{H}}\cdot h_{\mathrm{M}})+\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(A\cdot\rho_{\mathrm{H}}\cdot h_{\mathrm{M}}\cdot u_{\mathrm{M}})=\frac{1}{A}\cdot(q_{\mathrm{w,G}}\cdot P_{\mathrm{G}}+q_{\mathrm{w,L}}\cdot P_{\mathrm{L}})+\frac{\partial p}{\partial t}+u_{\mathrm{M}}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} +u_{\mathrm{G,U}}\cdot\frac{\rho_{\mathrm{L}}-\rho_{\mathrm{G}}}{\rho_{\mathrm{H}}}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(A\cdot\frac{\varepsilon\cdot\rho_{\mathrm{L}}\cdot\rho_{\mathrm{G}}}{\rho_{\mathrm{H}}}\cdot u_{\mathrm{G,U}}\cdot\Delta h_{\mathrm{LG}}\right)+\frac{1}{A}\cdot L_{\mathrm{diss}}\,. \tag{9.40}$$

Hier ist h_{M} die mit der *Dichte gemittelte Enthalpie*. Sie ist definiert als:

$$h_{\mathrm{M}}=\frac{\varepsilon\cdot\rho_{\mathrm{G}}\cdot h_{\mathrm{G}}+(1-\varepsilon)\cdot\rho_{\mathrm{L}}\cdot h_{\mathrm{L}}}{\varepsilon\cdot\rho_{\mathrm{G}}+(1-\varepsilon)\cdot\rho_{\mathrm{L}}}\,. \tag{9.41}$$

Δh_{LG} ist die Verdampfungswärme bei Phasenübergängen. L_{diss} sind Leistungen durch Dissipation.

Eine erfolgreiche Anwendung des einfachen Driftströmungsmodells hängt wesentlich davon ab, ob für die Driftgeschwindigkeit $u_{\mathrm{G,U}}$ konstitutive Beziehungen entwickelt werden können (vergl. dazu Ishii (1977)).

2.4 Blasen und Tropfen

Die Bewegung von Blasen und Tropfen in einer bewegten Flüssigkeit bzw. einem Gas ist ein Grundelement für die Modellierung von Zweiphasenströmungen und zur Darstellung der Driftgeschwindigkeit. Es wurden zu dieser Frage umfangreiche Untersuchungen durchgeführt, die im Buch von Clift et al. (1978) ausführlich dargestellt sind. Heuristische Betrachtungen ergeben, dass die Relativgeschwindigkeit

von Blasen und Tropfen im Kontinuum von der Art der Wechselwirkung zwischen den Phasen, ihrer Wechselwirkung mit den Rändern und vom Einfluss der äußeren Feldkräfte, z. B. der Schwerkraft, abhängt. Dieser Sachverhalt lässt sich durch folgenden funktionalen Zusammenhang ausdrücken:

$$u_\tau = u_\mathrm{G} - u_\mathrm{L} = (\frac{\mu_\mathrm{G}}{\mu_\mathrm{L}}, \frac{\rho_\mathrm{G}}{\rho_\mathrm{L}}, \sigma, \varepsilon, \frac{\rho_\mathrm{L} - \rho_\mathrm{G}}{\rho_\mathrm{L}} \cdot g, \frac{D_\mathrm{B}}{d}) \,. \tag{9.42}$$

Hier sind μ_G und μ_L die Zähigkeiten von Gas und Flüssigkeit, ρ_G und ρ_L deren Dichten, σ die Oberflächenspannung, g die Erdbeschleunigung, D_B der Blasen- bzw. Tropfendurchmesser und d eine repräsentative Behälterabmessung.

Im Folgenden konzentrieren sich die Aussagen auf das Verhalten von Blasen. Mit gewissen Modifikationen gelten sie auch für Tropfen.

In quasi-stationären dispersen Zweiphasenströmungen kann die Wirkung von Beschleunigungskräften auf die Einzelblase häufig vernachlässigt werden. Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit u_∞ einer Einzelblase im Kontinuum Flüssigkeit wird dann durch das Kräftegleichgewicht von Widerstands- und Feldkraft bestimmt. Im Falle der Auftriebskraft gilt:

$$u_\infty^2 = \frac{4 \cdot (\rho_\mathrm{L} - \rho_\mathrm{G}) \cdot g}{3 \cdot \rho_\mathrm{L}} \cdot \frac{D_\mathrm{B}}{c_\mathrm{w}} \,. \tag{9.43}$$

Hier ist c_w der Widerstandsbeiwert in der Definition $c_\mathrm{w} = 2 \cdot W / (\rho_\mathrm{G} \cdot u_\infty^2 \cdot A)$ mit W als Widerstandskraft und A als Querschnittsfläche einer Kugel mit dem äquivalenten Volumen der Blase. Der äquivalente Blasenradius ergibt sich aus der Beziehung $D_\mathrm{B} = 2 \cdot (3 \cdot V_\mathrm{B} / (4 \cdot \pi))^{(1/3)}$ mit V_B als Blasenvolumen. Die Einführung des äquivalenten Blasenradius ermöglicht es, auch deformierte Blasen zu betrachten und ihnen einen Widerstandsbeiwert aus Messungen an einer einphasig umströmten festen Kugel zuzuordnen (siehe Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten). Die Verformung der Blasen unter dem Einfluss der Relativbewegung kann jedoch so groß sein, dass der Vergleich mit einer bewegten festen Kugel falsche Ergebnisse liefert. Deshalb ist in vielen Experimenten die Aufstiegsgeschwindigkeit von Einzelblasen im Schwerefeld gemessen worden, wobei insbesondere die Form der Blase als zusätzlicher Einfluss untersucht wurde. Clift et al. (1978) haben die Ergebnisse nach dimensionslosen Kennzahlen geordnet in einem Graphen dargestellt. Dabei führen sie folgende Blasenkennzahlen ein:

$$\begin{aligned}
Re_\mathrm{B} &= \frac{u_\infty \cdot D_\mathrm{B} \cdot \rho_\mathrm{L}}{\mu_\mathrm{L}} && Reynolds - Zahl \,, \\
Eö_\mathrm{B} &= \frac{g \cdot (\rho_\mathrm{L} - \rho_\mathrm{G}) \cdot D_\mathrm{B}^2}{\sigma} && Eötvös - Zahl \,, \\
Mo_\mathrm{B} &= \frac{g \cdot \mu_\mathrm{L}^4 \cdot (\rho_\mathrm{L} - \rho_\mathrm{G})}{\rho_\mathrm{L}^2 \cdot \sigma^3} && Morton - Zahl \,.
\end{aligned}$$

Hier beschreibt die Eötvös-Zahl die Wechselwirkung zwischen Schwere- und Kapillarkräften während die Morton-Zahl gewissermaßen Zähigkeits-, Kapillar- und Schwerkräfte verknüpft. Die Graphik ist in Abb. 9.6 dargestellt. Sie ermöglicht die

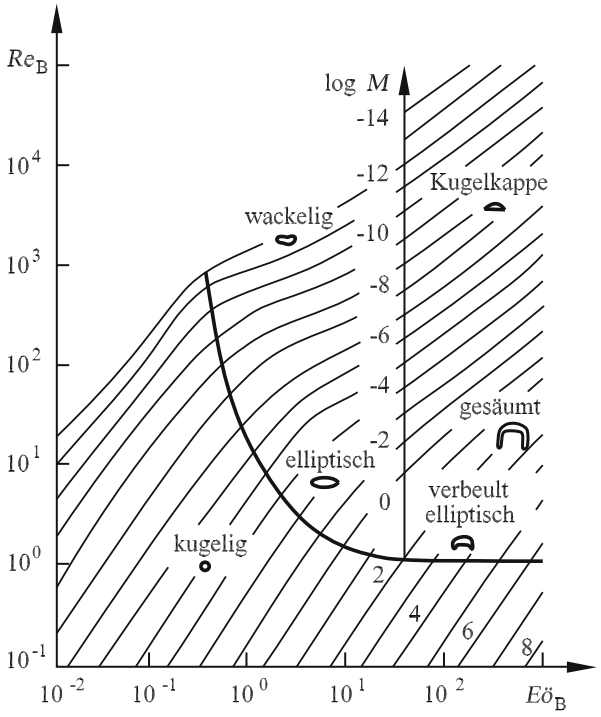


Abb. 9.6 Form von aufsteigenden Blasen in einer Flüssigkeit, Clift et al. (1978)

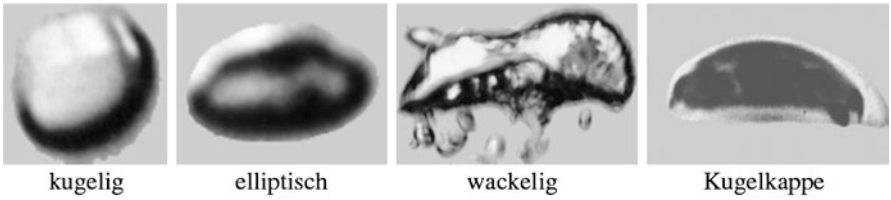


Abb. 9.7 Verschiedene beobachtete Blasenformen in Abhängigkeit vom Blasenvolumen und der Blasen-Reynolds-Zahl, siehe Abb. 9.6

Bestimmung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit u_∞ in Abhängigkeit von allen anderen in den Kennzahlen vorkommenden Einflussgrößen und gibt zusätzlich qualitativ Aufschluss über die Blasenform. Zur Veranschaulichung sind einige experimentell beobachtete Blasenformen in der Abb. 9.7 dargestellt.

Die Einflüsse von Berandungen und Nachbarblasen auf die Gleichgewichtsgeschwindigkeit u_B der Einzelblasen wird häufig durch Potenzreihenansätze nach den Einflussgrößen ε, $1-\varepsilon$, D_B/d in der Form

$$u_B = u_\infty \cdot \left(1 + \alpha \cdot \frac{D_B}{d}\right)^m \cdot (1-\varepsilon)^n \cdot \varepsilon^p \tag{9.44}$$

modelliert (siehe Collins (1967), Wallis (1969)), wobei die Parameter α, m, n und p aus Experimenten bestimmt werden. Collins (1967) korrigiert z. B. die Blasenaufstiegsgeschwindigkeit von Einzelblasen in einem vertikalen Rohr mit dem Durchmesser d in der Form

$$u_{\mathrm{B}} = u_{\infty} \cdot \left(1 + \alpha \cdot \frac{D_{\mathrm{B}}}{d}\right)^{-1},$$

mit $\alpha = 1.6$ für deformierte, bedingt durch geringe Grenzflächenspannung weich erscheinende Gasblasen und $\alpha = 2.4$ für kugelige harte Gasblasen unter dem Einfluss starker Grenzflächenspannungen.

Wallis (1969) gibt eine grundlegende Beziehung zur Darstellung der Driftgeschwindigkeit $u_{\mathrm{G,U}}$ als Funktion der Gleichgewichtsgeschwindigkeit und des Gasvolumenanteils in der Form

$$u_{\mathrm{G,U}} = u_{\infty} \cdot (1 - \varepsilon)^{n}$$

an. Er legt den Exponenten n mit Hilfe experimenteller Daten von Peebles und Garber (1953) für verschiedene Blasenformen und Blasen-Reynolds-Zahlen fest. Im Folgenden sind beispielhaft die Ergebnisse seiner Untersuchungen der Aufstiegsgeschwindigkeit für Einzelblasen aufgeführt:

u_{∞}	n	Gültigkeitsbereich	Blasenform
$\frac{D_{\mathrm{B}}^2 \cdot (\rho_{\mathrm{L}} - \rho_{\mathrm{G}}) \cdot g}{18 \cdot \mu_{\mathrm{L}}}$	2	$Re_{\mathrm{B}} < 2$	starre Kugelblase
$0.33 \cdot \frac{2 \cdot \nu_{\mathrm{L}}}{D_{\mathrm{B}}} \cdot \left(\frac{g \cdot D_{\mathrm{B}}^3}{8 \cdot \nu_{\mathrm{L}}^2}\right)^{0.76}$	1.75	$2 < Re_{\mathrm{B}} < 4.02 \cdot G_1^{-0.214}$	Kugelblase mit Innenströmung
$1.18 \cdot \left(\frac{g \cdot \sigma}{\rho_{\mathrm{L}}}\right)^{0.25}$	1.5	$3.10 \cdot G_1^{-0.25} < Re_{\mathrm{B}}, \quad 5.75 < G_2$	oszillierende elliptische Blase
$1.00 \cdot \sqrt{g \cdot D_{\mathrm{B}}}$	$0 < n < 1$	$\sqrt{\frac{g \cdot \rho_{\mathrm{L}} \cdot D_{\mathrm{B}}^2}{\sigma}} > 4$	Kappenblase

Dabei gilt für die Galileo-Zahl G_1:

$$G_1 = \frac{g \cdot \mu_{\mathrm{L}}^4}{\rho_{\mathrm{L}} \cdot \sigma^3} \tag{9.45}$$

und für G_2:

$$G_2 = \frac{1}{16} \cdot G_1 \cdot Re_B^4 = \frac{g \cdot u_\infty^4 \cdot \rho_L^4 \cdot D_B^4}{16 \cdot \sigma^3}.$$

Weitere Ausführungen dazu sind bei Clift et al. (1978) zu finden.

Mit der Darstellung der Driftgeschwindigkeit für verschiedene Blasenformen nach Wallis (1969) ist das Driftströmungsmodell für disperse Zweiphasenströmungen im Wesentlichen geschlossen.

Zuber und Findlay (1965) und Ishii (1977) haben versucht, das Driftströmungsmodell auch auf andere Strömungsformen wie Pfropfen-, Ring- und turbulente Schaumströmung anzuwenden. Man findet in ihren Arbeiten Angaben über die relevanten konstitutiven Parameter.

Die rechnergestützte Beschreibung mehrdimensionaler Zweiphasenströmungen (siehe Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik) erfordert für Massen- und Wärmeaustauschprozesse häufig eine genauere Betrachtung für die Entwicklung der Phasengrenzflächen in der Strömung. Im Rahmen eines Zwei-Fluid-Modells geschieht das auf der Basis einer Erhaltungsgleichung für die Grenzflächenkonzentration a_i wie dies in Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik kurz ausgeführt wurde. Die Entwicklung der Phasengrenzfläche wird dabei in dispersen Blasen- oder Tropfenströmungen entscheidend von Koaleszenz- und Zerfallvorgängen der Einzelpartikel bei deren Wechselwirkung mitbestimmt. Das physikalische Verständnis dieser beiden Vorgänge ist daher von zentraler Bedeutung und deshalb Gegenstand vieler Einzeluntersuchungen. Die Komplexität dieser Vorgänge ist in den Abbildungen 9.8 und 9.9 aus der Sequenz der Deformationszustände der Partikel bei einem Blasenzerfall und einer Tropfenkoaleszenz zu erkennen.

Beobachtungen zeigen, dass die Koaleszenz und der Zerfall von Blasen und Tropfen im wesentlichen in drei Schritten abläuft.

In Blasenströmungen bewegen sich Blasen aufeinander zu und stoßen aufeinander, wobei sich ein dünner Flüssigkeitsfilm zwischen ihnen ausbildet. Die Filmflüssigkeit muss durch die Blasenbewegung soweit verdrängt werden, bis die Filmdicke eine kritische Größe erreicht. Dann reißt der Film und die Koaleszenz wird eingeleitet. Der Vorgang kann durch drei Zeitskalen charakterisiert werden.

Abb. 9.8 Sequenz der verschiedenen Blasenformen unter der Wirkung einer turbulenten Flüssigkeitsströmung bis zum Blasenzerfall, Risso und Fabre (1998)

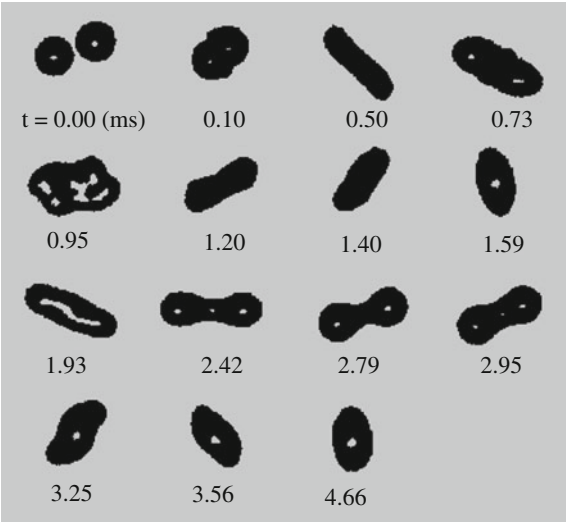


Abb. 9.9 Sequenz der verschiedenen Tropfenformen nach einer binären, nicht zentralen Tropfenkollision bis zur stabilen Tropfen-Koaleszenz, Qian und Law (1997)

Eine mittlere Stoßzeit der Blasen, eine effiziente Kontaktzeit zur Ausdünnung des Flüssigkeitsfilms und die Öffnungszeit des Filmrisses.

Die Stoßzeit wird im wesentlichen durch die konvektive Bewegung und Konzentration der Blasen in der kontinuierlichen Phase bestimmt. Die Bewegung manifestiert sich in Relativgeschwindigkeiten der Blasen in laminaren Scherströmungen, in Schwankungsgeschwindigkeiten turbulenter Strömungen oder in den unterschiedlichen Auftriebsgeschwindigkeiten von Blasen verschiedener Form und Größe. Blasenkonzentration, relative Blasengeschwindigkeit und ein durch den effektiven Blasendurchmesser festgelegter Stoßwirkungsquerschnitt bestimmen die Kollisionsfrequenz des Vorgangs. Ganz entsprechende Überlegungen gelten für Tropfen in Gasströmungen.

Nicht jeder Kollisionsvorgang endet in einer Koaleszenz oder einem Zerfall der Partikel. Es kommt vielmehr darauf an, ob und in welcher topologischen Tropfenform ein Gleichgewicht zwischen Grenzflächen- und Bewegungs-Energien der Partikel nach dem Stoß hergestellt werden kann.

Energieanteile durch Reibungsdissipation oder Auftriebsarbeit sind im Allgemeinen dabei von untergeordneter Bedeutung. Als Maß für das Verhältnis von kinetischer zu Oberflächenenergie einer Blase oder eines Tropfens kann eine Weberzahl in Form $We = u_p^2 \cdot d_p \cdot \rho_L / \sigma$ dienen, wobei u_p die Partikelgeschwindigkeit, d_p ein äquivalenter Partikeldurchmesser, ρ_L die Dichte der flüssigen Phase und σ die Grenzflächenspannung ist. In grober Näherung kann man eine Ober- und Untergrenze für Koaleszenz und Zerfall durch die statische Gleichgewichtsbedingung $We = 1$ einführen und daraus eine kritische Partikelgeschwindigkeit $u_{p,krit} = \sqrt{\sigma/(d_p \cdot \rho_L)}$ einführen. Bei den technische relevanten turbulenten Zweiphasenströmungen wird eine stochastische Relativbewegung der Partikel im wesentlichen durch die turbulenten Schwankungsgeschwindigkeiten $|u'_c|$ der wirbeldurchsetzten

kontinuierlichen Phase ausgelöst. Sie werden durch die gesamte Energieeinspeisung und die viskose Dissipation im Fluidsystem bestimmt. Der kritische Partikeldurchmesser $d_{p,krit}$ für Koaleszenz und Zerfall kann diesen Größen daher mit Hilfe der Bedingung $We = 1$ unmittelbar zugeordnet werden. Dieses vereinfachte Kriterium ist im Fall signifikanter Zähigkeiten der beteiligten Fluide durch eine weitere Kenngröße zu ergänzen. Hinze (1987) führt dazu eine weitere Kennzahl, die so genannte Ohnesorge-Zahl, in der Form $Oh = \mu_L/\sqrt{\rho_p \cdot \sigma \cdot d_p}$ ein und stellt eine empirische Beziehung $Oh(We)$ als Prozesskriterium auf. Die Koaleszenz bzw. der Zerfall wird im wesentlichen dadurch bestimmt, ob der Partikel mit einem Durchmesser d_p mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in den Einflussbereich eines hinreichend energiegeladenen Turbulenzwirbels mit vergleichbarer Abmessung gelangt d. h. mit ihm kollidiert. Übersteigt die bei der Wechselwirkung übertragene kinetische Energie $0.5 \cdot \rho_L \cdot |u'_c|^2$ das kritische Maß $0.5 \cdot \sigma/(\rho_L \cdot d_{p,krit})$ kommt es zum Zerfall oder zur Koaleszenz, wenn die übertragene Energie kleiner bleibt. Dabei kann das Verhältnis der Energien $|u'|^2/u^2_{p,krit}$ als Maß für die Effizienz der Prozesse angesehen werden. Zur Quantifizierung des Zerfalls- bzw. Koaleszenzmaßes werden in der Literatur für den Wirkungsgrad Verteilungsfunktionen angegeben. Eine besonders einfache wurde von Coulaloglou und Tavlarides (1977) in der Form $\beta = \exp(-u^2_{p,krit}/|u'|^2)$ vorgeschlagen (für neuere Entwicklungen siehe Tsouris und Tavlarides (1994); Jakobsen et al. (2005)).

Als Rate für die Erzeugung und Vernichtung von Blasen und Tropfen mit bestimmten Durchmesser dient das Produkt aus der Stoßzahl der Partikel und Stoßwirkungsgrad. Durch geeignete Summierungen über alle im Strömungsraum für einen Zerfall oder Koaleszenz zur Verfügung stehenden Tropfengrößen kann schließlich ein Maß für Quell und Senkenraten der Grenzflächenkonzentration abgeleitet werden (vergl. dazu Kocamustafaogullari und Ishii (1995); Jakobsen et al. (2005)).

2.5 Sprühströmungen

Disperse Tropfenströmungen mit sehr niedrigem Flüssigkeitsanteil werden häufig Sprühströmungen oder Sprayströmungen genannt. Sie sind unter anderem für die Erzeugung optimaler Verbrennungsgemische in Motoren, Gasturbinen und Feuerungsanlagen von großer technischer Bedeutung. Andere wichtige Anwendungsfelder sind die Kühlung thermisch belasteter Flächen und Räume durch Verdampfung und die Gaswäscher in Prozessanlagen. Bei der Behandlung von Sprühströmungen stehen zwei Fragen im Vordergrund. Die Erzeugung von Tropfenschwärmen und der Transport der Tropfen im strömenden Trägergas. Beide Aspekte sind neuerdings in Übersichtsartikeln und Büchern zusammenfassend dargestellt worden, so etwa durch (Lin und Reitz 1998; Bolle und Moureau 1982; Crowe et al. 1998). Hier werden daher nur einige grundlegende Fakten dargelegt.

Die Zerlegung von Flüssigkeiten in Tropfen erfordert Energie. Sie ist proportional zur Oberflächenspannung und zum Oberflächenzuwachs bei der Tropfenbildung. Der notwendige Energieeintrag erfolgt häufig durch Druckgefälle in Düsenströ-

mungen, durch Zentrifugalkräfte in Filmströmungen an rotierenden Scheiben oder durch Scherkräfte, die Flüssigkeitsfilmen oder Freistrahlen durch Gasströmungen aufgeprägt werden. Bei der Tropfenerzeugung in Düsen beeinflussen die Düsengeometrie, die Flüssigkeitseigenschaften, Zähigkeit, Oberflächenspannung und die Strömungsgeschwindigkeit die Tropfengröße. Die Abhängigkeiten lassen sich durch die dimensionslosen Kennzahlen Weber-Zahl und Reynolds-Zahl darstellen, die mit einer charakteristischen Düsenabmessung D zu bilden sind. Die Form des Düsenaustritts ist meist kreisförmig, kreisringförmig oder schlitzartig ausgebildet. Dementsprechend bilden sich am Düsenaustritt entweder zunächst Flüssigkeitsfreistrahlen oder dünne kegel- oder fächerförmige Flüssigkeitsscheiben aus, die dann in weiteren Schritten durch Strömungsinstabilitäten in Tropfen zerfallen. Wird der Zerfall des Flüssigkeitsstrahls bzw. der Flüssigkeitsscheibe durch Trägheitskräfte und Oberflächenspannungskräfte d. h. Kapillarwellen bestimmt, so spricht man von einem Zertropfen der Flüssigkeit. Wenn bei hohen Austrittsgeschwindigkeiten des Flüssigkeitsstrahls turbulente Scherkräfte im Inneren der Flüssigkeit- oder Gasströmungen mit hoher Geschwindigkeit am Rand die Tropfenbildung bestimmen, so wird das als Zerwellen bzw. Zerstäuben bezeichnet. Die verschiedenen Formen der Tropfenbildung werden in der einschlägigen Literatur häufig durch die Reynolds-Zahl und eine weitere Kennzahl, der Ohnesorge-Zahl $Oh = \mu_\mathrm{L}/\sqrt{\rho_\mathrm{L} \cdot \sigma \cdot d_\mathrm{p}}$ in einer Zustandskarte dargestellt. Typische Zustände des Tropfenzerfalls beim Freistrahl sind in der Abb. 9.10 abgebildet. In Abb. 9.11 ist die Zustandskarte für die verschiedenen Tropfenbildungsprozesse dargestellt.

Für spezifische technische Anwendungen sind die Düsengeometrie und die hydraulischen Kenndaten, d. h. das treibende Druckgefälle so zu wählen, dass eine

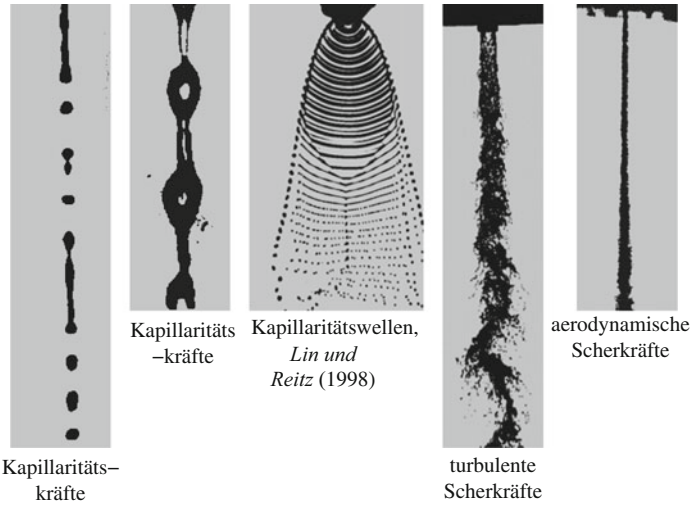


Abb. 9.10 Tropfenbildung beim Zerfall von Flüssigkeitsstrahlen und Lamellen durch verschiedene Strömungsinstabilitäten

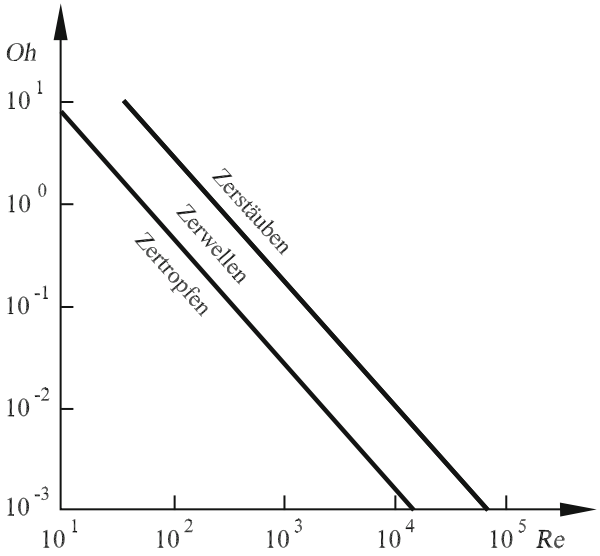


Abb. 9.11 Zustandskarte des Tropfenzerfalls, Prozesse nach von Ohnesorge (1936)

Versprühung bei einem gewünschten mittleren Tropfendurchmesser und in einen geforderten Raumwinkel erfolgt. Als Maß für den Tropfendurchmesser wird dabei allgemein der Sauter-Durchmesser benutzt, der als Verhältnis von Gesamtvolumen der Tropfen zu deren Gesamtoberfläche definiert ist.

Die Entwicklung von Sprühströmungen aus der Phase der Tropfenbildung bis hin zur voll ausgebildeten schwach konzentrierten dispersen Tröpfchenströmung ist äußerst komplex und einer allgemeinen Beschreibung schwer zugänglich. Eine Schlüsselfrage ist dabei die Darstellung des weiteren Tropfenzerfalls unter der Wirkung der Strömungskräfte bis zur Einstellung eines Tropfengrößen-Gleichgewichts. In Experimenten wurden verschiedene Zerfallsmechanismen von freien, einer Strömung ausgesetzten, Tropfen beobachtet. Dabei spielen entweder einfache Tropfenschwingungen, Rayleighsche Trägheitsinstabilitäten, Kelvin-Helmholtzsche Welleninstabilitäten oder reine Scherströmungsinstabilitäten eine Rolle. Die beobachteten Zerfallserscheinungen sind in der Abb. 9.12 nach Pilch und Erdman (1987) nach wachsenden Weber-Zahlen geordnet zusammengestellt und charakterisiert.

Zur rechnerischen Beschreibung von voll ausgebildeten Sprühströmungen geht man von der Vorstellung einer verdünnten Tropfenverteilung im Trägergas aus. Deshalb findet eine relevante Wechselwirkung nur zwischen Gas und Tropfen nicht aber zwischen den Tropfen selbst statt. Die Qualität der Wechselwirkung wird, wie in Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik bereits ausgeführt, durch die so genannte Stokes-Zahl St bestimmt. Sie charakterisiert die zeitliche Reaktion des Tropfens auf eine Veränderung der Gasströmung. Sie ist daher als Zeitverhältnis $St = \tau_p/\tau_e$ definiert mit $\tau_p = \rho_p \cdot d_p^2/(18 \cdot \mu_c)$, d_p

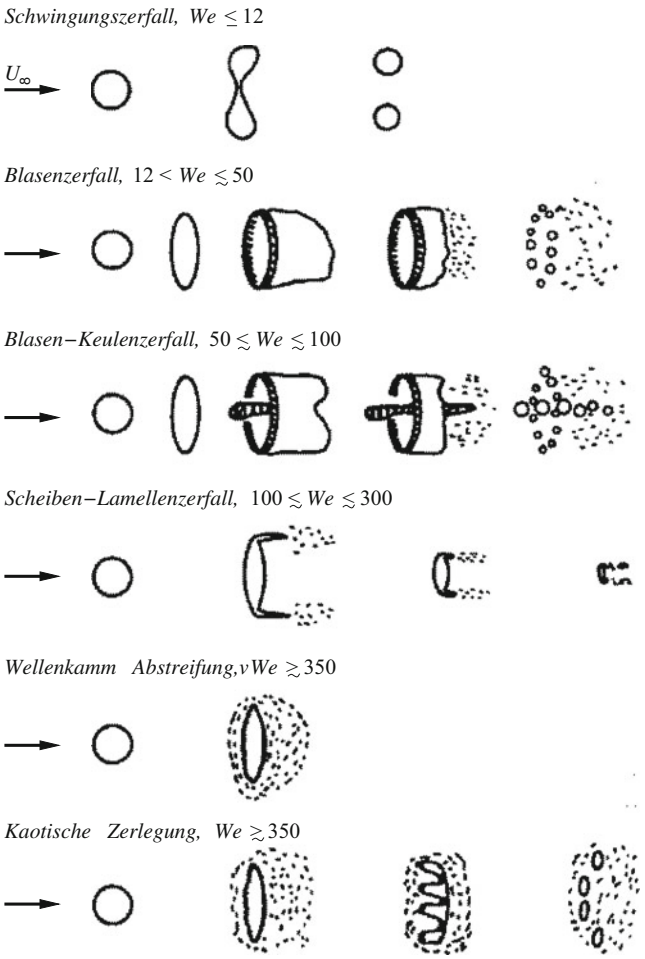


Abb. 9.12 Zerfallsmoden von Tropfen in Scherströmungen nach Pilch und Erdman (1987)

als Partikeldurchmesser und $\tau_e = L_{tc}/U_c$. Hier sind L_{tc} ein charakteristisches integrales Längenmaß der Turbulenz und U_c eine charakteristische Geschwindigkeit der kontinuierlichen Phase. Sehr kleine Stokes-Zahlen bedeuten daher eine fast trägheitsfreie Mitbewegung der Tropfen im Gas, während Werte von der Ordnung eins eine maßgebliche Wechselwirkung zwischen den Phasen anzeigen.

Wie bereits in Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik ausgeführt wird bei der Modellbildung die Gasströmung als Kontinuum in einer Eulerschen Darstellung als reibungsfreies, reibungsbehaftetes oder turbulentes Fluid behandelt mit zusätzlichen lokal wirkenden Strömungskräften und Massen-Quellen bzw. Senken aus der Tropfen-Gas-Wechselwirkung. Die Tropfenbewegung wird entweder durch die Eulersche Beschreibung erfasst oder in einer Lagrange-

schen Beschreibung entlang Bahnkurven verfolgt. Sie ist durch die aufgeprägten Strömungskräfte wie Widerstand, Auftrieb und die Schwerkraft bestimmt. Das Kernproblem dieser Modellbildung ist die Darstellung der Wechselwirkung zwischen den Phasen durch einfache physikalische Modelle in algebraischer Form. Dies ist ein Gebiet aktiver Forschung insbesondere im Hinblick auf die Wechselwirkung von Turbulenz und Tropfendispersion.

2.6 Flüssig-Feststoff Transport

Der Transport von Feststoffpartikeln in Gasen oder Flüssigkeiten tritt bei verschiedenen technischen Anwendungen und einer Reihe von geologischen Erscheinungen auf. Als Beispiele seien die pneumatische oder hydraulische Förderung von Schüttgütern in Rohrleitungen, der Sedimenttransport in Flüssen und Vorgänge in Schlamm-, Staub- und Schnee-Lawinen genannt.

Feststoff-Flüssigkeitsgemische verhalten sich wie ein Fluid, wenn die Partikel beim Fließen des Gemisches in suspendierter Form auftreten und im wesentlichen indirekt über viskose Reibungskräfte oder durch turbulente Scherkräfte in der flüssigen Phase wechselwirken. Solche Gemischströmungen werden als verdünnte Suspensionsströmungen bezeichnet. Wenn bei wachsendem Feststoffvolumenanteil ε_p der mittlere Abstand zwischen den Feststoffteilchen vergleichbar wird mit einem mittleren Teilchendurchmesser d_p dann wird die Gemischströmung in wachsendem Maße durch den direkten Impulsaustausch sich stoßender Partikel bestimmt, wobei auch Festkörperreibung beim Kontakt der Partikel untereinander und im Wechselspiel mit den Berandungen die Vorgänge signifikant beeinflusst. Diese Situation wird auch dichte Suspensionsströmung genannt. Schließlich führt eine Anhebung des Feststoffvolumenanteils über den Wert $\varepsilon_\mathrm{p} = 0.4$ zu Arretierung der Feststoffteilchen in der Transportstrecke als Folge der zu hohen Feststoffreibung zwischen Partikeln und der Kanalwand. Es bildet sich ein statisches Partikelbett aus, durch das bei anliegendem Druckgefälle das Gas bzw. die Flüssigkeit sickert.

Die wesentlichen Phänomene sollen hier am Beispiel der Feststoffförderung in horizontalen Rohren (Pipelines) kurz erläutert werden. Die Auslegung für eine solche Förderstrecke erfordet, dass eine maximale Partikel-Förderleistung bei möglichst niedrigem Leistungsaufwand für den Antrieb des Trägerfluids erreicht wird.

Wie bei Flüssigkeits-Gasströmungen entwickeln sich auch bei Feststoff-Suspensionsströmungen Muster, die von den relevanten Systemparametern abhängen, unter anderem vom mittleren Partikeldurchmesser d_p, vom Leitungsdurchmesser D, dem Massendichteverhältnis von fester zu flüssiger Phase $\rho_\mathrm{p}/\rho_\mathrm{f}$, der Massenstromdichtefraktion $\dot{m}^* = \rho_\mathrm{p} \cdot U_\mathrm{p}/(\rho_\mathrm{f} \cdot U_\mathrm{f})$ mit U_p und U_f als bezogene Partikel- und Fluidgeschwindigkeiten, der Partikelvolumenfraktion ε_p, der Druckdifferenz Δp zur Gemischförderung, der turbulenten Schwankungsgeschwindigkeit im Trägerfluid u'_f und schließlich, zur fluiddynamischen Charakterisierung der Partikel, von der charakteristischen Sinkgeschwindigkeit $w_{\mathrm{s}\infty}$ der Partikel im ruhenden Trägerfluid. Eine Abfolge typischer Strömungsmuster sowie schematische Verteilungen der

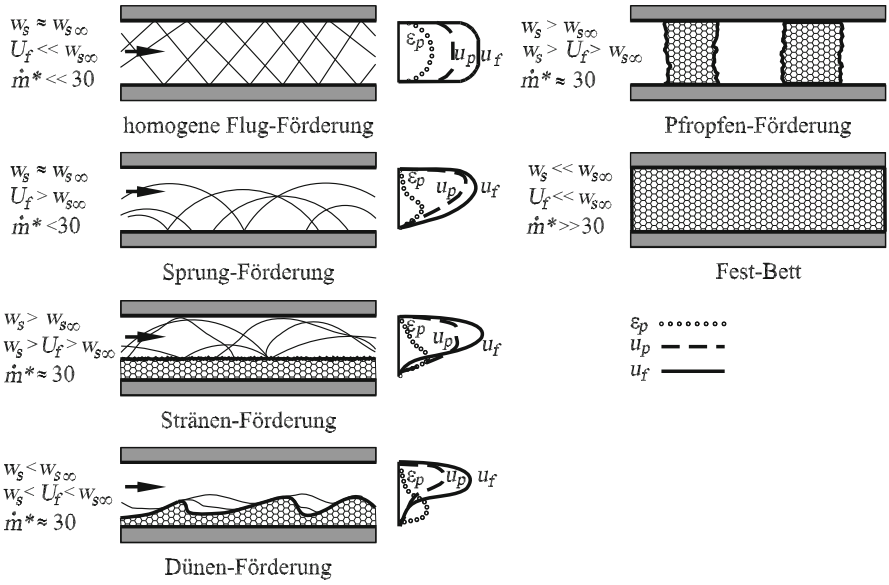


Abb. 9.13 Skizze beobachteter Zustände bei der pneumatischen Feststoff-Förderung in horizontalen Rohren. Parameter der Darstellung: u_p und u_f lokale Partikel- und Fluidgeschwindigkeiten, U_p und U_f bezogene Geschwindigkeiten, $w_{s\infty}$ Sinkgeschwindigkeit der Partikel im ruhenden Trägerfluid, ε_p Partikelvolumenfraktion, $\dot{m}^*$ Massenstromdichtefraktion

Geschwindigkeit und der Partikelfraktion sind in Abb. 9.13 dargestellt in Anlehnung an Weber (1974).

Für die Zustände der Flug- und Sprung-Förderung ist die Geschwindigkeit des Trägerfluids genügend groß, um die Partikel unter der Wirkung der Turbulenz, der Auftriebskräfte und der elastischen Stöße mit der Wand in der Schwebe und gut durchmischt zu halten. Wenn sich die Gasgeschwindigkeit verringert, wird sich ein Teil der Partikel am Boden des Kanals absetzen. Dann bilden sich zunächst wandernde Partikelsträhnen und bei weiterer Reduzierung der Gasgeschwindigkeit ruhende Ablagerungen aus. An der Oberfläche der Ablagerung erscheinen unter der Wirkung der Gasströmung wellige Riefen und schließlich dünenartige Anhäufungen, wenn die Massenstromdichtefraktion Grenzwerte von $\dot{m}^* > 30$ überschreitet. Für noch größere Partikelkonzentrationen mit Werten $\dot{m}^* \gg 30$ formieren sich Partikelpfropfen und schließlich kompakte, unbewegliche Partikelfestbetten. Beim Betrieb von Förderanlagen sind solche Zustände zu vermeiden.

Das treibende Druckgefälle in den Förderstrecken zeigt eine charakteristische Abhängigkeit von der Volumenstromdichte U_f des Trägerfluids und vom Massenstromverhältnis $\dot{M}_s = \dot{M}_p/\dot{M}$ mit $\dot{M} = \dot{M}_p + \dot{M}_f$ auf. Diese Abhängigkeit ist schematisch in Abb. 9.14 dargestellt, wobei die Volumenstromdichte und der Druck jeweils mit der relevanten Fallgeschwindigkeit $v_g = \sqrt{g \cdot D}$ dimensionslos dargestellt sind.

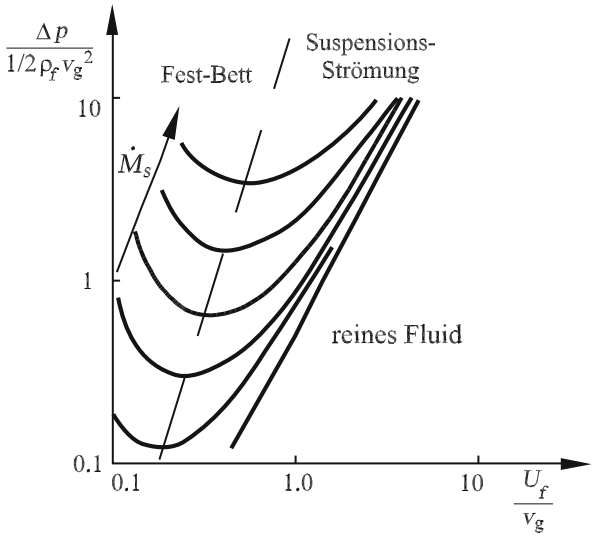


Abb. 9.14 Druckverlust als Funktion der Geschwindigkeit der Trägerströmung und der Partikelbeladung

Für endliche Beladungen $\dot{M}_s$ steigt der Druckabfall im Trägerfluid sowohl für hohe als auch niedrige Volumenstromdichten an und wird für einen bestimmten mittleren Wert minimal. Dieser minimale Druckabfall verlagert sich zu höheren Volumenstromdichten für höhere Partikelbeladungen und zeigt nach Beobachtungen die Ausbildung von Strähnen und Ablagerungen am Boden der Förderleitung an. Deshalb kann der zugehörige Volumenstrom des Trägerfluids als konservative kritische Bedingung für einen stabilen Förderbetrieb angenommen werden. Der Anstieg des Druckabfalls bei niedrigen Volumenströmen und wachsender Partikelbeladung spiegelt den wachsenden Einfluss der Strähnenbildung bis hin zur Entwicklung der Partikelpfropfen und des Partikelfestbetts wieder und ist ein Merkmal der Hydraulik von Sickerströmungen in porösen Gebinden.

Druckverlustdiagramme und Korrelationen sind für verschiedene Klassen von granularen und pulverartigen Materialien wie Sand, Kohle, Getreide, Mehl, Erze empirisch entwickelt worden und sind in den einschlägigen Textbüchern zu finden (siehe z. B. Govier und Aziz (1972), Weber (1974), Molerus (1982)). Bedingt durch die große Varianz der geometrischen und mechanischen Eigenschaften der verschiedenen Fördergüter gibt es bis heute keine allgemeingültige Beziehung für den Förderdruckabfall. Der minimale Förderdruckabfall ist eine einfach zu bestimmende Größe, die den Übergang von einem suspendierten Partikeltransport zur Strähnenbildung grob markiert. Zur Verschärfung dieses Druckkriteriums wurden weitere signifikante Einflussgrößen auf die Strähnenbildung, nämlich die Sinkgeschwindigkeit der Partikel im Trägermedium genauer untersucht.

Es wird als Beispiel eine von vielen empirischen Beziehungen für den Beginn der Strähnenbildung in Förderstrecken diskutiert, die als Auslegungskriterium Verwendung finden. Nach Beobachtungen und Messungen von Duckworth (1971) hängt die minimale mittlere Geschwindigkeit $U_{\mathrm{f\,min}}$ für den suspendierten

Partikeltransport unter dem Einfluss der Schwerkraft im wesentlichen von der Massenstromdichtefraktion $\dot{m}^*$, dem Verhältnis von mittlerem Partikeldurchmesser zu Leitungsdurchmesser d_p/D und der Absetzgeschwindigkeit eines Partikels im ruhenden Trägermedium ab.

Als Maß für die Absetzgeschwindigkeit gilt die Beziehung

$$w_{\mathrm{s}\infty} = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot d_\mathrm{p} \cdot (\rho^* - 1)}{3 \cdot C_\mathrm{D}}},$$

mit $\rho^* = \rho_\mathrm{p}/\rho_\mathrm{f}$ und C_D als hydrodynamischer Widerstandskoeffizient des Partikels bei Umströmung und g als Schwerebeschleunigung. Mit der Freifallgeschwindigkeit als Geschwindigkeitsmaß lässt sich die kritische, minimale Fördergeschwindigkeit $F_{\mathrm{f\,min}} = U_{\mathrm{f\,min}}/\sqrt{g \cdot D}$ allgemein als dimensionslose Funktion in der Form $F_{\mathrm{f\,min}} = \mathrm{f}(d_\mathrm{p}/D, \dot{m}^*, w_{\mathrm{s}\infty}/\sqrt{\rho \cdot g})$ darstellen. Duckworth (1971) schlägt die folgende empirische Beziehung vor:

$$F_{\mathrm{c\,min}} = \mathrm{C} \cdot (\dot{m}^*)^{0.2} \cdot \left(\frac{d_\mathrm{p}}{D}\right)^{-0.6} \cdot \sqrt{\frac{w_{\mathrm{s}\infty}}{\sqrt{g \cdot D}}},$$

wobei C als Proportionalitätsfaktor andere spezifische Materialeigenschaften der Partikel, wie z. B. Partikelform, Oberflächenbeschaffenheit abdecken muss.

Für den Fall vertikaler Förderleitungen stellen sich ganz ähnliche Muster in der Form von Suspensions-, Strähnen- und Pfropfenströmungen bis hin zur Festbettdurchströmung ein. Da die Schwerkraft jedoch nur in Förderrichtung wirkt, sind die Geschwindigkeiten und die Partikelkonzentrationen im Wesentlichen symmetrisch über den Strömungsquerschnitt verteilt.

2.7 Fluidisierung von Partikelbetten

In der Verfahrenstechnik werden belüftete oder geflutete Partikelbetten häufig in chemischen Reaktoren und Trennapparaten eingesetzt. Es handelt sich dabei meist um Partikelschüttungen in einem Behälter, in den von unten Gas oder Fluid verteilt über ein Netz von Öffnungen in die Schüttung eingebracht werden kann. Je nach der Größe des aufgeprägten Gas- bzw. Flüssigkeitsvolumenstroms werden sich verschiedene Durchströmungsformen in der Schüttung ausbilden, die für die Effizienz betreffender Apparate wichtig sind. In Abb. 9.15 sind einige häufig beobachtete Zustände für wachsende Volumenströme skizziert.

Für sehr kleine Volumenströme bleibt das Partikelbett kompakt und sein Gewicht wird überwiegend von der perforierten Bodenwand abgefangen. Steigt der Volumenstrom so tritt ein Zustand ein, bei dem das Gewicht der Schüttung durch die Widerstandskraft der Strömung im Partikelkollektiv kompensiert wird. Für noch größere Volumenströme lockert sich das Partikelbett immer mehr, bis die Partikel schließlich im Trägerfluid frei schweben und bei weiterem Anstieg des

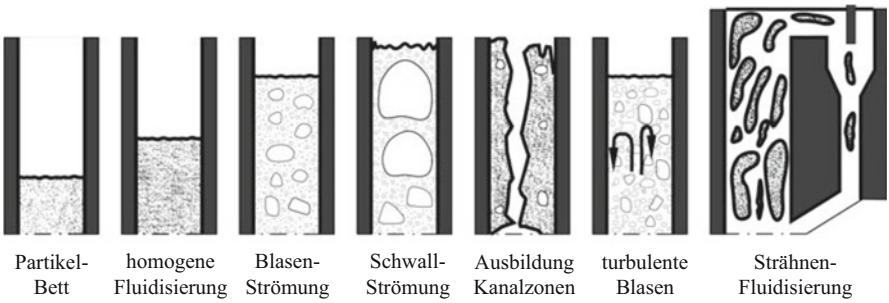


Abb. 9.15 Schematische Darstellung typischer Phänomene bei einer Gasbelüftung eines Partikelbetts für wachsende Volumenströme des Trägerfluids

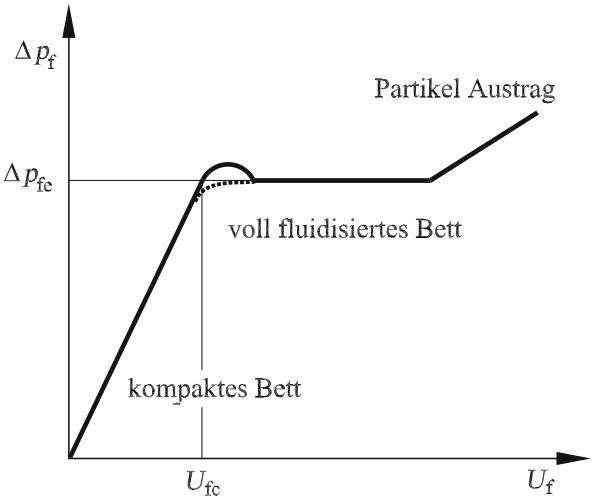


Abb. 9.16 Schematische Darstellung der Abhängigkeit von Druckabfall und Volumenstromdichte im kompakten und fluidisierten Partikelbett, Definition der kritischen Größen Δp_{fc} und U_{fc} für den Beginn der Fluidisierung

Volumenstroms schließlich aus dem Behälter als Suspension ausgetragen werden. Der Schwebezustand des Partikelbetts wird Fluidisierung genannt. Wie in Abb. 9.15 skizziert kann der Fluidisierungszustand in verschiedenen Formen auftreten, die maßgeblich von der Form des Behälters, der Art der Injektion des Trägerfluids und den geometrischen und materiellen Eigenschaften der Partikel abhängen. Eine entscheidende Kontrollgröße für den Betrieb von Fluidisierungsapparaten ist der kritische Druckabfall für das Einsetzen des Fluidisierungsvorgangs. Er lässt sich aus Messungen des Druckabfalls in Abhängigkeit von der Volumenstromdichte in der Schüttung bestimmen. In Abb. 9.16 ist dieser Zusammenhang schematisch dargestellt.

Für die Strömung in einem kompakten Partikelbett gilt die Ergunsche lineare Beziehung (Ergun 1952) zwischen Druckgradient und der lokalen Volumenstromdichte, das bedeutet eine mittlere Geschwindigkeit U_f in der Form $\nabla p = k \cdot \boldsymbol{U}_f$. Über ein völlig fluidisiertes Partikelbett ohne Partikelaustrag bleibt der Druckabfall

bei wachsenden Volumenstromdichten des Trägerfluids konstant. Es tritt jedoch eine kleine Übergangszone mit hysteretischem Verhalten auf mit leicht erhöhten oder reduzierten Druckwerten bei wachsenden bzw. abnehmenden Volumenströmen. Dieser Effekt wird durch Formeinflüsse der Partikel und Segregationsverhalten unter den Partikeln verursacht. Die kritischen Größen für den Beginn der Fluidisierung können aus dem Schnittpunkt der extrapolierten linearen Druck-Volumenstromkurven für die Bereiche kompaktes bzw. fluidisiertes Bett festgelegt werden.

Jeder der in Abb. 9.15 skizzierten Fluidisierungszustände kann in einem bestimmten Bereich der Volumenstromdichten beobachtet werden. Für die Übergänge zwischen den verschiedenen Zuständen sind empirische Beziehungen entwickelt worden, die in einschlägigen Textbüchern zu finden sind (siehe Kunii und Levenspiel (1991), Grace (1982)).

Geldert (1973) hat den Einfluss der Partikel- und Fluideigenschaften, wie etwa des mittleren Durchmessers, der Dichte der Partikel und der Zähigkeit des Trägerfluids auf die Fluidisierungszustände untersucht. Er führt vier Größenklassen von Partikeln ein, sehr feine Pulver mit mittleren Partikeldurchmessern $\overline{d}_\mathrm{p} < 20\ \mu\mathrm{m}$, zwei Sandgruppen mit $20\ \mu\mathrm{m} \leq \overline{d}_\mathrm{p} \leq 90\ \mu\mathrm{m}$ und $90\ \mu\mathrm{m} \leq \overline{d}_\mathrm{p} \leq 650\ \mu\mathrm{m}$ und granulare Schüttungen mit $\overline{d}_\mathrm{p} > 650\ \mu\mathrm{m}$.

Er stellt fest, dass eine kontrollierte Fluidisierung bei feinen Pulvern nur schwer zu erreichen ist, da elektrostatische- sowie van der Waals-Kräfte und im Falle von flüssigen Trägerströmungen, Grenzflächenspannungen die rein mechanische Wechselwirkung zwischen den Partikeln stark beeinflussen. Sände können dagegen leicht in allen verschiedenen Zuständen fluidisiert werden. In grobkörnigen Partikelbetten stellt sich bevorzugt ein Zustand mit durchgehenden Strömungskanälen ein, in denen Partikel zur Oberfläche transportiert werden, während in den Bereichen zwischen den Kanälen das Partikelbett absinkt. Der Vollständigkeit halber soll hier erwähnt werden, dass es mit den neu entwickelten numerischen Methoden der Mehr-Phasen-Fluiddynamik (siehe Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik) möglich ist, die Fluidisierungszustände nachzubilden. Eine kritische Bewertung dieser Möglichkeit wurde von Grace und Taghipour (2004) gegeben.

3 Druckverlust und Volumenanteil in Hydraulikkomponenten

Druckverluste in Zweiphasenströmungen sind von großer Bedeutung in der Kraftwerks- und Verfahrenstechnik. Deshalb sind robuste empirische Druckverlustbeziehungen ähnlich wie in der einphasigen Strömungshydraulik auf der Basis von Messungen und einfacher Modellvorstellungen entwickelt worden, die zwischen spezifischen Strömungsformen nicht unterscheiden. Dennoch hat die Vorstellung einer dispersen Strömung einerseits und die einer separaten Zweiphasenströmung andererseits zu zwei verschiedenen Varianten für Druckabfallbeziehungen geführt.

Der Gesamtdruckabfall in einer Rohr- oder Leitungsstrecke setzt sich ganz allgemein aus dem Abfall, bedingt durch Reibung, durch Beschleunigung und durch die Schwerkraft zusammen. In symbolischer Schreibweise gilt:

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{\mathrm{ges}} = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{\mathrm{f}} + \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{\mathrm{a}} + \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{\mathrm{g}}, \tag{9.46}$$

mit den Indizes f für Reibung, a für Beschleunigung und g für Schwere. Während in horizontalen geraden Rohrstrecken konstanten Querschnitts nur der Reibungsanteil wirkt, überwiegt in Kontraktion- oder Expansionselementen, wie Ventilen oder Krümmern, häufig der Beschleunigungsanteil ähnlich wie bei der einphasigen Strömung, jedoch weit stärker ausgeprägt. Zunächst wird hier der Druckabfall in der horizontalen geraden Rohrstrecke behandelt.

3.1 Der Reibungsdruckverlust in horizontalen geraden Rohren

Das homogene Modell

Unter den getroffenen Annahmen konstanten Rohrquerschnitts und horizontaler Rohrlagerung ergibt sich wie in der einphasigen Strömung die Darstellung:

$$-\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{\mathrm{f}} = -\tau_{\mathrm{w}} \cdot \frac{4}{d}, \qquad \tau_{\mathrm{w}} = \frac{1}{4} \cdot c_{\mathrm{f,2Ph}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_{\mathrm{H}} \cdot u^2, \tag{9.47}$$

mit d als hydraulischem Durchmesser, $c_{\mathrm{f,2Ph}}$ als Reibungsbeiwert der Zweiphasenströmung und der homogenen Dichte ρ_{H}. Der Reibungsbeiwert wird als Funktion einer zu definierenden Reynolds-Zahl der Zweiphasenströmung aufgefasst. Es werden häufig die bekannten Relationen für den Reibungsbeiwert aus der einphasigen Strömung übertragen, etwa das Stokes-Gesetz für die laminare und das Blasius-Gesetz für die turbulente Strömung. Je nach Strömungsform kann dann der Reibungsbeiwert gewählt werden. Für eine Ring-Tröpfchenströmung wird der Wert für eine rauhe Rohrwand mit $c_{\mathrm{f,2Ph}} \simeq 0.02$ gesetzt. Wenn der Volumenanteil des Gases groß ist, also $(1-\varepsilon) \ll 1$ gilt, kann der Einphasenwert $c_{\mathrm{f}} = c_{\mathrm{f,G}}$ gewählt werden oder wenn $\varepsilon \ll 1$ gilt, ist $c_{\mathrm{f}} = c_{\mathrm{f,L}}$ zu wählen, wobei in der Reynolds-Zahl die Zähigkeit des Gases oder der Flüssigkeit erscheint. Häufig wird in Anlehnung an die klassische implizite Relation von Prandtl für einphasige voll turbulente Strömungen auch folgende Beziehung benutzt (Dukler et al. 1964):

$$\frac{1}{4} \cdot c_{\mathrm{f,2Ph}} = 0.0014 + 0.125 \cdot Re_{\mathrm{2Ph}}^{-0.32}. \tag{9.48}$$

Zur Bildung der Reynolds-Zahl wird die gesamte Massenstromdichte und eine Gemischzähigkeit verwendet. Die einfachsten Beziehungen für gewichtete Zähigkeiten sind:

$$\begin{aligned}\mu_{2\mathrm{Ph}} &= \frac{U_\mathrm{G}}{U}\cdot\mu_\mathrm{G} + \frac{U_\mathrm{L}}{U}\cdot\mu_\mathrm{L}\,,\\ \mu_{2\mathrm{Ph}} &= \chi\cdot\mu_\mathrm{G} + (1-\chi)\cdot\mu_\mathrm{L}\,,\\ \frac{1}{\mu_{2\mathrm{Ph}}} &= \frac{\chi}{\mu_\mathrm{G}} + \frac{1-\chi}{\mu_\mathrm{L}}\,.\end{aligned} \tag{9.49}$$

Für kondensierbare Gemische wie Wasser und Wasserdampf wird häufig auch ein so genannter Zweiphasen-Multiplikator für praktische Rechnungen eingesetzt. Dieser Multiplikator wird als Verhältnis zwischen dem Druckabfall in der aktuellen Zweiphasenströmung mit dem Massenstrom $\dot{M}$ zum Druckabfall der kondensierten Flüssigkeitsströmung bei gleichem Rohrquerschnitt und gleichem Massenstrom definiert:

$$\Phi^2_{\mathrm{L0}} = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{2\mathrm{Ph}}}{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{\mathrm{L0}}}\,. \tag{9.50}$$

Der Index L0 zeigt an, dass zum Vergleich der Druckabfall einer reinen Flüssigkeitsströmung gleichen Massenstroms wie in der Zweiphasenströmung gewählt wird. Es werden Korrelationen angegeben, die im Wesentlichen eine Funktion der Gas-Flüssigkeitseigenschaften und des Dampfgehalts sind, also die Form $\Phi^2_{\mathrm{L0}} = \mathrm{f}(\mu_\mathrm{G}/\mu_\mathrm{L}, \rho_\mathrm{G}/\rho_\mathrm{L}, \chi)$ haben. Idsinga et al. (1977) geben eine Beziehung der Form

$$\Phi^2_{\mathrm{L0}} = \frac{\rho_\mathrm{L}}{\rho_\mathrm{H}}\cdot\left[1+\chi\cdot\left(\frac{\rho_\mathrm{L}-\rho_\mathrm{H}}{\rho_\mathrm{G}}\right)\right] \tag{9.51}$$

an. Sie gilt für Strömungen mit sehr kleinem Gasvolumenanteil $\varepsilon \ll 1$ für die $\mu_{2\mathrm{Ph}} = \mu_\mathrm{L}$ angenommen werden kann. Ähnliche Beziehungen ergeben sich, wenn andere Gesetzmäßigkeiten für die Gemischzähigkeit benutzt werden.

Das separate Modell

Das separate Modell geht von der Vorstellung aus, dass beide Phasen in zwei getrennten Bereichen des Rohres strömen, etwa wie bei einer Schichten- oder Ringströmung, dass aber dennoch in beiden Phasen unabhängig vom Strömungsmuster Druckgleichgewicht vorliegt. Der Gesamtdruckabfall wird dann durch die Impulsgleichung für das Zweiphasengemisch nach Gl. (9.22) beschrieben. Für das horizontale Rohr konstanten Querschitts folgt für stationäre Strömungen:

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \langle\tau_\mathrm{w}\rangle\cdot\frac{P}{A} + \frac{\dot{M}^2}{A^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\chi^2}{\varepsilon\cdot\rho_\mathrm{G}} + \frac{(1-\chi)^2}{(1-\varepsilon)\cdot\rho_\mathrm{L}}\right)\,. \tag{9.52}$$

Für den Fall, dass über den Rand des Rohres keine Wärme zugeführt wird, ändern sich χ und ε nicht längs des Rohres. Dann stehen die Wandschubspannungen mit der Druckkraft im Gleichgewicht. Lockhart und Martinelli (1949) führen hier

Zweiphasen-Multiplikatoren so ein, dass sie den Druckabfall in der Zweiphasenströmung mit dem Druckabfall der Gas- oder Flüssigkeitsphase, die allein im Rohr strömt, ins Verhältnis setzen.

Die Multiplikatoren nach Lockhart und Martinelli (1949) sind wie folgt definiert:

$$\Phi_{\mathrm{G}}^2 = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{2\mathrm{Ph}}}{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{\mathrm{G}}}, \qquad \Phi_{\mathrm{L}}^2 = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{2\mathrm{Ph}}}{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{\mathrm{L}}}. \tag{9.53}$$

Diese Größen werden auf der Basis experimenteller Daten mit dem so genannten Martinelli-Parameter, dem Druckabfallverhältnis in Beziehung gesetzt. Der Martinelli-Parameter wurde in Abschn. 1.1 in Gl. (9.13) bereits definiert. Er ist explizit berechenbar, wenn die bezogenen Geschwindigkeiten der Zweiphasenströmung und deren laminarer oder turbulenter Strömungszustand bekannt sind. Die Turbulenzzustände werden dabei durch die Reynolds-Zahl der Gas- oder Flüssigkeitsströmung bestimmt. Für $Re_{\mathrm{G,L}} > 2000$ wird ein turbulenter Zustand angenommen für $Re_{\mathrm{G,L}} < 2000$ wird laminare Strömung vorausgesetzt. Dementsprechend gibt es vier mögliche Formen des Martinelli-Parameters je nachdem ob die Gas- und Flüssigkeitsphase laminar oder turbulent strömen. Die Abhängigkeiten in der klassischen Darstellung nach Lockhart und Martinelli (1949) sind in Abb. 9.17 wiedergegeben. Eine analytische Darstellung der Graphen wurde von Chisholm (1967b) angegeben. Es sind die Beziehungen

$$\Phi_{\mathrm{G}}^2 = 1 + \mathrm{C} \cdot X + X^2, \qquad \Phi_{\mathrm{L}}^2 = 1 + \frac{\mathrm{C}}{X} + \frac{1}{X^2}, \tag{9.54}$$

wobei der Parameter C die Werte 20, 12, 10 und 5 für diese vier Fälle annimmt und mit 20 den zweifach turbulenten und mit 5 den zweifach laminaren Fall bestimmt.

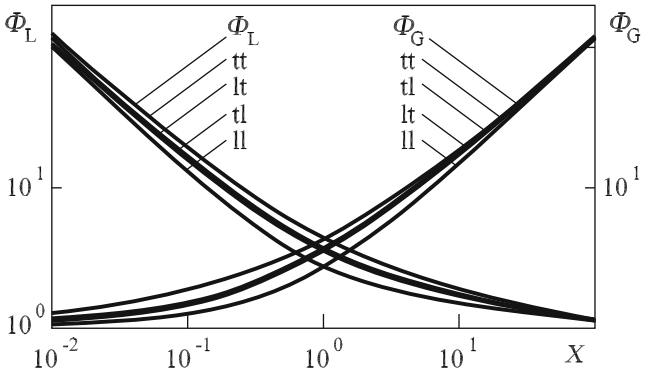


Abb. 9.17 Korrelationen nach Lockhart und Martinelli (1949), Bezeichnungen: tt beide Phasen turbulent, lt Flüssigkeit laminar, Gas turbulent, ll beide Phasen laminar, tl Flüssigkeit turbulent, Gas laminar

Die Druckverlustbeziehung von Lockhart und Martinelli (1949) beruht auf einer relativ kleinen im Systemdruck ($p < 0.4\,\mathrm{MPa}$) und im Rohrdurchmesser ($d < 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$) beschränkten Datenbasis. Deshalb sind Anwendungsrechnungen mit relativ hohen Unsicherheiten von der Größenordnung bis zu 40 % und darüber behaftet. Die Beziehung zeichnet sich jedoch durch Einfachheit aus und wird deshalb für rechnerische Erstabschätzungen gern benutzt.

Martinelli und Nelson (1948) haben die Druckkorrelation von Lockhart und Martinelli (1949) auf Strömungen mit höheren, bis hin zu kritischen Systemdrücken erweitert. Sie stellen den Zweiphasen-Multiplikator in der auf die einphasige Flüssigkeitsströmung bezogenen Form Φ_{L0} (siehe Gl. (9.50)) als Funktion des Dampfgehalts χ dar. Diese Beziehung hat sich bei Druckverlustrechnungen in Wasser-Wasserdampfströmungen bewährt.

Für genauere Auslegungsrechnungen sind empirische Druckverlust-Korrelationen entwickelt worden, die auf einer großen Datenbasis ($2 \cdot 10^4$ Messpunkte) beruhen und weitere spezifische Abhängigkeiten von der Zweiphasenmassenstromdichte (Reynolds-Zahl), der Oberflächenspannung (Weber-Zahl) und von der Schwerkraft (Froude-Zahl) berücksichtigen. Sie stellen komplexe funktionale Zusammenhänge zwischen dimensionslosen, die physikalischen Zusammenhänge erfassenden, Kennzahlen dar. Beispielhaft wird hier die Friedel-Korrelation aufgeführt. Friedel (1978) wählt für die Darstellung den Zweiphasen-Multiplikator der Form Gl. (9.50) in Abhängigkeit von verschiedenen Kennzahlen. Seine Korrelation lautet:

$$\Phi_{\mathrm{L0}}^2 = \mathrm{E} + \frac{3.24 \cdot \mathrm{F} \cdot \mathrm{H}}{Fr^{0.045} \cdot We^{0.035}}\,, \tag{9.55}$$

mit den Ausdrücken

$$\mathrm{E} = (1-\chi)^2 + \chi^2 \cdot \frac{\rho_{\mathrm{L}}}{\rho_{\mathrm{G}}} \cdot \frac{c_{\mathrm{f,G0}}}{c_{\mathrm{f,L0}}}\,,$$

$$\mathrm{F} = \chi^{0.78} \cdot (1-\chi)^{0.24}\,,$$

$$\mathrm{H} = \left(\frac{\rho_{\mathrm{L}}}{\rho_{\mathrm{G}}}\right)^{0.91} \cdot \left(\frac{\mu_{\mathrm{G}}}{\mu_{\mathrm{L}}}\right)^{0.19} \cdot \left(1 - \frac{\mu_{\mathrm{G}}}{\mu_{\mathrm{L}}}\right)^{0.7}\,,$$

$$Fr = \frac{\dot{m}^2}{g \cdot D \cdot \rho_{\mathrm{H}}^2}\,, \qquad We = \frac{\dot{m}^2 \cdot D}{\rho_{\mathrm{H}} \cdot \sigma}\,.$$

Für die Anwendungsbereiche der verschiedenen empirischen Druckverlustbeziehungen werden von Whalley (1981) aufgrund umfangreicher Vergleichsrechnungen Empfehlungen ausgesprochen.

Korrelationen für den Volumenanteil

Von gleichrangiger Bedeutung wie die Berechnung des Druckabfalls ist eine quantitative Einschätzung der Volumenanteile der Zweiphasenströmungen. Unabhängig von der Möglichkeit sie nach dem Zwei-Fluid-Modell berechnen zu

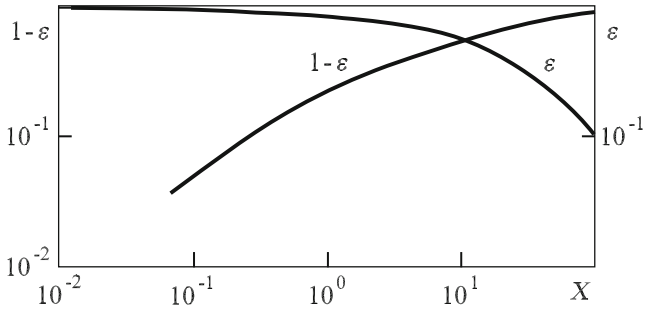


Abb. 9.18 Der Flüssigkeits- und Gasvolumenanteil nach Lockhart und Martinelli (1949)

können, sind für diese Größen frühzeitig Modelle und Korrelationen auf einer experimentellen Datenbasis entwickelt worden und dienen unter anderem als konstitutive Beziehung zur Schließung der Mischungsmodellgleichungen. Im Rahmen des Driftströmungsmodells wurde der Volumenanteil auf den Korrelationskoeffizienten C_0, die Driftgeschwindigkeit $u_{G,U}$ und die bezogenen Geschwindigkeiten zurückgeführt, vergl. dazu Gl. (9.32), wobei C_0 und $u_{G,U}$ dem Strömungsbereich entsprechend aus Experimenten und physikalischen Gesetzmäßigkeiten festgelegt werden.

Lockhart und Martinelli (1949) haben im Zusammenhang mit ihren Druckabfallmessungen unabhängig von Strömungsformen eine empirische Korrelation für Volumenanteile entwickelt. Sie ist in der Abb. 9.18 dargestellt. Chisholm (1967a) gibt dafür eine einfache algebraische Beziehung für die Ausgleichskurve der Messdaten in der Form:

$$1 - \varepsilon = \frac{\chi}{\sqrt{\chi^2 + 20 \cdot \chi + 1}} \,. \tag{9.56}$$

Von Premoli et al. (1970) wurde eine Korrelation (genannt CISE Correlation) für ε hergeleitet, die auf eine empirische Beziehung für das Geschwindigkeitsverhältnis $S = u_G/u_L$ zurückgeführt wird. Nach Gl. (9.9) lässt sich ε in der Form

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + S \cdot \frac{1-\chi}{\chi} \cdot \frac{\rho_G}{\rho_L}} \tag{9.57}$$

darstellen. Premoli et al. (1970) geben folgende empirische Beziehung für das Geschwindigkeitsverhältnis an:

$$S = 1 + E_1 \cdot \sqrt{\frac{Y}{1 + Y \cdot E_2} - Y \cdot E_2} \,, \tag{9.58}$$

mit den Ausdrücken

$$Y = \frac{\dot{V}_\mathrm{G}}{\dot{V}_\mathrm{L}},$$

$$\mathrm{E}_1 = 1.578 \cdot Re^{-0.19} \left(\frac{\rho_\mathrm{L}}{\rho_\mathrm{G}}\right)^{0.22},$$

$$\mathrm{E}_2 = 0.0273 \cdot We \cdot Re^{-0.51} \left(\frac{\rho_\mathrm{L}}{\rho_\mathrm{G}}\right)^{-0.08},$$

$$Re = \frac{\dot{m} \cdot D}{\mu_\mathrm{L}}, \qquad We = \frac{\dot{m}^2 \cdot D}{\rho_\mathrm{L} \cdot \sigma}.$$

Hier sind $\dot{V}_\mathrm{G}$ und $\dot{V}_\mathrm{L}$ die Volumenströme der Phasen. Wenn der Radikand in der Beziehung Gl. (9.58) aufgrund der Daten negative Werte annimmt verliert die Beziehung ihre Gültigkeit. Nach Angabe der Verfasser ist dann $S = 1$ zu setzen. Auch diese Korrelation ist unabhängig von Strömungsbereichen aus einer Messpunktmenge entwickelt worden. Erwähnt sei hier zusätzlich eine noch umfassendere aber komplexere Beziehung von Chexal et al. (1997), die nach den Vorstellungen des Driftströmungsmodells entwickelt wurde und auch auf gegenläufige Zweiphasenströmungen angewendet werden kann. Auf eine Darstellung wird hier wegen der komplexen Form der Beziehung verzichtet.

3.2 Beschleunigungsdruckverluste

Beschleunigungsdruckverluste treten im Vergleich zur einphasigen Strömung verstärkt in Rohrleitungserweiterungen oder Verengungen, in Rohrkrümmern und Rohrverzweigungen auf. Für Auslegungszwecke im Apparatebau werden die Druckverlustbeziehungen in Analogie zu entsprechenden Beziehungen aus der einphasigen Strömung unter Vernachlässigung der Wandreibung angegeben. Da bei Querschnittserweiterung generell eine Verzögerung der Strömung eintritt, ist bei Zweiphasenströmungen mit einer Entmischung der Phasen zu rechnen. Daher liegt es nahe, für die Berechnungen einer Druckänderung das separate Strömungsmodell in Form der Gemischbilanzgleichungen zu benutzen. Aus den Erhaltungsgleichungen für das Zweiphasengemisch des separaten Modells lässt sich bei Vernachlässigung der Wandreibung leicht eine Beziehung für den Druckrückgewinn im Carnot-Diffusor angeben. Für den in Abb. 9.19 skizzierten Kontrollraum ergibt sich nach Lottes (1961) die Beziehung:

$$p_2 - p_1 = \dot{m}_1^2 \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{(\rho_\mathrm{I})_1} - \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{1}{(\rho_\mathrm{I})_2}\right). \tag{9.59}$$

Hier ist $(\rho_\mathrm{I})_{1,2}$ die in Gl. (9.23) definierte Impulsdichte. Wenn man zur einphasigen Strömung übergeht, d. h. $\chi = 0$ oder $\chi = 1$ wählt, geht die Impulsdichte in die Dichte der Einphasenströmung über und ebenso der Ausdruck für den Druck-

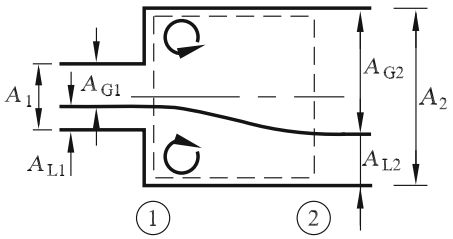


Abb. 9.19 Die separate Strömung im Carnot-Diffusor

rückgewinn. Naturgemäß kann dieser Ausdruck nur ausgewertet werden, wenn Volumenanteil und Dampfgehalt zwischen den Querschnitten 1 und 2 miteinander verknüpft werden können. Bei niedrigen Systemdrücken, wenn $p \ll p_{krit}$ gilt und keine Phasenübergänge durch Verdampfen auftreten, ändert sich der Volumenanteil des Gases ε und der Dampfgehalt χ praktisch nicht (siehe Richardson 1958, Velasco 1975). In diesem Fall ist die Analogie zur Einphasenströmung evident, da $\rho_{l1} \equiv \rho_{l2}$ gilt. Die Beobachtungen zeigen, dass stromab ein Gleichgewicht der Zweiphasenströmung aber erst nach verhältnismäßig langen Laufstrecken, etwa 30–70 Rohrdurchmessern, erreicht wird. Dieser Sachverhalt erfordert bei genaueren Rechnungen eine druckabhängige Korrelation für die Änderung des Dampfgehalts. Bei Dampf-Flüssigkeitsströmungen mit Phasenübergängen werden empirische Zusammenhänge zwischen Volumenanteil ε und Dampfgehalt χ eingesetzt (Weisman et al. 1976).

Bei Rohrverengungen tritt eine Beschleunigung der Zweiphasenströmung auf, die zu einer besseren Vermischung führt, deshalb kann hier eine Druckverlustberechnung nach dem *homogenen Strömungsmodell* mit guter Näherung ausgeführt werden. Da für das homogene Modell die Gesetzmäßigkeit der einphasigen Strömung gilt, mit der homogenen Dichte als einzig charakteristisches Merkmal, erhält man die bekannte Beziehung der einphasigen Strömung, die leicht mit Hilfe der schematischen Darstellung in Abb. 9.20 bestätigt werden kann. Es ist:

$$p_2 - p_1 = \frac{\dot{m}_2^2}{2 \cdot \rho_H} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{\sigma_c} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_c} - 1 \right)^2 \right], \tag{9.60}$$

mit $\sigma_c = A_c/A_2$ als Kontraktionszahl. Dabei werden für σ_c die Werte der einphasigen Strömung nach Archer (1913) verwendet. Die beiden Anteile in der eckigen Klammer können als reversibler und irreversibler Anteil am Druckverlust identifiziert werden. Die Kontraktionszahl spiegelt die lokale Verengung der Strömung als Folge der Ablösung der Strömung an der Kante wieder (siehe Abb. 9.20).

Im Rohrkrümmer tritt bei höheren Geschwindigkeiten an der Innenseite ebenfalls eine Ablösung auf, die bei Zweiphasenströmungen eine durch Zentrifugalkräfte bedingte Entmischung verursacht. Der Effekt ist in Abb. 9.21 skizziert. Die Gasphase sammelt sich auf der Innenseite, während das Fluid im äußeren Bereich des Krümmers strömt. Disperse Strömungen werden vorübergehend zu Schichtenströmungen.

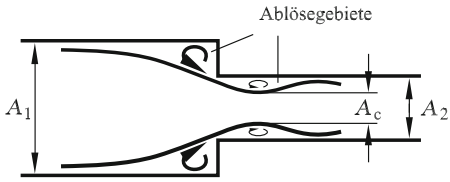


Abb. 9.20 Die Strömung durch eine Rohrverengung

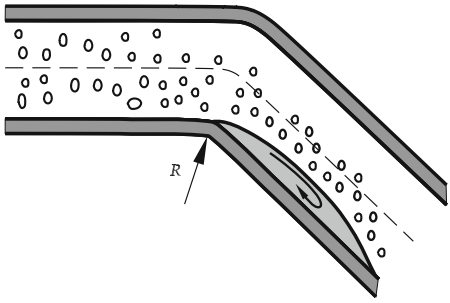


Abb. 9.21 Strömungsablösung und Phasenseparation in Rohrkrümmern

Ein neues, den Einlaufbedingungen entsprechendes Gleichgewicht zwischen den Phasen stellt sich erst nach 30–70 Rohrdurchmessern ein. Das bedeutet, dass man bei Auslegungen im Anlagenbau nur selten von voll eingelaufenen Zweiphasenströmungen ausgehen kann. Es sind Beziehungen für den Druckabfall in Rohrkrümmern u. a. von Chisholm (1967a) auf der Basis von empirischen Zweiphasen-Multiplikatoren entwickelt worden.

Das Verhalten von Zweiphasenströmungen in Rohrverzweigungen wird maßgeblich durch den Abzweigwinkel und die Richtung des Abzweigs und des Einlaufs zum Schwerevektor bestimmt. Bei nicht symmetrischer Orientierung von Auslauf und Abzweig zum Einlauf oder zum Schwerevektor kommt es zu einer Phasenumverteilung, die in besonderen Fällen zur völligen Phasenseparation führen kann. Dabei folgt die Gasphase infolge der im Allgemeinen kleineren Trägheitskraft den stärker gekrümmten Stromwegen. Dieser Trend kann je nach Orientierung der Abzweigrichtung zum Schwerevektor verstärkt oder kompensiert werden. Dieses Entmischungsphänomen ist am Beispiel eines Krümmers mit horizontalem Ein- und Auslauf, aber unterschiedlich orientiertem Abzweig schematisch in Abb. 9.22 dargestellt. Die Phasenumverteilung wird dabei durch das Verhältnis von Dampfgehalt χ_3 im Abzweig zum Dampfgehalt im Einlauf χ_1 über das Massenstromdichteverhältnis $\dot{m}_3/\dot{m}_1$ aufgetragen und zwar für drei verschiedene Orientierungen des Abzweigs zum Schwerevektor, entgegen, in Richtung und senkrecht zur Schwerkraft.

Der Graph zeigt, dass eine praktisch vollständige Separation der Phasen bei einem vertikalen nach oben gerichteten Abzweig auftritt. Bei horizontalem Abzweig akkumuliert sich die Gasphase praktisch im gesamten Parameterbereich $\dot{m}_3/\dot{m}_1$ stärker im Abzweig, nämlich mit einem Maximum bei $\dot{m}_3/\dot{m}_1 \sim 0.25$. Beim Abzweig nach unten bewirkt die Schwerkraft, dass die Flüssigkeit bei kleinen Abzweigmassenströmen dem Abzweig folgt. Erst wenn die Trägheitskräfte der

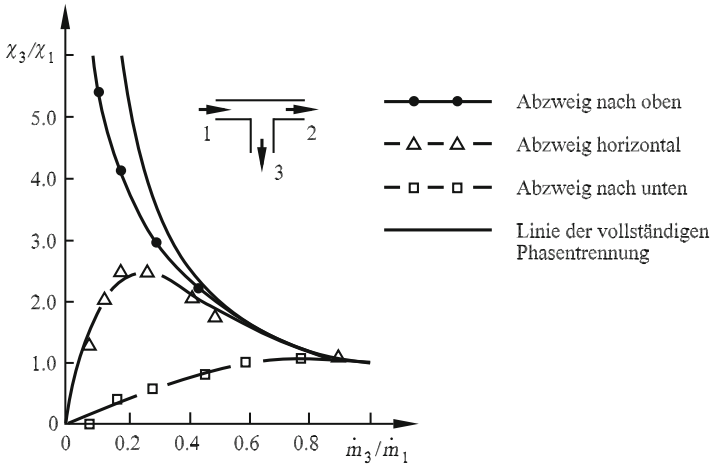


Abb. 9.22 Phasenumverteilung in einer T-Abzweigung mit verschiedenen Orientierungen zum Schwerevektor

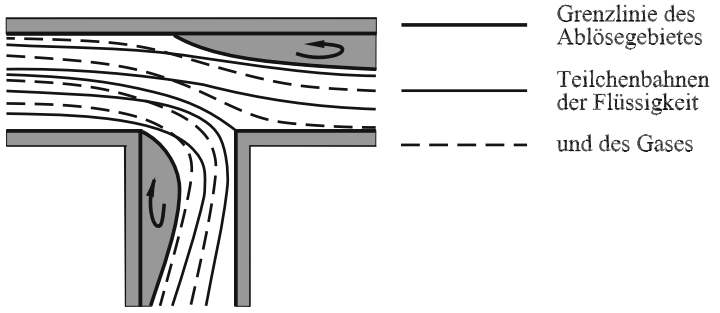


Abb. 9.23 Schematische Darstellung der Phasenumverteilung im T-Stück, dargestellt durch Pseudo-Stromlinien und markante Ablösegebiete

dichteren Phase im Vergleich zur Schwerkraft dominieren, das ist im Beispiel bei $\dot{m}_3/\dot{m}_1 \sim 0.6$ der Fall, wird der Dampfgehalt im Abzweig größer als im Einlauf. Das Gas akkumuliert im Abzweig.

In der Druckänderung wirkt die Verzweigung vom Einlauf zum Auslauf wie eine Querschnittserweiterung im Diffusor. Vom Einlauf zum Abzweig tritt eine Strömungsbeschleunigung wie bei einer Querschnittsverengung auf. Dies ist qualitativ in Übereinstimmung mit den Beobachtungen bei einphasigen Strömungen. Es werden in T-Stücken ausgeprägte Ablösezonen beobachtet, die zu einer lokalen Querschnittsverengung der aktiven Zweiphasenströmung führt. Dies ist in der Skizze von Abb. 9.23 angedeutet. Es wird häufig aufgrund visueller Beobachtungen eine Pseudo-Trennstromlinie zur Markierung von durchlaufenden und abzweigenden Massenstromdichten eingeführt. Mit dieser Annahme werden Druckverlustrechnungen für jeden Teilstrom nach Art des separaten oder homogenen Zweiphasenströmungsmodells durchgeführt. Dabei werden durch experimentelle

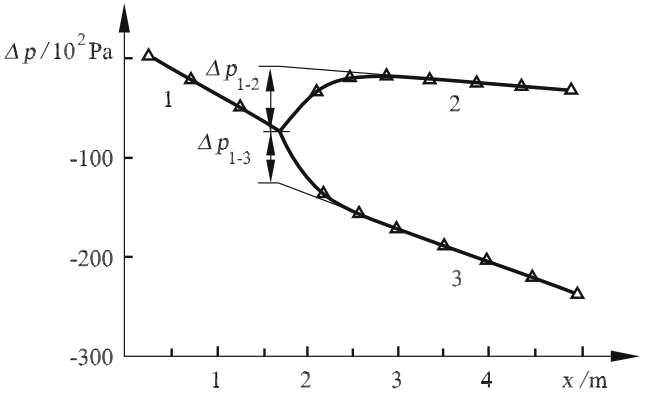


Abb. 9.24 Druckvariation in einer T-Verzweigung, 1 Einlauf, 2 Auslauf, 3 Abzweig. Der Abzweig hat eine horizontale Richtung, $p_1 = 0.6\ Pa$, $U_{L1} = 1.5\ m/s$, $U_{G1} = 14.5\ m/s$, $\dot{m}_3/\dot{m}_1 = 0.51$, Luft-Wasser-Strömung

Daten festzulegende Anpassungsparameter in den Druckkorrelationen berücksichtigt. In der Zweiphasenströmung sind die absoluten Druckveränderungen signifikant größer. Ein Beispiel für dieses Verhalten ist in der Abb. 9.24 gezeigt. Weitere Details zu Zweiphasenströmungen in Rohrverzweigungen sind von Azzopardi und Hervieu (1994) zusammengestellt worden. Zur detaillierten Analyse der Phasenumverteilung sind für Rohrverzweigungen auch dreidimensionale Berechnungen mit Hilfe eines Zwei-Fluidmodells unter Berücksichtigung von Turbulenzeinfüssen durchgeführt worden. Die rechnerischen Ergebnisse beschreiben die wesentlichen Beobachtungen aus Experimenten.

4 Ausbreitungsgeschwindigkeit von Dichtewellen und kritische Massenströme

4.1 Dichtewellen

Beim Ausströmen eines Zweiphasengemisches aus einem Druckreservoir durch einen engen Querschnitt kommt es oberhalb einer bestimmten kritischen Druckdifferenz von Behälter und Umgebungsdruck $p_1 - p_0$ zu einer Begrenzung des Massenstroms. Eine weitere Absenkung des Umgebungsdrucks führt dann zu keiner weiteren Steigerung des Massenstroms. Ein analoges Phänomen ist bei kompressibler Strömung zu beobachten. Die kompressible Strömung in der Laval-Düse ist das klassische Beispiel für die Massenstrombegrenzung als Folge der Kompressibilität des Gases. Die physikalische Ursache für diese Erscheinung ist in beiden Fällen die Gleiche. Oberhalb des kritischen Druckverhältnisses können sich wellenartige Druck- oder Dichtestörungen in der Flüssigkeit nur noch stromab fortpflanzen, weil die Strömungsgeschwindigkeit größer als die Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner Störungen geworden ist. Eine Beeinflussung des Strömungsgebietes stromauf durch eine Zustandsänderung weiter stromab ist nicht möglich. Im Falle der kompressiblen

Strömung handelt es sich bei den kleinen Störungen um Schall- oder Mach-Wellen, bei der Zweiphasenströmung sind es kleine Änderungen des Volumenanteils der Gasphase. In beiden Fällen lässt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser kleinen Störungen durch die gleiche thermodynamische Zustandsänderung darstellen, nämlich durch eine isentrope Änderung der Dichte mit dem Druck. In der Näherung kleiner Wellen-Amplituden gilt für die Geschwindigkeit der Wellenausbreitung:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s . \tag{9.61}$$

In der Gasdynamik ist dies die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen. Bei Zweiphasenströmungen ist dies die Ausbreitung von Dichtestörungen und zwar in erster Linie als Folge von Änderungen des Dampfgehalts und in zweiter Linie als Änderungen der Dichten der jeweiligen Phasen mit dem Druck. Die Bezeichnung *Schallgeschwindigkeit* im Zusammenhang mit der Ausbreitung von kleinen Dichtestörungen in Zweiphasenströmungen ist daher irreführend.

Die Berechnung des kritischen Massenstroms in einer Querschnittsverengung erfolgt wie in der Gasdynamik aus den Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls unter Verwendung bestimmter Zustandsgleichungen für das Gas und die flüssige Phase. Ausgangsgleichungen sind die Gleichungen für das Zweiphasengemisch Gl. (9.20), (9.21), (9.22), (9.23), (9.24) und (9.25) oder der vereinfachten Form Gl. (9.27) und (9.28). Eine einfache, zur Gasdynamik analoge Rechnung führt zu der Aussage, dass der kritische Massenstrom durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der *Dichtewelle* am engsten Strömungsquerschnitt gegeben ist und zwar in der Form:

$$\dot{m}_{\text{krit}} = A^* \cdot a^* \cdot \rho^* , \tag{9.62}$$

mit a in der Definition Gl. (9.61). Mit dem Symbol * wird der engste Querschnitt bezeichnet, der u. U. infolge von Strömungsablösungen nicht mit dem geometrisch engsten Querschnitt, z. B. bei Blendenöffnungen, übereinstimmt. Seine genaue Bestimmung kann schwierig sein. Dennoch zeigt diese Beziehung sofort das typische Problem bei einer Zweiphasenströmung auf. Der kritische Massenstrom hängt von der Definition der Zweiphasen-Dichte $\rho_{2\text{Ph}}$ ab, die je nach Mischungsmodell (separates oder homogenes Modell) unterschiedliche Form aufweist. Da die Strömung beim Ausfließen oder Überströmen stets beschleunigt wird, wird meist angenommen, dass eine gute Vermischung der Phasen vorliegt und die homogene Dichte $\rho_{\text{H}}(\chi)$ die Mischung gut beschreibt. Eine formale Differentiation des Ausdrucks für diese Dichte bei konstanter Entropie, d. h. in der Näherung, dass die Zustandsänderungen adiabat in jeder Phase, aber mit Phasenwechsel an den Phasengrenzen ablaufen, ergibt dann:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a^2_{2\text{Ph}}}\right)_{\text{H}} &= \left(\frac{\partial \rho_{\text{H}}}{\partial p}\right)_s \\ &= \rho_{\text{H}}^{-2} \cdot \left[\frac{1}{\rho_{\text{L}}^2 \cdot a_{\text{L}}^2} + \chi \cdot \left(\frac{1}{\rho_{\text{G}}^2 \cdot a_{\text{G}}^2} - \frac{1}{\rho_{\text{L}}^2 \cdot a_{\text{L}}^2}\right) - \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_s \cdot \left(\frac{1}{\rho_{\text{G}}} - \frac{1}{\rho_{\text{L}}}\right)\right] .\end{aligned} \tag{9.63}$$

Hier bedeutet der Index H, dass sich das Ergebnis auf das homogene Strömungsmodell bezieht. Weiterhin wurden die Schallgeschwindigkeiten für das Gas $a_G^2 = (\partial p/\partial \rho_G)_s$ und die Flüssigkeit $a_L^2 = (\partial p/\partial \rho_L)_s$ eingeführt. Hier darf ferner angenommen werden, dass i. A. die Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit deutlich größer ist, als die im Gas ($a_L^2 \gg a_G^2$). Das führt nach einigen algebraischen Umformungen, unter Anwendung der Definitionen, zu der Beziehung der Form:

$$(a_{2Ph}^2)_H = a_G^2 \cdot \left(\chi + \frac{\rho_G}{\rho_L} \cdot (1-\chi)\right)^{-2} \cdot \left[\chi - \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_s \cdot a_G^2 \cdot \frac{\rho_G}{\rho_L} \cdot (\rho_L - \rho_G)\right]^{-1}. \tag{9.64}$$

Hier ist deutlich erkennbar, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Dichtewelle im Wesentlichen vom Dampfgehalt und von der Änderung des Dampfgehalts im isentropen thermodynamischen Gleichgewicht abhängt. Bei vielen technisch relevanten Strömungen findet ein Verdampfungsprozess im thermodynamischen Gleichgewicht durch Druckabsenkung im engsten Strömungsquerschnitt nicht statt, weil die Druckabsenkung zu schnell erfolgt und zu klein ist. Das bedeutet, dass die Relaxationszeit für die Verdampfung deutlich größer ist als die Durchlaufzeit der Strömung durch den engsten Querschnitt. Man spricht in diesem Fall von gehemmtem oder gefrorenem thermodynamischen Gleichgewicht. Dieser Zustand ist durch die Aussage $(\partial \chi/\partial p)_s = 0$ gekennzeichnet. Ersetzt man jetzt in dem noch weiter vereinfachten Ausdruck Gl. (9.64) den Dampfgehalt χ durch den Volumenanteil ε, so folgt für die gefrorene Dichte-Wellengeschwindigkeit in einer homogenen Zweiphasenströmung der Ausdruck:

$$(a_{2Ph}^2)_H = a_G^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \left(\varepsilon + \frac{\rho_L}{\rho_G} \cdot (1-\varepsilon)\right)^2} \approx a_G^2 \cdot \frac{\rho_G}{\rho_L} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot (1-\varepsilon)}. \tag{9.65}$$

Die letzte Beziehung gilt mit der Annahme $\rho_G/\rho_L \ll 1$. Bemerkenswert ist hier, dass die Geschwindigkeit der Dichtewelle deutlich geringer als die Schallgeschwindigkeit im Gas ist und den kleinsten Wert für $\varepsilon = 0.5$ annimmt. Dieses Verhalten ist experimentell in Luft-Wasserströmungen gut bestätigt worden. Die Abb. 9.25 zeigt, dass Experimente dieses Verhalten bei nicht zu hohen Systemdrücken gut wiedergeben. Überraschend ist hier der niedrige Wert der Wellengeschwindigkeit im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit des Gases. Er liegt im Minimum unter 10 % der Schallgeschwindigkeit des Gases. Dies hat zur Folge, dass gemäß der Relation Gl. (9.62) die Massenstrombegrenzung an geometrischen Engstellen von Strömungsführungen schon bei sehr niedrigen Zweiphasenmassenstromdichten auftritt. Dies ist technisch außerordentlich bedeutsam im Zusammenhang mit dem Ausströmen von Gas-Flüssigkeitsgemischen aus Druckbehältern.

Wenn man als Dichte für die Zweiphasenmischung die Impulsdichte zugrunde legt, so ergibt sich nach einem längeren Differentiationsprozess ein komplizierter Ausdruck für die Dichtewellengeschwindigkeit. Dieser hängt jedoch von beiden Zustandsvariablen, Dampfgehalt χ und Volumenanteil ε ab. Da diese Größen

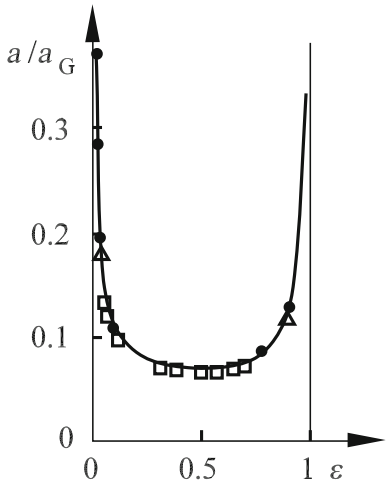


Abb. 9.25 Wellengeschwindigkeit kleiner Störungen in Wasser-Luft-Gemischen bei Annahme eines homogenen Gemischs im Vergleich zu Experimenten

über das Geschwindigkeitsverhältnis miteinander gekoppelt sind, ist die Wellengeschwindigkeit nicht nur von thermodynamischen Zustandsänderungen, sondern zusätzlich auch noch von der kinematischen Größe $S = u_G/u_L$ und deren Änderung mit dem Druck abhängig, also gilt allgemein:

$$(a^2_{2Ph})_{Sep} = f\left(a_G, a_F, \chi, \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_s, S, \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_s\right). \tag{9.66}$$

In der Ableitung $(\partial S/\partial p)_s$ drückt sich die Impulsübertragung zwischen den Phasen aus. Es sind von verschiedenen Autoren Versuche unternommen worden, Modellbeziehungen für $(\partial S/\partial p)_s$ in Blasenströmungen mit unterschiedlichen Blasenformen zu entwickeln, u. a. von Henry et al. (1971). Diese komplexen Modelle haben sich aber nicht als tragfähig erwiesen. Die gängigen analytischen Beziehungen beruhen daher eher auf dem einfacheren homogenen Dichtemodell.

4.2 Kritische Massenströme

Analytische Modelle zur Berechnung kritischer Massenströme können grob danach klassifiziert werden, ob thermodynamisches und mechanisches Gleichgewicht zwischen den Phasen vorausgesetzt wird oder nicht. Ausströmungsexperimente zeigen, dass sich im Allgemeinen lokal weder ein thermodynamisches noch ein mechanisches Gleichgewicht bei einem Ausströmungsvorgang einstellt. Bei der Entspannungsverdampfung bilden sich Temperaturunterschiede zwischen den Phasen aus, die sich durch Wärmeübergang an den Grenzflächen während des kurzen Überströmungsprozesses nicht ausgleichen. Gleichzeitig entwickelt sich eine Differenzgeschwindigkeit zwischen den Phasen. Anschaulich lässt sich dies am

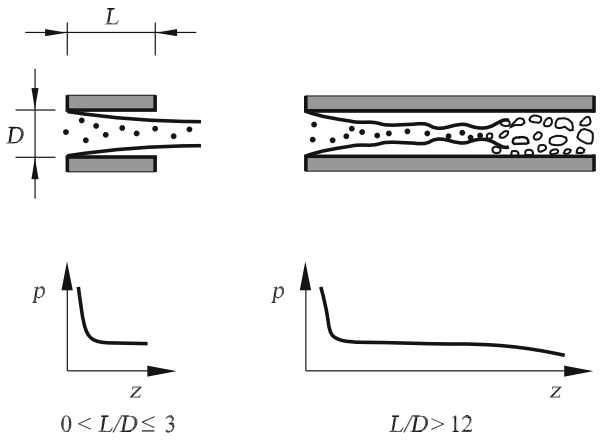


Abb. 9.26 Schematische Darstellung der Ausströmung eines Zweiphasengemisches aus einem Druckbehälter, links bei gehemmtem und rechts bei vollständigem thermodynamischen Gleichgewicht

Ausströmen aus Reservoiren mit niedrigem Dampfgehalt ($\chi_0 < 0.05$) über kurze ($L/D < 3$) und lange ($L/D \leq 12$) Rohrstutzen darstellen.

Abb. 9.26 veranschaulicht den Vorgang. Beim Ausströmen über kurze Stutzen (linkes Bild) stellt sich kein thermodynamisches Gleichgewicht im abgelösten Freistrahl ein und es kommt zu keiner signifikanten Dampfbildung im Kern des Freistrahls. Dies führt zu einem scharfen Druckabfall am Stutzeneintritt mit nachfolgendem Druckplateau im Freistrahlbereich.

Lange Rohrverbindungen zwischen den Druckreservoiren führen dagegen nach einer gewissen Strecke zum Wiederanlegen des Freistrahls an die Wand und unabhängig davon, nach einer gewissen Relaxations-Lauflänge zur Einstellung des thermodynamischen Gleichgewichts mit maßgeblichen Dampfbildungsraten. Die merkliche Zunahme des Dampfgehalts in der Strömung resultiert dann in einem signifikanten Zweiphasen-Reibungs- und Beschleunigungsdruckabfall. Dies ist im rechten Bild in Abb. 9.26 schematisch dargestellt.

Die beiden dargestellten Situationen können jeweils in grober Näherung durch eine eindimensionale homogene Zweiphasenströmung im thermodynamisch vollständig gehemmten oder im vollständigen Gleichgewicht beschrieben werden. Weil thermodynamische Effekte den Ausströmungsvorgang über die Verdampfung maßgeblich bestimmen, sollen hier kurz die thermodynamischen Zustandsänderungen mit Hilfe einer Realgasgleichung erläutert werden.

In einem $p-(1/\rho)$-Diagramm für reale Gase und Flüssigkeiten (siehe Abb. 9.27) wird der zweiphasige Bereich zum flüssigen Zustand hin durch die so genannte Siedelinie und zum Dampf-Zustand durch die so genannte Taulinie abgegrenzt. Siede- und Taulinie treffen sich im kritischen Punkt T_K, der das Zweiphasengebiet zu höheren Drücken limitiert. Der Kurvenverlauf der Isothermen weist im Zweiphasengebiet typisch ein Minimum und ein Maximum auf. Die Verbindungslinie aller

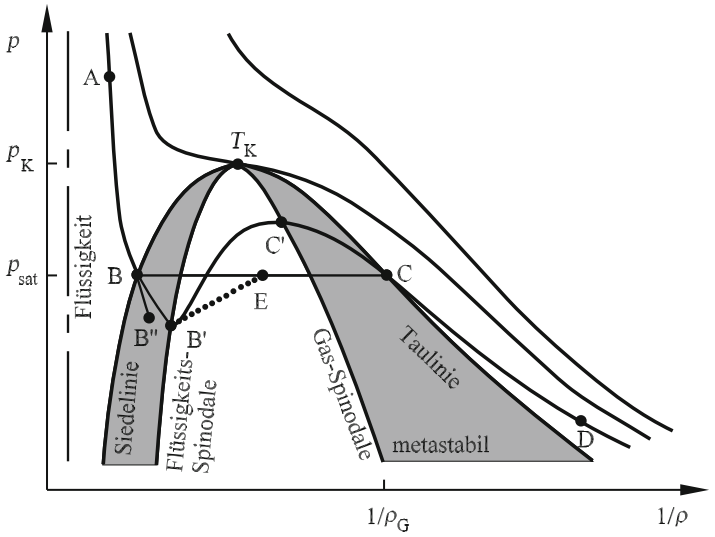


Abb. 9.27 Schematische Darstellung eines Zustandsdiagramms für ein reales Gas, gepunktet dargestellt die scheinbare Änderung im Nichtgleichgewicht

Minima heißt Flüssigkeits-, die der Maxima Dampf-Spinodale. Bei Druckentlastung ändert die Flüssigkeit ihren Zustand z. B. von Punkt A längs einer Isothermen bis zur Siedelinie im Punkt B. Sie erreicht dort die Sättigungswerte des Drucks p_{sat} und der Temperatur T_{sat}. Ist thermodynamisches Gleichgewicht durch langsame und kleine Zustandsänderungen gewährleistet, so erfolgt die Verdampfung der flüssigen Phase bei konstantem Druck und unter Zunahme des Gemischvolumens, bis die Taulinie erreicht wird (Punkt C). Die Verbindungsgerade $\overline{BC}$ ist die Gleichgewichtsisotherme im Zweiphasengebiet. Ist die Druckentlastung dagegen groß und plötzlich, so kann sich das thermodynamische Gleichgewicht an der Siedelinie nicht einstellen, die Druckentlastung folgt der realen Isotherme ins Zweiphasengebiet, ohne dass es zur Verdampfung kommt. Dies ist eine Zustandsänderung in einem metastabilen oder vollständig gehemmten thermischen Gleichgewicht. Eine isotherme Entspannung der flüssigen Phase kann höchstens bis zur Spinodale, Punkt B', erfolgen. Wird sie erreicht oder in einem realen System fast erreicht, geht das System sprunghaft durch eine explosionsartige Verdampfung in einen Gleichgewichtszustand entlang der Zweiphasenisotherme über, z. B. in den Punkt E. Das thermodynamische Nichtgleichgewicht auf der Isothermen zwischen Siedelinie und Spinodale lässt sich durch den Vergleich mit dem entsprechenden Gleichgewichtszustand auf der Siedelinie charakterisieren. Die Flüssigkeit ist durch die plötzliche Entspannung um die Temperaturspanne $T - T_{sat}$ überhitzt worden. Überhitzungen sind typisch für Siedeprozesse in Flüssigkeiten mit Wärmezufuhr. Sie sind für die Aktivierung von Siedekeimen zur Dampfblasenbildung erforderlich. Bei den Verdampfungsvorgängen durch Druckentlastung oder Wärmezufuhr bestehen daher eine Reihe vergleichbarer Phänomene, über die eine Spezialliteratur informiert (siehe z. B. Collier und

Thome (1994)). Natürlich können bei nicht-isothermer Entspannung mit teilweiser Verdampfung andere Nichtgleichgewichtszustände im Bereich zwischen Siedelinie und Flüssigkeitsspinodale erreicht werden. Es ist jedoch in der Realität schwierig solche Nichtgleichgewichtstransienten zu kontrollieren oder durch physikalische Modelle zu erfassen. Dies ist ein aktuelles Gebiet der Forschung. Deshalb werden im Weiteren die Grenzfälle diskutiert. Es soll noch erwähnt werden, dass beim Übergang von der gasförmigen in die flüssige Phase im Bereich zwischen Taulinie und Gas-Spinodale, nämlich bei der Dampfkondensation, ähnliche Erscheinungen des thermischen Nichtgleichgewichts auftreten können. Sie spielen für die weiteren Ausführungen aber keine Rolle und werden daher nicht diskutiert.

Die beiden Grenzfälle des vollständigen Gleichgewichts und des vollständig gehemmten Gleichgewichts werden durch eine Vereinfachung der Gleichungen (9.63) und (9.64) für die kritische Ausbreitungsgeschwindigkeit einer homogenen Zweiphasenströmung erfasst. Unter der Annahme, dass für die Schallgeschwindigkeiten in der Dampf- und Flüssigkeitsphase $a_G^2 \ll a_L^2$ gilt, erhält man für die kritische bzw. die maximale Massenstromdichte den vereinfachten Ausdruck:

$$\dot{m}^*_{krit} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\chi}{\rho_G \cdot a_G^2} - \left(\frac{1}{\rho_G} - \frac{1}{\rho_L}\right) \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_s\right)^*}} \,. \tag{9.67}$$

Die Ausströmung bei vollständig *gehemmtem thermischen Gleichgewicht* ist dabei durch $(\partial \chi / \partial p)_s = 0$ gekennzeichnet. Das vollständige thermische Gleichgewicht wird durch den Gesamtausdruck der Gl. (9.67) beschrieben. Die Verknüpfung der Zustände im engsten Strömungsquerschnitt mit den Ruhewerten im Überdruckreservoir erfolgt über die Zustandsgleichung des entsprechenden Gas-Flüssigkeitsgemisches (z. B. die Wasserdampf-Zustandstabellen). Der Vergleich mit experimentellen Daten für kurze Rohrstutzen zeigt, dass die nach dem *homogenen Gleichgewichtsmodell* (HGM) berechneten Massenströme i. A. deutlich zu niedrig ausfallen, während die nach dem *gehemmten Gleichgewichtsmodell* (GHGM) berechneten Werte bessere Ergebnisse liefern (siehe Abb. 9.30).

Zur systematischen Berechnung der maximalen Massenstromdichte ist eine Integration der Erhaltungsgleichungen für das Zweiphasengemisch unter Einbeziehung von Reibungsverlusten vom Eintritt bis zum engsten Querschnitt oder zum Austritt des Überströmungskanals erforderlich. Die Integration der Impulsbilanzgleichung für das Gemisch nach Gl. (9.22) führt unter der Annahme eines mechanischen Gleichgewichts mit $S = 1$ und der Nebenbedingung $(\partial \dot{m} / \partial p)_s = 0$ zur tabellierten oder grafischen Darstellung der kritischen Massenstromdichte. Abb. 9.28 zeigt die grafische Darstellung der kritischen Massenströme für den Fall eines thermodynamischen und mechanischen Gleichgewichts.

Lässt man die Annahme des mechanischen Gleichgewichts fallen, so kann eine maximale Massenstromdichte durch Integration der Impuls- oder Energiebilanzgleichung für das Gemisch (Gl. (9.22) und (9.24)) unter den zusätzlichen Nebenbedingungen $(\partial \dot{m} / \partial S)_s = 0$ bestimmt werden.

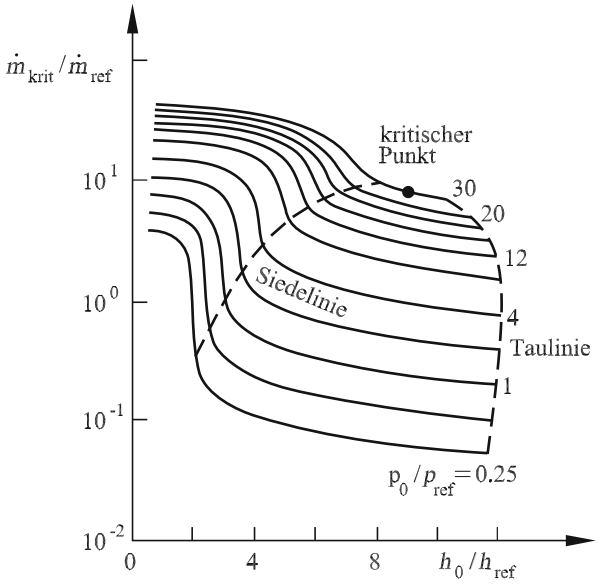


Abb. 9.28 Bezogene kritische Massenstromdichten nach dem homogenen Gleichgewichtsmodell (HGM) in Abhängigkeit von den bezogenen Ruhegrößen, Referenzwerte $p_{ref} = 689.5\ kN/m^2$, $h_{ref} = 2.326 \cdot 10^5\ J/kg$, $\dot{m}_{ref} = 4882\ kg/(m^2 s)$ (Die Referenzwerte sind durch Umrechnung verschiedener Maßsysteme bedingt)

Dieses Vorgehen liefert Beziehungen für den kritischen Massenstrom mit festgelegten Geschwindigkeitsverhältnissen, die für die integrierte Impulsbilanzgleichung den Wert $S = \sqrt{\rho_L/\rho_G}$ und bei Integration der Energiebilanzgleichung den Wert $S = (\rho_L/\rho_G)^{1/3}$ haben. Diese einfachen Modelle für kritische Zweiphasen-Massenströme wurden zuerst von Fauske (1963) und F. J. Moody (1965) hergeleitet und in Form von Diagrammen dargestellt. Als Beispiel ist der von Moody (1965) berechnete Graph in Abb. 9.29 gezeigt. Der Vergleich mit Experimenten hat ergeben, dass die aus einer Energiebilanz nach Moody (1965) berechneten kritischen Massenstromdichten deutlich über den experimentell ermittelten Werten liegen. Das Moody-Modell wird deshalb bei Sicherheitsanalysen häufig zur konservativen Abschätzung von Leckraten aus Druckspeichern herangezogen.

Zur Veranschaulichung zeigt Abb. 9.30 die hier diskutierten Modelle im Vergleich zu Messdaten aus Experimenten mit kurzem Ausströmstutzen.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass die in den einfachen Modellen getroffenen Annahmen zum thermodynamischen- und mechanischen Gleichgewicht für einen quantitativen Vergleich von Experiment und Modell zu weit gefasst sind.

Um die tatsächlichen Verhältnisse beim Durchströmen von Zweiphasengemischen von Düsen, Blenden oder Rohrstutzen unter starker Druckentlastung zu erfassen, muss die lokale und zeitliche Abweichung vom thermodynamischen Gleichgewicht und die mechanische Wechselwirkung zwischen den Phasen im Modell berücksichtigt werden.

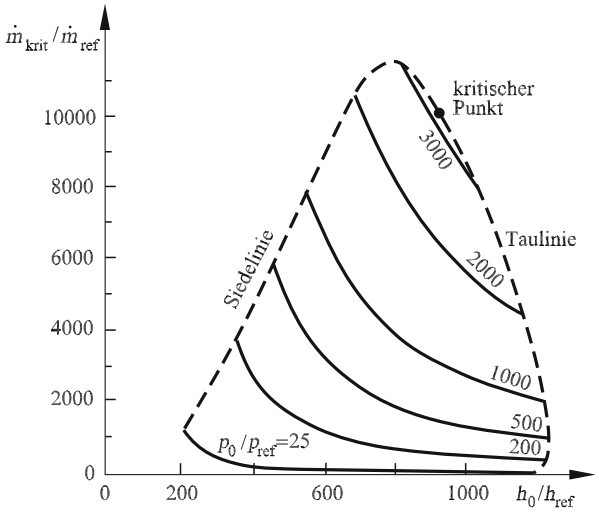


Abb. 9.29 Bezogene kritische Massenströme nach *F. J. Moody* 1965 in Abhängigkeit von den bezogenen Ruhegrößen, Referenzwerte $p_{ref} = 6.895\ kN/m^2$, $h_{ref} = 2.326\ \cdot kJ/kg$, $\dot{m}_{ref} = 4.882\ kg/(m^2 s)$ (Die Referenzwerte sind durch Umrechnung verschiedener Maßsysteme bedingt)

Henry und Fauske (1971) entwickeln auf der Basis der Beziehung für das homogene Gleichgewichtsmodell Gl. (9.67) ein empirisches durch Experimente gestütztes Nichtgleichgewichtsmodell. Sie führen in dieser Beziehung an Stelle des Gleichgewichtsdampfgehalts χ_{eq} einen realen Dampfgehalt χ ein, der nichtlinear von χ_{eq} und vom Geschwindigkeitsverhältnis S abhängt. Es gelingt ihnen eine Funktion zu finden, die die experimentellen Daten in einem bestimmten Parameterbereich zufrieden stellend erfasst. Dabei ist zu bedenken, dass es sich hier um eine mehr formale Anpassung der Formelbeziehung an die experimentellen Befunde handelt.

Für eine physikalisch besser fundierte Modellierung von Nichtgleichgewichtsvorgängen ist prinzipiell der volle Satz der stationären eindimensionalen Erhaltungsgleichungen (9.14), (9.15), (9.16), (9.17), (9.18) und (9.19) des Zwei-Fluid-Modells entlang des Ausströmpfades zu integrieren.

Insbesondere ist bei der Modellierung der Quellterme in den Massenbilanzgleichungen die Abweichung vom thermodynamischen Gleichgewicht zu berücksichtigen. Bis heute ist dies in allgemeiner Form nicht zufrieden stellend gelungen, wenn diese Abweichungen wie bei sehr starken Druckentlastungen sehr groß sind. Es ist sogar generell zu beobachten, dass die Phänomene unter starker Druckentlastung stärker durch die Einflüsse des thermodynamischen Nichtgleichgewichts, als durch die sich ändernde Relativgeschwindigkeit zwischen den Phasen bestimmt wird. Dabei spielt die Kenntnis der im Fluid vorhandenen oder aktivierbaren Siedekeime eine herausragende Rolle.

Zur quantitativen Erfassung des thermodynamischen Nichtgleichgewichts bei Phasenübergängen wird unter anderem durch Lemonnier und Bilicki (1994), als

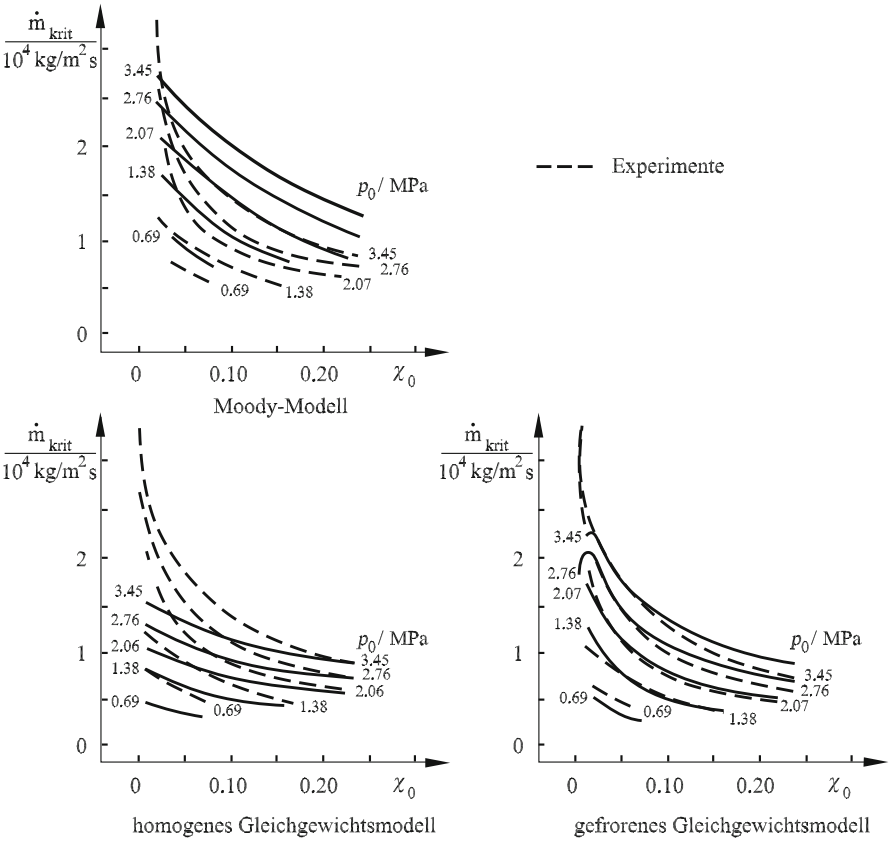


Abb. 9.30 Vergleich zwischen Modellrechnungen und experimentellen Daten nach verschiedenen Modellen (Wallis 1980)

Ergänzung zu den Erhaltungsgleichungen und der Zustandsgleichung für das Stoffsystem eine Evolutionsgleichung für den aktuellen Dampfgehalt χ im Vergleich zum thermodynamischen Gleichgewichts-Dampfgehalt χ_{eq} vorgeschlagen. Diese Beziehung verknüpft die zeitliche Dampfproduktion $d\chi/dt$ über einen *Relaxationszeitparameter* Θ linear mit der Abweichung des aktuellen Dampfgehalts $\chi - \chi_{eq}$. Dabei hängt die Dampfgehaltdifferenz direkt von der Überhitzung der Flüssigkeit ab. Die Evolutionsgleichung hat die Form:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\dot{m}_G}{\rho_G} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\chi - \chi_{eq}}{\Theta} . \tag{9.68}$$

Ausgehend von den Ruhezuständen liefert die simultane Integration der Erhaltungsgleichungen (9.14), (9.15), (9.16), (9.17), (9.18) und (9.19) und der Relaxationsdifferentialgleichung (9.68) dann die tatsächlichen Zustände im Druckentlastungs-

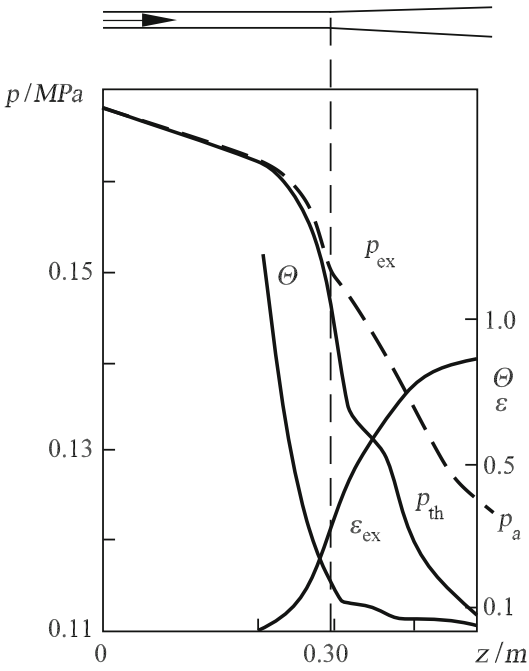


Abb. 9.31 Der Verlauf des Drucks p und des Relaxationskoeffizienten Θ beim Durchströmen eines Zweiphasengemisches durch eine schlanke Düse bei überkritischer Druckdifferenz. Beispiel $\dot{m} = 6526\,kg/(m^2 s)$, $p_a = 0.123$ MPa, p_{ex} gemessener Druck, p_{th} berechneter Druck

kanal. Die verbleibende Schwierigkeit konzentriert sich jetzt auf die Festlegung des Relaxationsparameters Θ für eine bestimmte Anordnung und ein bestimmtes Fluid. Im Prinzip verkörpert Θ dabei die Physik eines realen homogenen oder heterogenen Dampfbildungsprozesses. In Ermangelung allgemeiner Gesetzmäßigkeiten für Θ wird ein pragmatischer Weg beschritten und Θ zugleich mit der Berechnung des Drucks und des Massenstroms längs des Integrationsweges aus einer Vorgabe von gemessenen Gasvolumenanteilen und der Überhitzungstemperatur der Flüssigkeit bestimmt. Dabei setzen sie in ihren Modellgleichungen mechanisches Gleichgewicht also homogene Strömungsbedingungen voraus. Sie finden eine im Vergleich zu einfachen analytischen Modellen gute Übereinstimmung mit der gemessenen Druckverteilung in schlanken Expansionsdüsen (vgl. dazu Abb. 9.31). Dabei bietet die rechnerische Bestimmung von Θ einen neuen Ansatz zum Verständnis grundlegender Nichtgleichgewichtsvorgänge. Unabhängig von den besonderen Anforderungen bei der physikalischen Modellbildung treten bei der numerischen Integration der Differentialgleichungen Schwierigkeiten auf, die mit deren singulären Verhalten am engsten Strömungsquerschnitt zusammenhängen.

4.3 Kavitation

In Flüssigkeitsströmungen von hoher Geschwindigkeit kann eine Druckabsenkung bei der Umströmung von Körpern und Ecken zu einer lokal begrenzten Dampf- oder Gasbildung führen. Diese Erscheinung nennt man Kavitation. Es handelt

sich dabei um eine lokal begrenzte Entspannungsverdampfung mit nachfolgender Kondensation oder um die Freisetzung von gelösten Fremdgasen aus der Flüssigkeit durch Druckentlastung. Sie treten bisweilen in hydraulischen Strömungsmaschinen wie Pumpen und Turbinen und anderen Hydraulikkomponenten wie Ventilen und Einspritzdüsen von Verbrennungsmotoren auf. Dabei sind unerwünschte Nebenerscheinungen wie Verschlechterung des Betriebsverhaltens, Lärmentwicklung, mechanische Schwingungen und lokaler Materialverschleiß zu beobachten. Die Vermeidung und Kontrolle der Kavitation ist daher von großer Bedeutung für den Hydraulik-Maschinen- und Anlagenbau. Deshalb sind Kavitationsvorgänge seit langem intensiv untersucht worden mit dem Ziel, Kriterien für den Beginn und das Ausmaß der Kavitation herzuleiten. In Übersichtsartikeln und Büchern ist das Gebiet der Kavitation wiederholt zusammenfassend dargestellt worden u. a. von Brennen (1995), Lecoffre (1999), Franc und Michel (2004).

Kavitation kann in einer Einkomponentenströmung einsetzen, wenn der lokale statische Druck in der Strömung den thermodynamischen Sättigungsdampfdruck p_{sat} des Fluids erreicht und unterschreitet. Diese notwendige Bedingung für den Kavitationsbeginn wird in einer reibungsfreien inkompressiblen Strömung durch einen dimensionslosen *Kavitationsbeiwert* σ charakterisiert. Diese Kennzahl ist definiert als:

$$\sigma = 2 \cdot \frac{(p - p_{\mathrm{sat}})}{\rho \cdot u^2}\,, \tag{9.69}$$

wobei ρ die Dichte und u die lokale Geschwindigkeit ist. Für Werte von $\sigma \leq 0$ kann eine Verdampfung des Fluids eintreten. Durch mechanische und thermodynamische Realeffekte verschiebt sich der „ideale“ kritische Wert des Kavitationsbeiwerts $\sigma_{\mathrm{i}} = 0$ für das Einsetzen der Kavitation jedoch zu positiven oder negativen Beiwerten. Die relevanten Einflussgrößen für solche Abweichungen werden im Weiteren noch diskutiert.

Die beobachteten Erscheinungsformen der Kavitation sind ähnlich vielfältig wie die Strömungsformen der Zweiphasenströmungen in Rohren (siehe Abschn. 1). Sie sind immer in hohem Maße instationär. Sie werden nach wachsendem Dampfgehalt als *Wolken-, Blasen-, Schichten- und Super-Kavitation* klassifiziert. Kollektive von Bläschen im Mikron- und Submikronbereich, die sich in starken gescherten Grenzschichten bilden können, heißen Wolkenkavitation. Ausgedehnte zusammenhängende Blasenströmungen entwickeln sich in den Unterdruckgebieten von Ablöseströmungen hinter Körperkanten, auf der Saugseite von angestellten Profilen oder in Gebieten abgelöster Strömungen. Man spricht dann von Blasenkavitation.

Zur Ausbildung zusammenhängender Dampffilme oder Gasfilme kommt es in Teilbereichen des Profils oder Körperrandes durch Blasenkoaleszenz, wenn der Dampf bzw. der Gasvolumenanteil ein kritisches Maß von $\varepsilon \sim 0.5$ überschreitet. Diese Form wird Schichtenkavitation genannt. Wird der Körper bei sehr hohen Strömungsgeschwindigkeiten und entsprechend niedrigen lokalen Drücken auf der ganzen oder auf größten Teilen seiner Konturfläche vom Dampffilm umgeben,

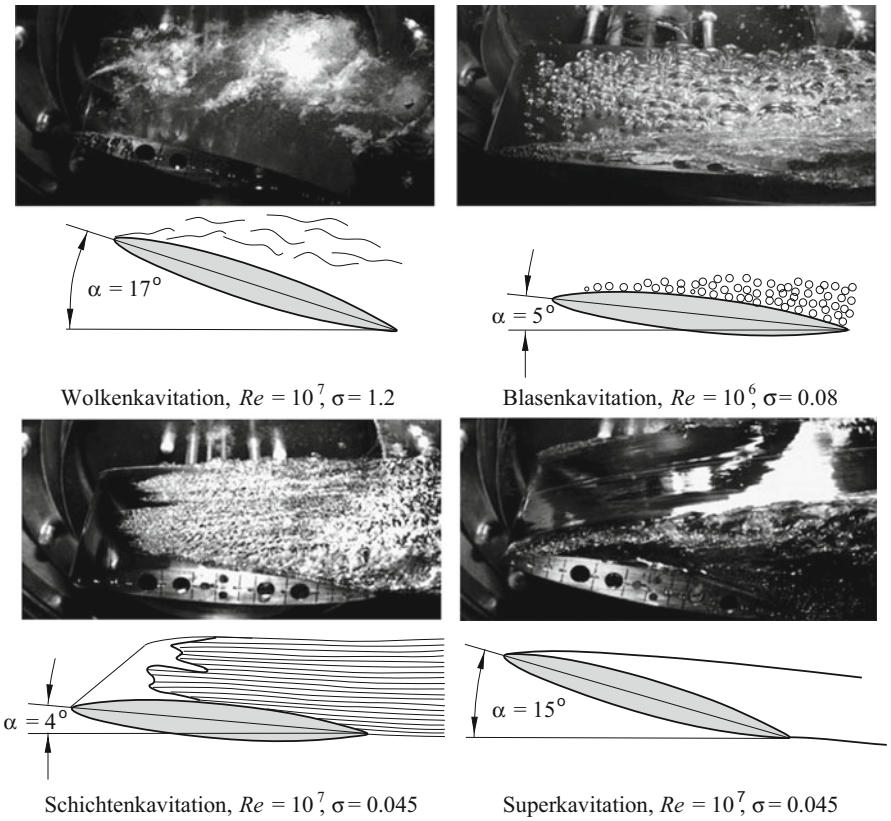


Abb. 9.32 Verschiedene Kavitationsmuster am angestellten Profil vom Typ NACA 16012 im Wasserkanal nach Franc und Michel (1985)

spricht man von Superkavitation. Derartige extreme Bedingungen werden bisweilen bei Schiffspropellern für Schnellboote angestrebt. In Abb. 9.32 sind diese Kavitationsformen nach Versuchen von Franc und Michel (1985) an einem NACA-Profil im Wasserkanal abgebildet.

Die Untersuchungen haben gezeigt, dass neben dem bereits eingeführten Kavitationsbeiwert σ folgende Eigenschaftsparameter maßgeblichen Einfluss auf die Kavitation haben: Die Körperform wie Schlankheitsgrad und Anstellwinkel sowie die Fluideigenschaften wie Zähigkeit, Oberflächenspannung, Parameter der Realgasgleichungen, Wärmeleitfähigkeit, Wärmekapazität, latente Wärme, Konzentration von Fremdstoffen im Fluid in Form von Fremdgasen oder Partikeln.

Für das Einsetzen und das dynamische Verhalten des Kavitationsvorgangs sind darüber hinaus die thermischen Mikroprozesse zur Aktivierung von Nukleationskeimen und der Turbulenzgrad der Strömung wichtig.

Die Einflüsse der verschiedenen Eigenschaftsparameter lassen sich prinzipiell in der Form dimensionsloser fluidmechanischer und thermodynamischer Kennzahlen

wie Reynolds-, Weber- oder Stefan-Zahlen etc. darstellen. Im Strömungsmaschinenbau wird zunächst versucht einen möglichst einfachen Zusammenhang zwischen dem Kavitationsbeiwert und einer normierten Volumenstromdichte herzustellen. Im Schiffbau sind für bestimmte Klassen von Hydroprofilen und Propellern durch Messungen Gesetzmäßigkeiten zwischen Kavitationsbeiwert, Anstellwinkel, Vortriebs- bzw. Widerstandsbeiwert hergeleitet worden. Die experimentellen Untersuchungen zeigen aber, dass die messtechnische Erfassung dieser Zusammenhänge von der Qualität der Versuchsflüssigkeit entscheidend abhängt. Dabei wird die Qualität der Flüssigkeit durch die Konzentration von gelösten und die Konzentration und Größenverteilung von fein verteilten ungelösten Fremdstoffen charakterisiert, weil sie die Grenze der Zugbeanspruchung einer Flüssigkeit ohne Dampfbildung und somit den Kavitationsbeginn bestimmen. Bei neueren Kavitationsuntersuchungen wird daher der Einfluss der Wasserqualität durch definierte Zugabe von Gas oder Feststoffpartikelmengen zur Versuchsflüssigkeit berücksichtigt.

Zur Ausbildung von Dampfblasen und zur Formierung von Blasenkollektiven können kohärente Strukturen turbulenter Strömungen signifikant beitragen. Dabei bilden kleinräumige intensive Wirbel die notwendigen Druckschwankungen, die lokal zu einem beschleunigten Blasenwachstum führen. Im Kernbereich großer Wirbel sammeln sich bevorzugt Blasen an und bilden durch Koaleszenz kohärente Dampfschläuche. Dies zeigt Abb. 9.33 in Form einer Flügelspitzenkavitation. Dieser Effekt erklärt, warum es zur Auslösung von Kavitation innerhalb von Wandgrenzschichten und freien Scherschichten kommt und warum die Kavitation nicht nur an Rändern des Strömungsgebietes ausgelöst wird wie es durch ideale Strömungen suggeriert wird.

Unbefriedigende Ergebnisse bei der Beschreibung der Kavitation durch einfache Strömungskennzahlen haben in jüngster Zeit verstärkt zu einer mathematisch-physikalischen Modellierung der zweiphasigen Vorgänge geführt. Dabei werden grundsätzlich die gleichen physikalischen Vorstellungen verwendet wie bei der Berechnung kritischer Massenströme. Kavitationserscheinungen sind meist im Strömungsraum begrenzt und erfordern daher in jedem Fall zwei- oder dreidimensionale

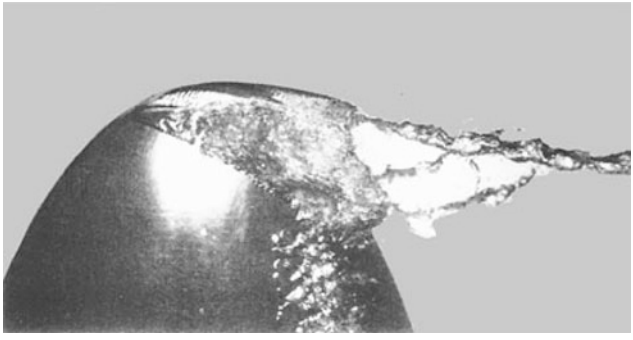


Abb. 9.33 Freier Kavitationsschlauch von einer Flügelspitze ausgehend mit Dampfaufnahme aus einer Flügel-Kavitationsschicht (Arndt und Arakeri 1991)

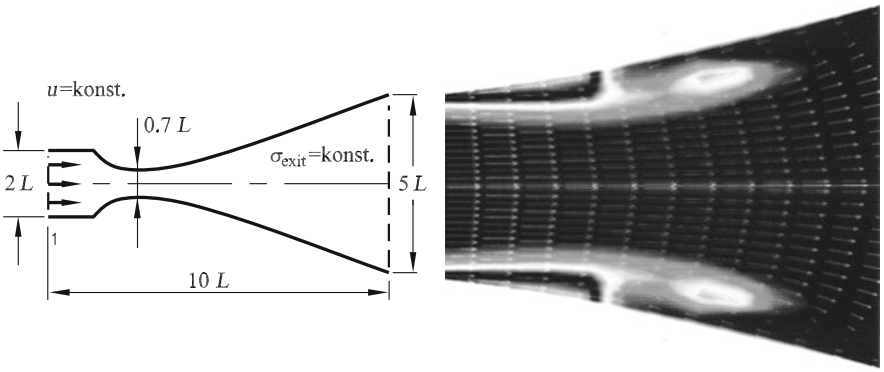


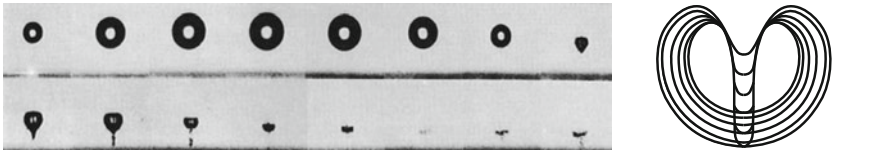
Abb. 9.34 Numerisch berechneter Kavitationsbereich im Verengungsbereich einer Düse nach Sauer und Schnerr (2000)

Rechnungen, d. h. es ist von den allgemeinen Gleichungen für Zweiphasenströmungen in Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik auszugehen. Zur Vereinfachung wird dabei häufig eine homogene Zweiphasenströmung angenommen.

Zur Berechnung des Dampfvolumenanteils ε wird die Erhaltungsgleichung für die Dampfphase Gl. (9.14) mit einem Quellterm für Verdampfung und Kondensation herangezogen. Den Kernpunkt dieser Modellierung bildet die Darstellung des Quellterms. Er kann unter Vorgabe einer Verteilung von Nukleationskeimen im Fluid aus dem Anwachsen von Einzelblasen im Druckfeld der homogenen Zweiphasenströmung berechnet werden. Das kann unter Verwendung der Rayleigh-Plesset-Gleichung nach Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (93) oder anderen ähnlichen Beziehungen für die Einzelblasendynamik geschehen. Ein solcher Weg wurde von Chen und Heister (1994) eingeschlagen und unabhängig davon von Sauer und Schnerr (2000) entwickelt. In Abb. 9.34 ist ein Beispiel für eine Kavitationsberechnung im Kanal einer Einspritzdüse gezeigt.

Trotz der bemerkenswerten Fortschritte bei der numerischen Berechnung der Kavitationsvorgänge in Kanälen, können einige wesentliche Einflüsse wie mechanisches Nichtgleichgewicht zwischen den Phasen, Turbulenzeffekte in den homogenen Phasen und thermodynamische Nichtgleichgewichte während der Blasenbildung und der Kondensation in Ermangelung adäquater physikalischer Modelle noch nicht ausreichend erfasst werden.

Im Vergleich dazu beherrscht man heute die Modellierung der Kavitationsbildung in Form von Einzelblasenwachstum und Kollaps weitgehend. Experimentelle Untersuchungen (u. a. von Lauterborn und Bolle 1975) zeigen, dass Kavitationsblasen in der Nähe von Wänden unsymmetrisch zusammenfallen und zwar unter Bildung eines Hochgeschwindigkeitflüssigkeitsstrahls, der auf die Wand gerichtet ist (Abb. 9.35) und einer intensiven Druckwelle. Es konnte experimentell von Phillip und Lauterborn (1998) gezeigt werden, dass Wandmaterialschädigungen durch hochfrequente Druckwellen und Hochgeschwindigkeitjets verursacht werden.



Experiment berechnete Blasenkonturen

Abb. 9.35 Kollaps einer Dampfblase in der Nähe einer festen Wand in der Phase der Strahlbildung in Richtung auf die Wand, links Experiment, rechts berechnete Blasenkonturen nach Blake et al. (1986)

Die Berechnung dieses Vorgangs gelang erstmals Plesset und Chapman (1971). Ihre Berechnungen wurden später vervollständigt u. a. von Blake et al. (1986). Abb. 9.35 zeigt die Zeitgeschichte des Blasenkollapses anhand von Blasenkonturlinien.

5 Instabilitäten in Zweiphasen-Strömungen

Zweiphasenströmungen können in Rohren und Kanälen in verschiedenen Formen (siehe Abschn. 1) auftreten. Jede dieser Formen existiert in einem bestimmten Bereich von Kontrollparametern wie Massenstromdichten der Phasen, Volumenanteile etc. Zwischen den Formen gibt es bei Variation der Kontrollparameter Übergänge, die häufig durch Strömungsinstabilitäten an den Phasengrenzflächen ausgelöst werden. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um Welleninstabilitäten, hervorgerufen durch die Wirkung der Relativgeschwindigkeit zwischen den Phasen, die Oberflächenspannung und die Beschleunigungskräfte. Sie sind unter dem Namen *Kelvin-Helmholtz- und Rayleigh-Taylor-Instabilität* bekannt. Diese Instabilitäten spielen ebenso bei der Deformation und beim Zerfall von Blasen, Tropfen, Flüssigkeitslamellen und Flüssigkeitsfilmen eine zentrale Rolle. Die Abb. 9.36 stellt die Situation dar. Wenn sich Gas und Flüssigkeit an einer glatten Grenzfläche relativ zueinander mit der Geschwindigkeit $u_G - u_L$ bewegen, dann werden kleine wellenartige Störungen bei einer bestimmten Größe der Oberflächenspannung und der von außen auf die Zwischenfläche wirkenden Kräfte z. B. der Schwerkraft zeitlich angefacht. Dabei hängt die Anfachungsrate der Störung im Allgemeinen von der Wellenlänge ab. Die Störung mit einer Wellenlänge λ_m mit der größten Anfachungsrate, führt zum Zerfall der glatten Grenzfläche, so z. B. von Gas und Flüssigkeitsstrahlen und zur Bildung einer neuen räumlichen Phasenverteilung, die durch die intrinsische neue Längenskala λ_m geprägt ist. Diese Längenskala bestimmt auch die Größe von Tropfen und Blasen nach dem Umbildungsprozess.

Aus einer linearen Stabilitätsanalyse für eine reibungsfrei unendlich ausgedehnte Zweischichtenströmung ergibt sich eine Anfachungsrate c_i der Form:

$$c_i = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (u_1 - u_2)^2 \cdot a^2}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\sigma \cdot a^3 - g \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot a}{\rho_1 + \rho_2}} \,. \qquad (9.70)$$

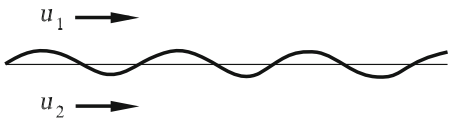


Abb. 9.36 Stabilität einer Grenzfläche zweier übereinandergeschichteter Fluide, Geschwindigkeit der Phasen u_1, u_2

Hier sind u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten der jeweiligen Phasen, a ist die Wellenzahl, die übrigen Größen haben die schon früher eingeführten Bedeutungen. Als Beschleunigung ist hier die Schwerebeschleunigung eingeführt. An ihre Stelle kann jede andere Beschleunigung mit entsprechender Wirkung treten. Das Maximum der Anfachungsrate als Funktion der Wellenzahl kann aus der Bedingung $\partial c_\mathrm{i}/\partial a = 0$ ermittelt werden. Für die weitere Diskussion wird die Wellenlänge $\lambda = 2 \cdot \pi/a$ eingeführt. Für den Fall, dass zwischen den Phasen kein Geschwindigkeitsunterschied besteht und $u_1 - u_2 = 0$ gilt, hat die maximal angefachte Störung die Wellenlänge:

$$\lambda_\mathrm{m} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot \sigma}{g \cdot (\rho_1 - \rho_2)}}\,. \tag{9.71}$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass die dichtere Flüssigkeit in Richtung auf die weniger dichte beschleunigt wird. Anderenfalls tritt nur eine gedämpfte Schwingung auf. Man spricht hier von der Rayleigh-Taylor-Instabilität. Die Grenzwellenlänge für angefachte Störungen ist durch eine verschwindende Anfachung c_i gegeben und beträgt:

$$\lambda_\mathrm{c} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{g \cdot (\rho_1 - \rho_2)}}\,. \tag{9.72}$$

Diese Größe wird auch in der einschlägigen Literatur als Laplace-Länge bezeichnet.

Daraus ist zu schließen, dass die Grenzfläche gegen kleine Störungen mit kleineren Wellenlängen stabil ist und keine dauerhafte Veränderung erfährt, da die Oberflächenspannung die Beschleunigungskräfte im Gleichgewicht hält. Für Störungen mit größeren Wellenlängen verformt sich die Grenzfläche dauerhaft. Ein sichtbares Beispiel für diese Grenzflächeninstabilität ist die Verhinderung des Auslaufens von Flüssigkeiten aus Behältern mit hinreichend kleinen Blendenöffnungen im Boden oder der zerfallsfreie Aufstieg von Gasblasen mit Abmessungen $d_\mathrm{B} \leq \lambda_\mathrm{c}$ in einer Flüssigkeit.

Wenn die Beschleunigung keine Rolle spielt, dagegen signifikante Geschwindigkeitsdifferenzen $u_1 - u_2$ zwischen den Phasen auftreten und Grenzflächenspannungen vorhanden sind, ist die Anfachung von Störungen durch die Grenzwellenlänge

$$\lambda_\mathrm{c} = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sigma}{\rho_1 \cdot (u_1 - u_2)^2}\right) \tag{9.73}$$

nach unten begrenzt. Hier wird angenommen, dass die Dichten der Phasen wie bei Gas und Flüssigkeit unter Normalbedingungen sehr verschieden sind, d. h. $\rho_2 \ll \rho_1$ ist. Die Störung mit der stärksten Anfachung hat die Wellenlänge $\lambda_m = 1.5 \cdot \lambda_c$.

Für Zweiphasen-Strömungen hat diese Kapillarinstabilität zur Folge, dass durch Schergeschwindigkeiten an der Phasengrenzfläche ungedämpfte Kapillarwellen zum Zerfall der Grenzflächen führen. So brechen beispielsweise große Tropfen in kleinere Bestandteile auf, wenn die Tropfenabmessung größer als die Grenzwellenlänge λ_c ist. Diese Instabilität von Grenzflächen gegen Scherbewegungen heißt Kelvin-Helmholtz-Instabilität. Aus diesem Sachverhalt erklärt sich auch das wohl bekannte Weber-Zahl-Kriterium für den Zerfall von Flüssigkeitsstrahlen und Flüssigkeitstropfen (siehe Abschn. 2.4). Es besagt, dass ein Zerfall von bewegten Flüssigkeitsvolumina mit freien Oberflächen auftritt, wenn die mit der charakteristischen Länge L des Volumens gebildete *Weber-Zahl* We_L den Wert eins überschreitet, also

$$We_L = \frac{\rho_G \cdot (u_G - u_L)^2 \cdot L}{\sigma} > 1 \tag{9.74}$$

gilt. Hier wurden die Phasen 1 und 2 mit einem Gas bzw. einer Flüssigkeit identifiziert (vergleiche dazu Abschn. 2.4 und 2.5).

Die beiden vorgestellten Instabilitäten sind von großem Einfluss für die Blasen- und Tropfenbildung in Zweiphasenströmungen und erklären einige wichtige Phänomene bei Siede- und Kondensationsvorgängen, so ist der Zusammenbruch des Blasensiedens und des Filmsiedens als Rayleigh-Taylor-Instabilität zu erklären. Die Ausbildung welliger Schichtenströmungen homogener Blasen- und Tropfenströmungen hängt unmittelbar mit der Kelvin-Helmholtz-Instabilität zusammen, die sich in Form eines Weber-Zahl-Kriteriums beschreiben lässt.

Die hier diskutierte einfache Darstellung dieser Instabilitäten kann durch Berücksichtigung weiterer Einflussgrößen wie Zähigkeit der Phasen und geometrische Abmessungen der begrenzenden Behälter und Kanäle vervollständigt werden. Dies ist ausführlicher im Textbuch von Chandrasekhar (1968) nachzulesen.

Neben den kleinskaligen Grenzflächeninstabilitäten, die für die Phasenverteilung eine wichtige Funktion haben, gibt es weitere grundlegende großskalige Instabilitätsmechanismen, die das Zeitverhalten der Zweiphasenströmung in Hydrauliksystemen mit Phasenübergängen bestimmen, so etwa solche mit Siede-, Kondensations- und Kavitationsvorgängen. Da derartige Instabilitäten zu unkontrollierten mechanischen Druck- und Stoßbelastungen und weiterhin zu thermisch ausgelösten Spannungen in Kanalwänden des Systems führen können, stellt die Stabilitätsgrenze für solche Vorgänge praktisch ein Entwurfs- und Betriebskriterium für solche Systeme dar. Es handelt sich dabei z. B. um chemische Reaktoren, Nuklear-Dampferzeuger, Kühlaggregate, Strömungsmaschinen etc.

Eine typische Zweiphasen-Instabilität kann in einem System auftreten, das aus zwei Druckreservoiren sowie zwei dazwischen in Reihe geschalteten Hydraulikkomponenten, nämlich z. B. einer Zentrifugalpumpe und einem Verdampferrohr mit konstanter Wärmezufuhr besteht. Das System ist in Abb. 9.37 dargestellt.

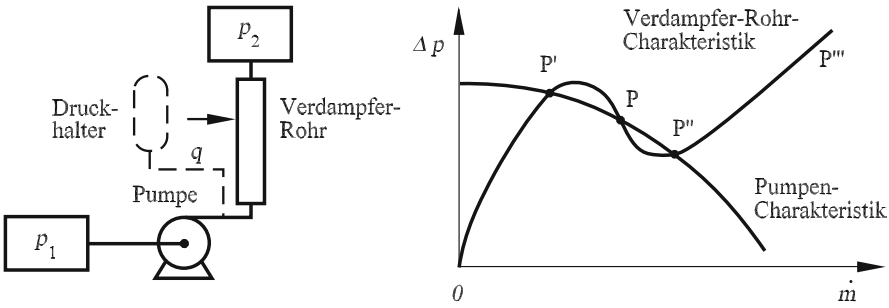


Abb. 9.37 Ein Zweiphasen-System mit möglicher Instabilität, links: Strömungssystem, rechts: Druck-Massenstrom-Charakteristik für die Radialpumpe und das Verdampferrohr

Das Stabilitätsverhalten des Systems wird durch die unterschiedlichen Druck-Massenstrom-Abhängigkeiten der Pumpe und des Verdampferrohrs bestimmt. Während der Druckaufbau einer Zentrifugalpumpe typisch mit wachsendem Massenstrom monoton abnimmt, weist der Zweiphasendruckabfall im Verdampferrohr ein typisch nicht-monotones, kubisches Verhalten in einem mittleren Massenstrombereich auf. Das nicht-monotone Verhalten wird hier im Wesentlichen durch die unterschiedlichen Beiträge von Reibungs- und Beschleunigungsanteil am Gesamtdruckverlust der Zweiphasenströmung im Verdampferrohr verursacht. Die monotonen Äste der Druckverlustkurve sind bei niedrigen Massenströmen durch den hohen Dampfanteil und bei hohen Massenströmen durch den hohen Flüssigkeitsvolumenanteil bestimmt. Im Allgemeinen kann das System daher drei stationäre Betriebszustände bei einer Variation des Massenstroms annehmen. Sie sind durch die Schnittpunkte P, P', P'' der beiden Druck-Massen-Kurven für Zentrifugalpumpe und Verdampferrohr gegeben. Geht man von einer kleinen Variation der Größen $\dot{m}$ oder p in der Umgebung der stationären Zustände aus, dann zeigt eine einfache Überlegung, dass die Zustände P' und P'' stabil sind, während eine Druck- und Massenstromänderung in der Umgebung von P durch eine Leistungsänderung der Pumpe eine Druckverluständerung mit genau entgegengesetztem Vorzeichen bewirkt. Dies führt zu einem Übergang in einen der beiden stabilen Betriebszustände P' oder P''. Die einfachen Betrachtungen zeigen, dass für die Stabilität eines Arbeitspunktes die Bedingung $\partial \Delta p / \partial \dot{m} > 0$ notwendig ist, mit Δp als treibendem Systemdruck. Da dieses durch die Instabilität ausgelöste Zeitverhalten durch eine einfache Transiente von einem instabilen in einen stationären stabilen Zustand gegeben ist, spricht man in diesem Zusammenhang auch von statisch stabilem oder instabilem Verhalten des Systems. Ledinegg (1938) hat als Erster diese *Instabilität* untersucht. Sie ist nach ihm benannt. Auf eine genaue analytische Modellierung des Stabilitätsverhaltens wird hier verzichtet und es wird auf die einschlägige Literatur verwiesen (Yadigaroglou 1981, 2006; Ozawa 1999).

Das statische Verhalten des Systems kann sich zu einem dynamischen, d. h. oszillatorischen Verhalten ändern, wenn man der Komponentenkette Radialpumpe und Verdampferrohr einen Druckhalter hinzufügt (siehe in Abb. 9.37 die gestrichelte Komponente), der die überschüssige Pumpleistung bei abnehmendem Zweipha-

sendruckabfall zwischenzeitlich als Kompressionsenergie speichert und mit einem zeitlichen Versatz in das System zurückführt. Die Pufferwirkung des Druckhalters hat zur Folge, dass die Kennlinie des treibenden Druckes im Diagramm der Abb. 9.37 zeitlich pendelt. Dies führt zu einer Verlagerung der Schnittpunkte P' und P" auf der Betriebskennlinie. Bei starken Schwankungen ist ein solches System prinzipiell in der Lage eine Relaxationsoszillation zwischen allen drei ursprünglich statischen Zuständen auszuführen. Das ist für den Betrieb eines technischen Systems unerwünscht. Man unterbindet diese Betriebsschwankungen durch den Einbau dämpfender Drosselorgane in Form von Blenden oder anderen Strömungsquerschnittverengungen.

Eine typische, durch druckabhängige Verdampfungsprozess getriebene Zweiphaseninstabilität findet sich in der Naturerscheinung der Geysire. Einer mit unterkühltem Wasser gefüllten Kaverne, die über einen schlanken Kanal mit einem höher gelegenen Wasserreservoir verbunden ist, wird Wärme zugeführt. Das Wasser erwärmt sich auf Sättigungstemperatur und beginnt zu sieden. Der sich bildende Dampf verlässt die Kaverne in Form eines Zweiphasengemisches über den Verbindungskanal. Bedingt durch den wachsenden Dampfgehalt reduziert sich der hydrostatische Druck in der Kaverne. Das führt zu einer weiteren Anfachung der Verdampfung und zu weiterem Wasseraustrag aus der Kaverne. Bei wachsendem Wasserdefizit reduziert sich die Dampfentwicklung und unterkühltes Wasser kann vom oberen Reservoir entgegen einer reduzierten Dampfströmung in die Kaverne eindringen und den Siedeprozess völlig unterbinden. Der andauernde Wärmeeintrag in die Kaverne heizt das eingedrungene Wasser erneut auf Sättigungstemperatur auf und der Prozess wiederholt sich. Bei gleich bleibenden äußeren Bedingungen, der Wärmezufuhr in die Kaverne und der Wärmeabfuhr aus dem Reservoir, stellt sich ein periodischer Vorgang mit typischem Relaxationscharakter ein. Ähnliche Phänomene können bei gewissen Betriebsstörungen auch in technischen Dampferzeugern auftreten (vergleiche unter anderem Ozawa 1999).

Strömungsinstabilitäten ähnlicher Art treten auch beim Einleiten von Dampf über Rohrstutzen in unterkühlte Wasservorlagen auf. Sie werden durch die Kondensation großer Dampfblasen in der Vorlage und im Eintrittsstutzen erzeugt und können zu unzulässigen Materialbelastungen der Rohr- und Behälterwände führen.

Eine weitere systemumfassende Zweiphaseninstabilität, die sich in Form intensiver oszillatorischer Schwankungen des Gasvolumenanteils äußert, ist die so genannte Dichte-Wellen-Instabilität. Die Instabilität ist in Systemen mit Phasenübergängen häufig anzutreffen und beruht auf einer Rückkopplung von Massenstrom, Dampfbildungsrate bzw. Kondensationsrate und Druckabfall in der Siedestrecke bzw. der Kondensationsstrecke. Diese Instabilität kann für ein Leitungssystem mit konstanter Wärmezu- und abfuhr mit Hilfe des eindimensionalen Zwei-Fluid-Modells Gl. (9.14), (9.15), (9.16), (9.17) und (9.18) und einer klassischen linearen Stabilitätsanalyse analytisch beschrieben werden (siehe Yadigaroglou 1981). Hier wird auf die Darstellung des analytischen Modells verzichtet und der wesentliche Mechanismus anhand eines einfachen Verdampferrohrs beschrieben, das zwischen zwei Druckreservoiren mit konstanten Drücken p_0 und p_1 eingebunden ist. Abb. 9.38 zeigt ein Prinzipbild des Modells.

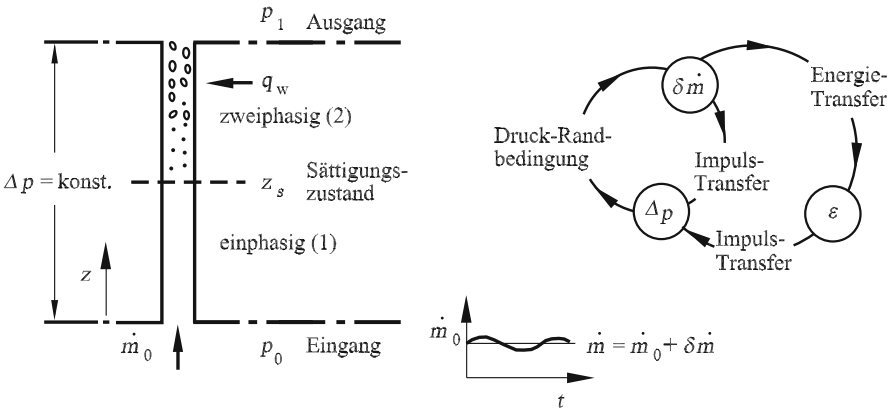


Abb. 9.38 Links Prinzipbild zur Ausbildung der *Dichte-Wellen-Instabilität*, rechts Rückkopplungseffekte

Setzt man das Verdampferrohr am Eingang einer kleinen periodischen Störung des Massenstroms $\partial\dot{m}$ aus, so folgt die Position der Sättigungstemperatur und damit die Grenze des Verdampfungsbeginns im Rohrinneren dieser Schwankung, weil Massenstromschwingungen im Bereich der einphasigen Strömungen Enthalpieschwankungen einschließen. Massenstromänderungen und Änderungen der Wegstrecke der Einphasenströmung im Rohr haben Druckschwankungen $\partial\Delta p_1$ im Bereich der einphasigen Strömung zur Folge. Im Zweiphasengebiet wirkt sich eine Enthalpiestörung zudem als Störung des Dampfvolumenanteils ε aus, die als Dichtewelle in Strömungsrichtung fortschreitet. Die Änderung des Dampfgehalts im Zusammenwirken mit der Massenstrom- und Längenstörung führt zu verstärkten Druckstörungen $\partial\Delta p_2$ im Zweiphasengebiet. Da die Gesamtdruckdifferenz dem Verdampferrohr vom System aufgeprägt ist, müssen sich die Einzeldruckschwankungen $\partial\Delta p_1$ und $\partial\Delta p_2$ gegeneinander abgleichen. Dies impliziert eine Rückkopplung zwischen dem Zwei- und Einphasengebiet und führt bei entsprechender Phasenlage der Störungen zu einer resonanten Anfachung der kleinen Ausgangsstörung. Die Folge sind massive Schwankungen in der Ausdehnung des Siedebereichs und des Dampfgehalts der Verdampferstrecke. Dies ist aus Gründen der erhöhten thermischen Wandbelastungen in technischen Systemen zu vermeiden. Die Angabe von Grenzen für die *Dichtewellen-Instabilität* ist daher für den Entwurf von Rohrdampferzeugern wichtig. Die Neigung zu instabilem Verhalten verstärkt sich, wenn mehrere Verdampfungskanäle parallel geschaltet sind.

Instabilitäten ähnlicher Qualität werden auch in kavitierenden Strömungsmaschinen beobachtet. Unter bestimmten Bedingungen wechseln lokale Kavitationsgebiete in den Schaufelkanälen in einem bestimmten Zeittakt von einem Kanal zum nächsten. Man spricht dabei von umlaufender Kavitation. Die Situation ist ganz analog zum System paralleler Verdampfungsrohre. In der Radialmaschine herrscht zwischen Schaufelein- und austritt eine feste durch die Drehzahl bestimmte

Druckdifferenz. Der Phasenübergang im Schaufelkanal erfolgt wie in Abschn. 4.3 ausgeführt, dort wo der hydrodynamische Druck den Verdampfungsdruck, d. h. den Sättigungsdampfdruck der Flüssigkeit unterschreitet. Kleine Störungen des Massenstroms im einzelnen Schaufelkanal können daher den gleichen resonanten Rückkopplungsmechanismus auslösen wie in Verdampferrohren und zu unzulässigen Oszillationen und einer Verschlechterung der Leistungscharakteristik der Maschine führen.

Weiterführende Literatur

Archer, W.: Experimental determination of loss of heat due to sudden enlargement in circular pipes. Trans. Am. Soc. Civil Eng. **76**, 999–1026 (1913)

Arndt, R.E.A., Arakeri, V.H.: Some observations of tip-vortex cavitation. J. Fluid Mech. **229**, 269–289 (1991)

Azzopardi, B.J., Hervieu, E.: Phase separation in T-junctions. Multiph. Sci. Technol. **8**, 645–713 (1994)

Blake, J.R., Taib, B.B., Doherty, G.: Transient cavities near boundaries, Pt I. Rigid boundaries. J. Fluid Mech. **170**, 479–497 (1986)

Bolle, L., Moureau, J.C.: Spray colling of hot surfaces. Multiph. Sci. Technol. **1**, 1–97 (1982)

Brennen, C.E.: Cavitation and Bubble Dynamics. Oxford Univ. Press, Oxford (1995)

Chandrasekhar, S.: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford University Press, Oxford (1968)

Chen, Y., Heister, S.D.: A numerical treatment for attached cavitation. J. Fluids Eng. **116**, 613–618 (1994)

Chexal, B., Merilo, M., Maulbetsch, J., Horowitz, J., Harrison, J., Westacott, J., Peterson, C., Kastner, W., Schmidt, H.: Void fraction technology for design and analysis. TR 106326, EPRI, Palo Alto (1997)

Chisholm, D.: Pressure losses in bends and T's during Steam-Water Flow. Report 318, N. E. L. (1967a)

Chisholm, D.: A Theoretical basis for the Lockhart-Martinelli correlation for two-phase flow. Int. J. Heat Mass Transf. **10**, 1767–1678 (1967b)

Clift, R., Grace, J.R., Weber, M.E.: Bubbles, Drops and Particles. Academic, New York (1978)/Dover Publications (2005)

Collier, J.G., Thome, J.R.: Convective Boiling and Heat Transfer. Clarendon Press, Oxford (1994)

Collins, R.: The effect of a containing cylindrical boundary on the velocity of a large gas bubble in a liquid. J. Fluid Mech. **28**(1), 97–112 (1967)

Coulaloglou, C.A., Tavlarides, L.L.: Description of interaction processes in activated liquid–liquid dispersions. Chem. Eng. Sci. **32**, 1289–1297 (1977)

Crowe, C., Sommerfeld, M., Tsuji, Y.: Multiphase Flows with Droplets and Particles. CRC Press, Boca Raton/Boston/New York/London (1998)

Delhaye, J., Giot, M., Riethmüller, M.: Thermodynamics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering. Hemisphere Publishing, New York (1981)

Duckworth, R.A.: Pressure gradient and velocity correlation and their application to design. Pneumotransport **1**, 49–52 (1971)

Dukler, A.E., Wicks III, M., Cleveland, R.G.: Frictional pressure drop in two-phase flow: B. An approach through similarity analysis. AIChE J. **10**(1), 44–51 (1964)

Ergun, S.: Fluid flow through packed columns. Chem. Eng. Progress **48**, 89–94 (1952)

Fauske, H.K.: Contribution to the theory of two-phase, one-component critical flow. Technical Report ANL-6633, Argonne National Laboratory (1963)

Franc, J.-P., Michel, J.-M.: Attached cavitation and the boundary layer: experimental investigation and numerical treatment. J. Fluid Mech. **154**, 63–90 (1985)

Franc, J.-P., Michel, J.-M.: Fundamentals of Cavitation. Kluwer, Dordrecht (2004)
Friedel, L.: Druckabfall bei der Strömung von Gas-Dampf-Flüssigkeitsgemischen in Rohren. Chem. Ing. Tech. **50**(3), 167–180 (1978)
Geldert, D.: Types of gas fluidization. Powder Technol. **7**, 285–292 (1973)
Govier, G., Aziz, K.: The Flow of Complex Mixtures in Pipes. Reinhold Van Nostrand Co., New York (1972)
Grace, J.R.: Fluidization. In: Hetsroni, G. (Hrsg.) Handbook of Multiphase Flow Systems, Hemisphere Publ., Washington, DC (1982)
Grace, J.R., Taghipour, F.: Verification and validation of CFD models and dynamic similarity for fluidized beds. Powder Technol. **139**(2), 99–110 (2004)
Henry, H., Fauske, H.: Two-phase critical flow of one-component mixtures in nozzles, orifices and short tubes. Trans. ASME J. Heat Transf. **95**, 179–187 (1971)
Henry, R., Grolmes, M., Fauske, H.: Pressure-pulse propagation in two-phase one- and two-component mixtures. Technical Report ANL-7792, Argonne National Laboratory (1971)
Hinze, J.O.: Turbulence. McGraw-Hill, New York (1987)
Idsinga, W., Todreas, N., Bowring, R.: An assessment of two-phase pressure drop correlations for steam-water systems. Int. J. Multiph. Flow **3**, 401–413 (1977)
Ishii, M.: Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow. Eyrolles, Paris (1975)
Ishii, M.: One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes. Technical Report ANL-7747, Argonne National Laboratory, Lemont (1977)
Ishii, M., Hibiki, T.: Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow. Springer, New York (2008)
Ishii, M., Mishima, K.: Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations. Nucl. Eng. Des. **82**(2–3), 107–126 (1984)
Jakobsen, H.A., Lindborg, H., Dorao, C.A.: Modeling of bubble column reactors: progress and limitations. Ind. Eng. Chem. Res. **44**, 5107–5151 (2005)
Kocamustafaogullari, H.A., Ishii, M.: Foundation of the interfacial area transport equation and its closure relations. Int. J. Heat Mass Transf. **38**(3), 481–493 (1995)
Kunii, D., Levenspiel, O.: Fluidization Engineering. Butterworth-Heinemann, Boston (1991)
Lauterborn, W., Bolle, H.: Experimental investigation of cavitation bubble collapse in the neighbourhood of a solid boundary. J. Fluid Mech. **72**, 391–399 (1975)
Lecoffre, Y.: Cavitation: Bubble Trackers. Balkema, Rotterdam, Brookfield (1999)
Ledinegg, M.: Instabilität der Strömung bei natürlichem und Zwangsumlauf. Wärme **61**, 891–908 (1938)
Lin, S.P., Reitz, R.D.: Drop and spray formation from a liquid jet. Ann. Rev. Fluid Mech. **30**, 85–105 (1998)
Lockhart, R., Martinelli, R.: Proposed correlation of data for isothermal two-phase two-component flow in pipes. Chem. Eng. Prog. **45**, 39–48 (1949)
Lottes, P.A.: Expansion losses in two-phase flow. Nucl. Sci. Eng. **9**, 26–31 (1961)
Mandhane, J.M., Gregory, G.A., Aziz, K.: A flow pattern map for gas–liquid flow in horizontal pipes. Int. J. Multiph. Flow **1**, 537–553 (1974)
Martinelli, R., Nelson, D.: Prediction of pressure drop during forced circulation boiling of water. Trans. ASME **79**, 695–702 (1948)
Molerus, O.: Fluid-Feststoff-Strömungen. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1982)
Moody, F.J.: Maximum flow rate of a single-component, two-phase mixture. ASME J. Heat Transf. **86**, 134–142 (1965)
von Ohnesorge, W.: Die Bildung von Tropfen an Düsen und die Auflösung flüssiger Strahlen. ZAMM **16**(6), 355–358 (1936)
Ozawa, M.: Flow instability problems in steam-generating tubes. In: Ishigai, S. (Hrsg.) Steam Power Engineering. Cambridge University Press, Cambridge (1999)
Peebles, F.N., Garber, H.J.: Studies on the motion of gas bubbles in liquids. Chem. Eng. Progress **49**, 88–97 (1953)
Phillipp, A., Lauterborn, W.: Cavitation erosion by single laser-produced bubbles. J. Fluid Mech. **361**, 75–116 (1998)

Pilch, M., Erdman, C.A.: Use of breakup time data and velocity history data to predict the maximum size of stable fragments for acceleration-induced breakup of a liquid drop. Int. J. Multiph. Flow **13**, 714–757 (1987)

Plesset, M.S., Chapman, R.B.: Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary. J. Fluid Mech. **47**, 283–290 (1971)

Premoli, A., Francesco, D., Prino, A.: An empirical correlation for evaluating two-phase mixture density under adiabatic conditions. European Two-Phase Flow Group Meeting, Milan (1970)

Qian, J., Law, C.R.: Regimes of coalescence and separation in droplet collision. J. Fluid Mech. **331**, 59–80 (1997)

Richardson, B.: Some problems in horizontal two-phase two-component flow. Technical Report ANL-5949, Argonne National Laboratory (1958)

Risso, F., Fabre, J.: Oscillations and break up of a bubble immersed in a turbulent field. J. Fluid Mech. **372**, 323–355 (1998)

Sauer, J., Schnerr, G.H.: Development of a new cavitation model based on bubble dynamics. ZAMM **80**, 731–732 (2000)

Shyy, W., Udaykumar, H.S., Rao, M.M., Smith, R.W.: Computational Fluid Dynamics with Moving Boundaries. Taylor & Francis, Washington, DC/London (1996)

Taitel, Y., Bornea, D., Dukler, A.E.: Modelling flow pattern transitions for steady upward gas-liquid flow in vertical tubes. AIChE J. **26**, 345–354 (1980)

Taitel, Y., Dukler, A.: A model for prediction of flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow. AIChE J. **22**, 47–55 (1976)

Taitel, Y.: Flow pattern transition in two-phase flow. In: Proceedings of the 9th International Heat Transfer Conference, Jerusalem, S. 237–254 (1990)

Tryggvason, G., Scardovelli, R., Zaleski, S.: Direct Numerical Simulations of gas-Liquid Multiphase Flows. Cambridge University Press, Cambridge (2011)

Tsouris, C., Tavlarides, L.L.: Breakage and coalescence models for drops in turbulent dispersions. AIChE J. **40**, 395–406 (1994)

Velasco, L.: L'écoulement Biphasique à Travers un Elargissement Brusque. Ph.D. thesis, Université Catholique de Louvain, Dép. Thermodyn. et Turbomach. (1975)

Wallis, G.B.: One-Dimensional Two-Phase Flow. McGraw-Hill (1969)

Wallis, G.B.: Critical two-phase flow. Int. J. Multiphase Flow **6**, 97–112 (1980)

Weber, M.: Strömungsfördertechnik. Krauskopf, Mainz (1974)

Weismann, J., Husain, A., Harshe, B.: Two-phase pressure drop across area changes and restrictions. Two-Phase Transp. React. Saf. **4**, 1281–1316 (1976)

Whalley, P.B.: Data Bank for Pressure Loss Correlations, a Comparative Study. Unveröffentlicht, zitiert in Short Courses on Modelling and Computation of Multiphase Flows, ETH Zürich (1999)

Yadigaroglou, G.: Two-phase flow instabilities and propagation phenomena. In: Delhaye, J.M., Giot, M., Riethmüller, M.L. (Hrsg.) Thermohydraulics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering, S. 353–403. Hemishpere Publishing, Washington, DC (1981)

Yadigaroglou, G.: Short Courses on Modelling and Computation of Multiphase flows. Swiss Federal Institute of Technology, ETH, Zürich (2006–2012).

Yadigaroglou, G., Lahey, J.R.T.: On the various forms of the conservation equations in two-phase flow. Int. J. Multiphase Flow **2**, 477–494 (1976)

Zuber, H., Findlay, J.A.: Average volumetric concentration in two-phase flow systems. J. Heat Transf. **87**, 453–468 (1965)

Strömungen mit chemischen Reaktionen 10

Uwe Riedel

Zusammenfassung

Das Kapitel Strömungen mit chemischen Reaktionen behandelt das typische Zusammenwirken von Strömung, Transportvorgängen und Wärmefreisetzung durch Reaktion in reaktiven Strömungen und ist Teil des Lehrbuches und Nachschlagewerkes H. Oertel jr. Prandtl-Führer durch die Strömungslehre. Es gliedert sich in die Abschnitte reaktionskinetische Grundlagen, laminare und turbulente Strömungen. Zu diesen Klassen reaktiver Strömungen werden jeweils typische Anwendungen vorgestellt, wobei die Entwicklung von Modellvorstellungen, unterstützt durch experimentelle Beobachtungen, im Vordergrund steht. Spezifische Aspekte der Strömungsmechanik reaktiver Strömungen, wie zum Beispiel die Dichteänderung durch Reaktion und Wärmefreisetzung, stehen im Mittelpunkt. Sie werden ergänzt durch spezifische Problemstellungen der Reaktionskinetik, wie die Oxidation von Kohlenwasserstoffen oder die Analyse von Reaktionsmechanismen.

1 Grundlagen reaktiver Strömungen

Verbrennungsprozesse als das wichtigste Beispiel einer chemisch reaktiven Strömung sind die ältesten und zugleich eine der erfolgreichsten Techniken, deren sich der Mensch bedient. Trotz aller Bemühungen um alternative Energiequellen beruhen derzeit immer noch über 80 % der Weltenergieversorgung auf der Nutzung von Verbrennungsprozessen. Auf Grund ihres breiten Anwendungsspektrums (Wärme, Strom, Verkehr und Chemie) werden gegenwärtig jährlich weltweit fossile Energievorräte verbraucht, die sich in etwa 1 Million Jahren der Erdgeschichte

U. Riedel (✉)
Institut für Verbrennungstechnik der Luft- u. Raumfahrt, Universität Stuttgart und Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Stuttgart, Deutschland
E-Mail: Uwe.Riedel@dlr.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5_10

gebildet haben. Die hierbei entstehenden Schadstoffe wie zum Beispiel CO_2, Stickoxide und Ruß führen zu unerwünschten Veränderungen in der Atmosphäre und Biosphäre der Erde, wie sie in Kap. 11 ▸ Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean, Abschn. 4 beschrieben werden.

Reaktive Strömungen und damit auch Verbrennungsprozesse sind durch eine komplexe mehrdimensionale und zeitabhängige Wechselwirkung zwischen einer großen Zahl von chemischen Elementarreaktionen und Transportvorgängen für Masse, Impuls und Energie sowie Phasengrenzeffekten bestimmt. Empirische Verfahren zur Entwicklung oder Verbesserung umweltfreundlicher und effizienter neuer Verfahren sind weitgehend ausgeschöpft. Es ist vielmehr ein neuer Ansatz notwendig. Dieser Ansatz besteht darin, reaktive Strömungen nicht mehr summarisch zu beschreiben, sondern aus den mikroskopischen Prozessen zusammenzusetzen und daraus die sichtbaren makroskopischen Wirkungen abzuleiten. Auf diese Weise ist es zum Beispiel möglich, die Bildung von Schadstoffen, den unvollständigen Ablauf der Verbrennung oder die Wirkungsweise von Katalysatoren von den Ursachen her zu erklären.

Dabei spielen sowohl die berührungsfreie Analyse von Verbrennungsprozessen mit Hilfe der optischen Spektroskopie als auch die Mathematische Modellierung und Simulation eine zentrale Rolle. Durch Fortschritte in der Lasertechnik ist es möglich geworden, die während der Verbrennung oft nur sehr kurzzeitig auftretenden chemisch instabilen Teilchen mit Laserlicht quantitativ zu erfassen und damit Einblick in den mikroskopischen Reaktionsablauf in der Flamme zu erhalten. Das zunehmende Interesse an einer mathematischen Beschreibung von Verbrennungsprozessen (Modellierung) und Lösung der entwickelten Modellgleichungen auf dem Rechner (Simulation) hat mehrere Ursachen. Simulationen verringern den Aufwand experimenteller Untersuchungen durch Hinweise auf möglicherweise vorteilhafte Bedingungen und erlauben so den gezielten Entwurf und die gezielte Durchführung von Experimenten. Auf der Basis zuverlässiger Simulationen lassen sich dann Systeme optimieren, in denen Experimente sehr aufwendig oder unmöglich sind. Simulationen erlauben darüber hinaus auch die Erkennung systematischer Fehler und die Auswertung von indirekten Messergebnissen (Parameteridentifikation).

Modellierung und Simulation leisten einen detaillierten Einblick in die der Verbrennung zu Grunde liegenden physikalisch-chemischen Prozesse. In der Simulation erhält man räumlich und zeitlich aufgelöste Verteilungen aller Systemgrößen wie zum Beispiel Temperatur und Konzentrationen der am Verbrennungsablauf beteiligten Spezies. Zusätzlich lässt sich durch den Vergleich detaillierter und vereinfachter Modelle der Einfluss von bestimmten Vereinfachungen durch das *Ein- und Ausschalten* physikalisch-chemischer Effekte erfassen.

Das für reaktive Strömungen typische Zusammenwirken von Strömung, Diffusion und Wärmefreisetzung durch Reaktion kann man vereinfacht am Beispiel einer Bunsenbrennerflamme illustrieren (Abb. 10.1). Aus einer Düse strömt Brennstoff in ruhende Luft. Durch molekularen Transport (Diffusion) vermischen sich Brennstoff und Luft und verbrennen in der Reaktionszone. Für diese einfache Geometrie lässt sich die Höhe einer Strahlflamme mittels einer vereinfachenden Betrachtung abschätzen.

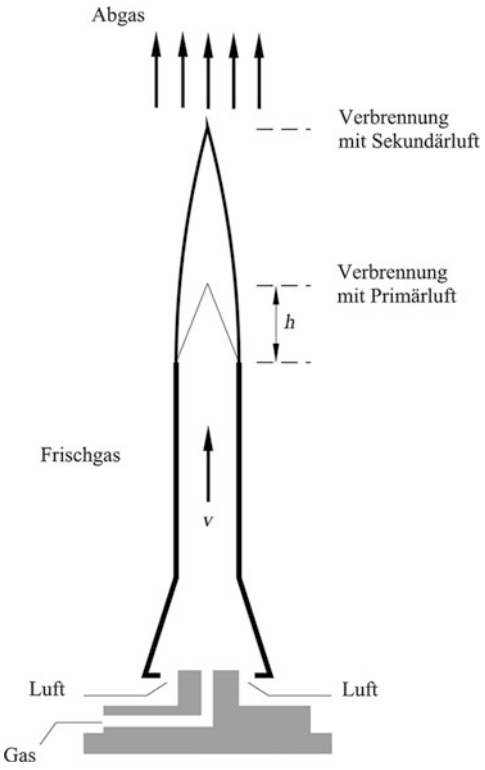


Abb. 10.1 Bunsenbrennerflamme

Der Strahlradius sei r, die Flammenhöhe h und die Geschwindigkeit in Strahlrichtung v. Im Zentrum des Zylinders lässt sich die Zeit, die der Brennstoff benötigt, um bis zur Strahlspitze zu gelangen, aus der Höhe der nicht-vorgemischten Flamme und der Einströmgeschwindigkeit berechnen ($t = h/v$). Diese Zeit entspricht der Zeit, die für die Vermischung von Brennstoff und Luft benötigt wird. Diese Vermischungszeit lässt sich aus dem Einsteinschen Verschiebungssatz für die Eindringtiefe durch Diffusion ($r^2 = 2 \cdot D \cdot t$, $D =$ Diffusionskoeffizient) bestimmen. Gleichsetzen über die Zeit t ergibt dann die Gleichung $h = r^2 \cdot v/(2 \cdot D)$. Ersetzt man nun die Geschwindigkeit v durch den Volumenstrom $\dot{V} = \pi \cdot r^2 \cdot v$, so ergibt sich $h = \dot{V}/(2 \cdot \pi \cdot D)$. Aus dieser Betrachtung folgt, dass die Flammenhöhe h nur vom Volumenstrom $\dot{V}$ abhängt, nicht jedoch vom Düsendurchmesser r. Die Höhe ist umgekehrt proportional zum Diffusionskoeffizienten, weshalb z. B. eine Wasserstoff-Flamme etwa 2,5 mal niedriger ist als eine Kohlenmonoxid-Flamme.

Allgemeines Ziel dieses Kapitels über chemisch reaktive Strömungen ist es, die Kopplung zwischen chemischer Reaktion und Strömung zu beschreiben. Es gliedert sich in die Abschnitte reaktionskinetische Grundlagen, laminare Strömungen und turbulente Strömungen. Zu diesen Klassen reaktiver Strömungen werden jeweils typische Anwendungen vorgestellt, wobei die Entwicklung von Modellvorstellungen, unterstützt durch experimentelle Beobachtungen, im Vordergrund steht.

Spezifische Aspekte der Strömungsmechanik reaktiver Strömungen, wie zum Beispiel die Dichteänderung durch Reaktion und Wärmefreisetzung, stehen im Mittelpunkt. Sie werden ergänzt durch spezifische Problemstellungen der Reaktionskinetik, wie die Oxidation von Kohlenwasserstoffen, die Analyse von Reaktionsmechanismen oder heterogene chemische Reaktionen.

Über eine rein phänomenologische Beschreibung hinaus finden sich in allen Teilen des Kapitels Hinweise, wie die verschiedenen Strömungen modelliert und diese Modelle in Gleichungen übersetzt werden können.

1.1 Zeitgesetz und Reaktionsordnung

Unter dem Zeitgesetz für eine chemische Reaktion, die in einer allgemeinen Schreibweise gegeben sein soll durch

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \ldots \quad \stackrel{k^{(\mathrm{f})}}{\longrightarrow} \quad \mathrm{D} + \mathrm{E} + \mathrm{F} + \ldots \,, \tag{10.1}$$

wobei A, B, C, ... verschiedene an der Reaktion beteiligte Stoffe bezeichnen, versteht man einen empirischen Ansatz für die *Reaktionsgeschwindigkeit*, d. h. der Geschwindigkeit, mit der ein an der Reaktion beteiligter Stoff gebildet oder verbraucht wird. Betrachtet man z. B. den Stoff A, so lässt sich die Reaktionsgeschwindigkeit in der Form

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = -k^{(\mathrm{f})} \cdot [\mathrm{A}]^a \cdot [\mathrm{B}]^b \cdot [\mathrm{C}]^c \cdot \ldots \tag{10.2}$$

darstellen. Dabei sind a, b, c, ... die *Reaktionsordnungen* bezüglich der Stoffe A, B, C, ... und $k^{(\mathrm{f})}$ ist der *Geschwindigkeitskoeffizient* der chemischen Reaktion. Die Summe aller Exponenten ist die *Gesamt-Reaktionsordnung* der Reaktion.

Oft liegen einige Stoffe im Überschuss vor. In diesem Fall ändern sich ihre Konzentrationen nur unmerklich. Bleiben z. B. [B], [C], ... während der Reaktion annähernd konstant, so lässt sich aus dem Geschwindigkeitskoeffizienten und den Konzentrationen der Stoffe im Überschuss ein neuer Geschwindigkeitskoeffizient definieren und man erhält z. B. mit $k = k^{(\mathrm{f})} \cdot [\mathrm{B}]^b \cdot [\mathrm{C}]^c \cdot \ldots$

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = -k \cdot [\mathrm{A}]^a \,. \tag{10.3}$$

Aus diesem Zeitgesetz lässt sich durch Integration (Lösung der Differentialgleichung) der zeitliche Verlauf der Konzentration des Stoffes A bestimmen.

Für *Reaktionen 1. Ordnung* ($a = 1$) ergibt sich durch Integration aus Gl. (10.3) das Zeitgesetz 1. Ordnung:

$$\ln \frac{[\mathrm{A}]_t}{[\mathrm{A}]_0} = -k \cdot (t - t_0) \,, \tag{10.4}$$

wobei $[\mathrm{A}]_0$ und $[\mathrm{A}]_t$ die Konzentrationen des Stoffes A zur Zeit t_0 bzw. t bezeichnen.

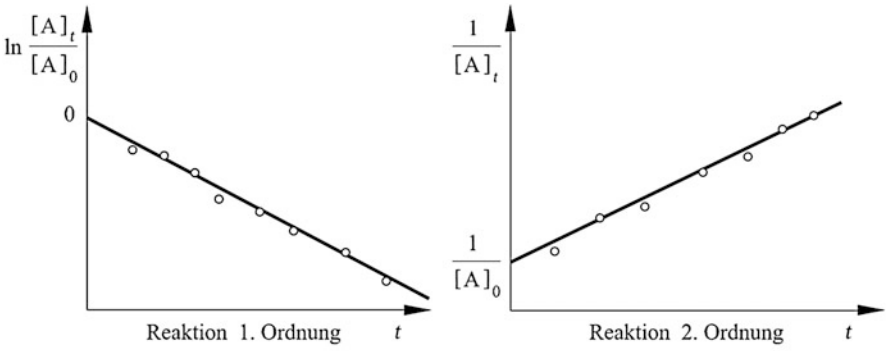


Abb. 10.2 Zeitliche Verläufe der Konzentrationen bei Reaktionen 1. und 2. Ordnung

Auf ganz entsprechende Weise ergibt sich für *Reaktionen 2. Ordnung* ($a = 2$) das Zeitgesetz:

$$\frac{1}{[\mathrm{A}]_t} - \frac{1}{[\mathrm{A}]_0} = k \cdot (t - t_0) \tag{10.5}$$

und für *Reaktionen 3. Ordnung* ($a = 1$) das Zeitgesetz:

$$\frac{1}{[\mathrm{A}]_t^2} - \frac{1}{[\mathrm{A}]_0^2} = 2 \cdot k \cdot (t - t_0) \ . \tag{10.6}$$

Wird der zeitliche Verlauf der Konzentration während einer chemischen Reaktion experimentell bestimmt, so lässt sich daraus die Reaktionsordnung ermitteln. Eine logarithmische Auftragung der Konzentration gegen die Zeit für Reaktionen 1. Ordnung bzw. eine Auftragung von $1/[\mathrm{A}]_t$ gegen die Zeit für Reaktionen 2. Ordnung ergeben lineare Verläufe (Abb. 10.2).

1.2 Zusammenhang von Vorwärts- und Rückwärtsreaktion

Für die Rückreaktion von Reaktion Gl. (10.1) gilt analog zu Gl. (10.2) das Zeitgesetz:

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = k^{(\mathrm{r})} \cdot [\mathrm{D}]^d \cdot [\mathrm{E}]^e \cdot [\mathrm{F}]^f \cdot \ldots \ . \tag{10.7}$$

Im chemischen Gleichgewicht laufen mikroskopisch Hin- und Rückreaktion gleich schnell ab (die Hinreaktion wird durch Superskript (f), die Rückreaktion durch Superskript (r) gekennzeichnet). Makroskopisch ist kein Umsatz mehr zu beobachten. Aus diesem Grund gilt im chemischen Gleichgewicht

$$k^{(\mathrm{f})} \cdot [\mathrm{A}]^a \cdot [\mathrm{B}]^b \cdot [\mathrm{C}]^c \cdot \ldots = k^{(\mathrm{r})} \cdot [\mathrm{D}]^d \cdot [\mathrm{E}]^e \cdot [\mathrm{F}]^f \cdot \ldots \tag{10.8}$$

bzw.

$$\frac{[\mathrm{D}]^d \cdot [\mathrm{E}]^e \cdot [\mathrm{F}]^f \cdot \ldots}{[\mathrm{A}]^a \cdot [\mathrm{B}]^b \cdot [\mathrm{C}]^c \cdot \ldots} = \frac{k^{(\mathrm{f})}}{k^{(\mathrm{r})}} \,. \tag{10.9}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite entspricht der Gleichgewichtskonstanten K_c der Reaktion, die sich aus thermodynamischen Daten bestimmen lässt, so dass für die Beziehung zwischen den Geschwindigkeitskoeffizienten von Hin- und Rückreaktion gilt:

$$K_c = \frac{k^{(\mathrm{f})}}{k^{(\mathrm{r})}} = \exp\left(-\frac{\Delta_\mathrm{R}\overline{F}^0}{R \cdot T}\right), \tag{10.10}$$

mit der freien Energie $\Delta_\mathrm{R}\overline{F}^0$.

1.3 Elementarreaktionen und Reaktionsmolekularität

Eine *Elementarreaktion* ist eine Reaktion, die auf molekularer Ebene genau so abläuft, wie es die Reaktionsgleichung beschreibt. Die an der Wasserstoffverbrennung wesentlich beteiligte Reaktion von Hydroxi-Radikalen (OH) mit molekularem Wasserstoff (H_2) zu Wasser und Wasserstoffatomen

$$\mathrm{OH} + \mathrm{H_2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{H_2O} + \mathrm{H} \tag{10.11}$$

zum Beispiel ist eine solche Elementarreaktion. Durch die Bewegung der Moleküle im Gas treffen Hydroxi-Radikale mit Wasserstoffmolekülen zusammen. Bei nichtreaktiven Stößen kollidieren die Moleküle und fliegen wieder auseinander. Bei reaktiven Stößen jedoch reagieren die Moleküle und die Produkte H_2O und H werden gebildet. Die Reaktion

$$2\,\mathrm{H_2} + \mathrm{O_2} \quad \rightarrow \quad 2\,\mathrm{H_2O} \tag{10.12}$$

ist dagegen keine Elementarreaktion, denn bei ihrer detaillierten Untersuchung bemerkt man, dass als Zwischenprodukte die reaktiven Teilchen H, O und OH auftreten und auch Spuren von anderen Endprodukten als H_2O auftreten. Man spricht dann von *zusammengesetzten Reaktionen, komplexen Reaktionen* oder *Bruttoreaktion*. Diese zusammengesetzten Reaktionen haben meistens recht komplizierte Zeitgesetze der Form Gl. (10.2) oder noch komplexere. Die Reaktionsordnungen a, b, c, ... sind im Allgemeinen nicht ganzzahlig, können auch negative Werte annehmen (*Inhibierung*) und hängen von der Zeit und von den Versuchsbedingungen ab. Eine Extrapolation auf Bereiche, in denen keine Messungen vorliegen, ist äußerst unzuverlässig oder sogar unsinnig. Eine reaktionskinetische Interpretation dieser Zeitgesetze ist normalerweise nicht möglich.

Zusammengesetzte Reaktionen lassen sich jedoch in allen Fällen (zumindest im Prinzip) in eine Vielzahl von Elementarreaktionen zerlegen. Dies ist meist sehr mühsam und aufwendig. Die Wasserbildung Gl. (10.12) lässt sich z. B. durch 38 Elementarreaktionen beschreiben, die im Folgenden im H_2-O_2-System bei $p = 1\ bar$ dargestellt sind:

Reaktion									A	b	E
									$[cm \cdot mol \cdot s]$	[-]	$[kJ/mol]$
H_2-O_2-Reaktionen (HO_2, H_2O_2 ausgeschlossen)											
O_2	+	H			=	OH	+	O	$2.00 \cdot 10^{14}$	0.00	70.30
H_2	+	O			=	OH	+	H	$5.06 \cdot 10^{04}$	2.67	26.30
H_2	+	OH			=	H_2O	+	H	$1.00 \cdot 10^{08}$	1.60	13.80
OH	+	OH			=	H_2O	+	O	$1.50 \cdot 10^{09}$	1.14	0.42
H	+	H	+	$M^\star$	=	H_2	+	$M^\star$	$1.80 \cdot 10^{18}$	−1.00	0.00
O	+	O	+	$M^\star$	=	O_2	+	$M^\star$	$2.90 \cdot 10^{17}$	−1.00	0.00
H	+	OH	+	$M^\star$	=	H_2O	+	$M^\star$	$2.20 \cdot 10^{22}$	−2.00	0.00
HO_2-Bildung/Verbrauch											
H	+	O_2	+	$M^\star$	=	HO_2	+	$M^\star$	$2.30 \cdot 10^{18}$	−0.80	0.00
HO_2	+	H			=	OH	+	OH	$1.50 \cdot 10^{14}$	0.00	4.20
HO_2	+	H			=	H_2	+	O_2	$2.50 \cdot 10^{13}$	0.00	2.90
HO_2	+	H			=	H_2O	+	O	$3.00 \cdot 10^{13}$	0.00	7.20
HO_2	+	O			=	OH	+	O_2	$1.80 \cdot 10^{13}$	0.00	−1.70
HO_2	+	OH			=	H_2O	+	O_2	$6.00 \cdot 10^{13}$	0.00	0.00
H_2O_2-Bildung/Verbrauch											
HO_2	+	HO_2			=	H_2O_2	+	O_2	$2.50 \cdot 10^{11}$	0.00	−5.20
OH	+	OH	+	$M^\star$	=	H_2O_2	+	$M^\star$	$3.25 \cdot 10^{22}$	−2.00	0.00
H_2O_2	+	H			=	H_2	+	HO_2	$1.70 \cdot 10^{12}$	0.00	15.7
H_2O_2	+	H			=	H_2O	+	OH	$1.00 \cdot 10^{13}$	0.00	15.0
H_2O_2	+	O			=	OH	+	HO_2	$2.80 \cdot 10^{13}$	0.00	26.8
H_2O_2	+	OH			=	H_2O	+	HO_2	$5.40 \cdot 10^{12}$	0.00	4.20

Die Geschwindigkeitskoeffizienten sind in der Form $k = A \cdot T^b \cdot \exp(-E/R \cdot T)$ angegeben, $[M^\star] = [H_2] + 6.5 \cdot [H_2O] + 0.4 \cdot [O_2] + 0.4 \cdot [N_2]$ und der Geschwindigkeitskoeffizient der Rückreaktion wird mit Gl. (10.10) berechnet.

Das Konzept der Elementarreaktionen ist äußerst vorteilhaft. Die Reaktionsordnung von Elementarreaktionen ist unter allen Umständen (insbesondere unabhängig von der Zeit und von irgendwelchen Versuchsbedingungen) gleich und leicht zu ermitteln. Dazu betrachtet man die *Molekularität* einer Reaktion als Zahl der zum Reaktionskomplex (das ist der Übergangszustand der Moleküle während der Reaktion) führenden Teilchen. Es gibt nur drei in der Praxis wesentliche Werte der Reaktionsmolekularität:

Unimolekulare Reaktionen beschreiben den Zerfall oder die Umlagerung eines Moleküls,

$$\text{A} \quad \rightarrow \quad \text{Produkte}\,. \tag{10.13}$$

Sie besitzen ein Zeitgesetz erster Ordnung. Bei Verdoppelung der Ausgangskonzentration verdoppelt sich auch die Reaktionsgeschwindigkeit.

Bimolekulare Reaktionen sind der am häufigsten vorkommende Reaktionstyp. Sie erfolgen gemäß den Reaktionsgleichungen

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \quad \rightarrow \qquad \text{Produkte} \tag{10.14}$$

bzw. $\mathrm{A} + \mathrm{A} \rightarrow$ Produkte. Bimolekulare Reaktionen haben immer ein Zeitgesetz zweiter Ordnung. Die Verdoppelung der Konzentration jedes einzelnen Partners trägt jeweils zur Verdoppelung der Reaktionsgeschwindigkeit bei.

Trimolekulare Reaktionen sind meist Rekombinationsreaktionen. Sie befolgen grundsätzlich ein Zeitgesetz dritter Ordnung,

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} \quad \rightarrow \qquad \text{Produkte} \tag{10.15}$$

bzw. $\mathrm{A} + \mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow$ Produkte oder $\mathrm{A} + \mathrm{A} + \mathrm{A} \rightarrow$ Produkte.

Allgemein gilt für Elementarreaktionen, dass die Reaktionsordnung der Reaktionsmolekularität entspricht. Daraus lassen sich die Zeitgesetze ableiten. Sei die Gleichung einer Elementarreaktion r gegeben durch

$$\sum_{s=1}^{S} \nu_{rs}^{(\mathrm{a})} \cdot \mathrm{A}_s \quad \xrightarrow{k_r} \quad \sum_{s=1}^{S} \nu_{rs}^{(\mathrm{p})} \cdot \mathrm{A}_s \,, \tag{10.16}$$

dann folgt für das Zeitgesetz der Bildung der Spezies i in der Reaktion r:

$$\frac{dc_i}{dt} = k_r \cdot \left(\nu_{ri}^{(\mathrm{p})} - \nu_{ri}^{(\mathrm{a})}\right) \cdot \prod_{s=1}^{S} c_s^{\nu_{rs}^{(\mathrm{a})}} \,. \tag{10.17}$$

Dabei sind $\nu_{rs}^{(a)}$ und $\nu_{rs}^{(p)}$ stöchiometrische Koeffizienten für Ausgangsstoffe bzw. Produkte und c_s Konzentrationen der S verschiedenen Stoffe s.

Betrachtet man z. B. die Elementarreaktion $\mathrm{H} + \mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{OH} + \mathrm{O}$, so erhält man auf diese Weise die Geschwindigkeitsgesetze:

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{H}]}{\mathrm{d}t} = -k \cdot [\mathrm{H}] \cdot [\mathrm{O_2}] \,, \qquad \frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{O_2}]}{\mathrm{d}t} = -k \cdot [\mathrm{H}] \cdot [\mathrm{O_2}] \,,$$
$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{OH}]}{\mathrm{d}t} = k \cdot [\mathrm{H}] \cdot [\mathrm{O_2}] \quad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{O}]}{\mathrm{d}t} = k \cdot [\mathrm{H}] \cdot [\mathrm{O_2}] \,.$$

Für die Elementarreaktion $\mathrm{OH} + \mathrm{OH} \rightarrow \mathrm{H_2O} + \mathrm{O}$ (oder $2\,\mathrm{OH} \rightarrow \mathrm{H_2O} + \mathrm{O}$) ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{OH}]}{\mathrm{d}t} = -2 \cdot k \cdot [\mathrm{OH}]^2 \,, \qquad \frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{H_2O}]}{\mathrm{d}t} = k \cdot [\mathrm{OH}]^2 \,, \qquad \frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{O}]}{\mathrm{d}t} = k \cdot [\mathrm{OH}]^2 \,.$$

Für *Reaktionsmechanismen*, die aus Sätzen von Elementarreaktionen bestehen, lassen sich demnach immer die Zeitgesetze bestimmen. Umfasst der Mechanismus alle möglichen Elementarreaktionen des Systems (vollständiger Mechanismus), so gilt er für alle möglichen Bedingungen, d. h. für alle Temperaturen und Zusammensetzungen. Für einen Mechanismus bestehend aus R Reaktionen von S Stoffen, die gegeben sind durch

$$\sum_{s=1}^{S} \nu_{rs}^{(a)} \cdot \mathrm{A}_s \quad \xrightarrow{k_r} \quad \sum_{s=1}^{S} \nu_{rs}^{(p)} \cdot \mathrm{A}_s\,, \quad \text{mit} \qquad r = 1, \ldots, R\,, \tag{10.18}$$

ergibt sich die Bildungsgeschwindigkeit einer Spezies i durch Summation über die Zeitgesetze Gl. (10.17) in den einzelnen Elementarreaktionen:

$$\frac{dc_i}{dt} = \sum_{r=1}^{R} k_r \cdot \left(\nu_{ri}^{(\mathrm{p})} - \nu_{ri}^{(\mathrm{a})}\right) \cdot \prod_{s=1}^{S} c_s^{\nu_{rs}^{(\mathrm{a})}}\,, \quad \text{mit} \qquad i = 1, \ldots, S\,. \tag{10.19}$$

1.4 Temperaturabhängigkeit von Geschwindigkeitskoeffizienten

Ein ganz wichtiges und typisches Charakteristikum chemischer Reaktionen ist, dass ihre Geschwindigkeitskoeffizienten extrem stark und nichtlinear von der Temperatur abhängen und auf diese Weise Verbrennungsvorgänge in ihrem abrupten Ablauf ganz typisch prägen können. Nach Arrhenius (1889) kann man diese Temperaturabhängigkeit in relativ einfacher Weise beschreiben durch den Ansatz (*Arrhenius-Gleichung*):

$$k = A \cdot \exp\left(-\frac{E_\mathrm{a}}{R \cdot T}\right). \tag{10.20}$$

Bei genauen Messungen bemerkt man oft auch noch eine (im Vergleich zur exponentiellen Abhängigkeit geringe) Temperaturabhängigkeit des *präexponentiellen Faktors* A:

$$k = A' \cdot T^b \cdot \exp\left(-\frac{E'_\mathrm{a}}{R \cdot T}\right). \tag{10.21}$$

Die *Aktivierungsenergie* E_a entspricht einer Energieschwelle, die beim Ablauf der Reaktion überwunden werden muss (siehe Abb. 10.3). Sie entspricht maximal den beteiligten Bindungsenergien (z. B. ist die Aktivierungsenergie bei Dissoziationsreaktionen etwa gleich der Bindungsenergie der betroffenen chemischen Bindung), kann aber auch wesentlich kleiner sein (bis zu Null), wenn simultan zur Bindungsbrechung auch neue Bindungen geknüpft werden.

Abb. 10.4 zeigt exemplarisch die Temperaturabhängigkeit einiger Elementarreaktionen (Reaktionen von Halogenatomen mit molekularem Wasserstoff). Aufgetragen sind die Logarithmen der Geschwindigkeitskoeffizienten k gegen den Kehrwert der Temperatur. Gemäß Gl. (10.20) ergibt sich eine lineare Abhängigkeit

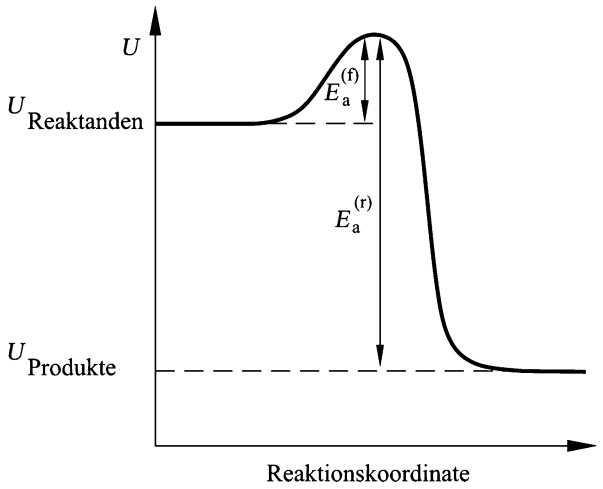


Abb. 10.3 Energiediagramm für eine chemische Elementarreaktion. Die Beziehung $E_a^{(f)} - E_a^{(r)} = U_{\text{Produkte}} - U_{\text{Reaktanden}}$ ist eine Folge von Gl. (10.10). Die Reaktionskoordinate ist der Weg minimaler potentieller Energie zwischen Reaktanden und Produkten im Hinblick auf die sich ändernden interatomaren Abstände (siehe z. B. *W. P. Atkins* (2013))

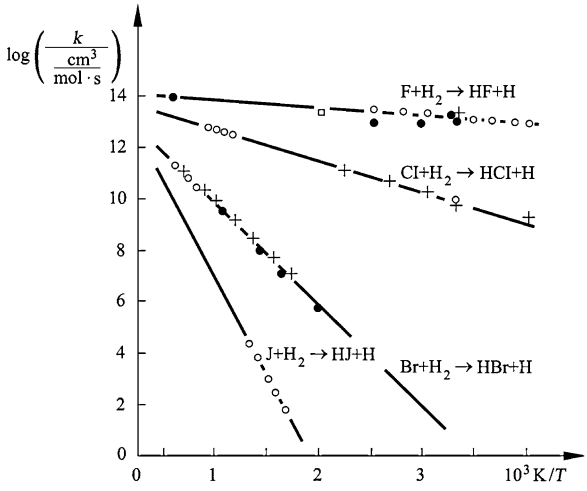


Abb. 10.4 Temperaturabhängigkeit $k = k(T)$ für die Reaktionen von Halogen-Atomen mit H_2 (Homann et al. 1970)

$(\log(k) = \log(A) - \text{konst.}/T)$. Eine eventuelle Temperaturabhängigkeit des präexponentiellen Faktors wird durch die Messfehler verdeckt.

Bei verschwindender Aktivierungsenergie oder sehr hohen Temperaturen nähert sich der Exponentialterm in Gl. (10.20) dem Wert 1. Die Reaktionsgeschwindigkeit wird dann allein vom präexponentiellen Faktor A bzw. $A' \cdot T^b$ bestimmt. Dieser Faktor hat bei uni-, bi- und trimolekularen Reaktionen verschiedene physikalische Bedeutungen.

Für unimolekulare Reaktionen entspricht der Kehrwert von A einer mittleren Lebensdauer eines reaktiven (aktivierten) Moleküls. Bei Dissoziationsreaktionen wird diese Lebensdauer bestimmt durch die Frequenz, mit der die an der Molekülbindung beteiligten Atome schwingen. Der präexponentielle Faktor ist danach gegeben durch die doppelte Schwingungsfrequenz der betroffenen Bindung. Aus den üblichen Schwingungsfrequenzen in Molekülen ergibt sich $A \approx 10^{14}-10^{15}\,s^{-1}$.

Bei bimolekularen Reaktionen entspricht der präexponentielle Faktor A einer *Stoßzahl*, d. h. der Anzahl von Stößen zwischen zwei Molekülen pro Zeiteinheit, denn durch die Stoßzahl wird die Reaktionsgeschwindigkeit bei fehlender Aktivierungsschwelle oder sehr großer Temperatur nach oben begrenzt. Die kinetische Gastheorie liefert Zahlenwerte für A zwischen 10^{13} und $10^{14}\ \mathrm{cm^3/(mol \cdot s)}$.

Für trimolekulare Reaktionen muss während des bimolekularen Stoßes ein dritter Partner den Stoßkomplex treffen, der die bei der Reaktion freiwerdende Energie aufnimmt (*Stoßpartner*). Stoßen z. B. zwei Wasserstoffatome aufeinander, so würde ein kurzzeitig gebildetes Wasserstoffmolekül wegen der großen vorhandenen Energie sofort wieder zerfallen. Da sehr schwer zu definieren ist, wann der Stoß dreier Moleküle als hinreichend gleichzeitig zu bezeichnen ist, lassen sich Zahlenwerte nur schlecht berechnen.

1.5 Druckabhängigkeit von Geschwindigkeitskoeffizienten

Die Druckabhängigkeit von Reaktionsgeschwindigkeitskoeffizienten von Dissoziations- und Rekombinationsreaktionen beruht darauf, dass hier komplexe Reaktionsfolgen als Elementarreaktionen behandelt werden. Im einfachsten Fall lassen sich die Verhältnisse anhand des *Lindemann-Modells* verstehen. Ein unimolekularer Zerfall eines Moleküls ist nur dann möglich, wenn das Molekül eine zur Spaltung einer Bindung ausreichende Energie besitzt. Aus diesem Grund ist es notwendig, dass vor der eigentlichen Bindungsspaltung dem Molekül durch einen Stoß mit einem anderen Teilchen Energie zugeführt wird, welche z. B. zur Anregung der inneren Molekülschwingungen dient. Das so angeregte Molekül $\mathrm{A}^\star$ kann dann in die Reaktionsprodukte zerfallen:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A} + \mathrm{M} \xrightarrow{k_\mathrm{a}} \mathrm{A}^\star + \mathrm{M} && \text{(Aktivierung)}\,,\\
&\mathrm{A}^\star + \mathrm{M} \xrightarrow{k_{-\mathrm{a}}} \mathrm{A} + \mathrm{M} && \text{(Deaktivierung)}\,,\\
&\mathrm{A}^\star \xrightarrow{k_\mathrm{u}} \text{Produkte} && \text{(unimolekulare Reaktion)}\,.
\end{aligned} \tag{10.22}$$

Für diesen Reaktionsmechanismus ergeben sich gemäß Abschn. 1.3 die Geschwindigkeitsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{P}]}{\mathrm{d}t} = k_\mathrm{u} \cdot [\mathrm{A}^\star]\,, \tag{10.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{A}^\star]}{\mathrm{d}t} = k_\mathrm{a} \cdot [\mathrm{A}] \cdot [\mathrm{M}] - k_{-\mathrm{a}} \cdot [\mathrm{A}^\star] \cdot [\mathrm{M}] - k_\mathrm{u} \cdot [\mathrm{A}^\star] \; . \tag{10.24}$$

Nimmt man an, dass die Konzentration des reaktiven Zwischenproduktes $[\mathrm{A}^\star]$ quasi-stationär ist (siehe Abschn. 1.6),

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{A}^\star]}{\mathrm{d}t} \approx 0 \, , \tag{10.25}$$

so folgt für die Konzentration des aktivierten Teilchens $\mathrm{A}^\star$ und die Bildung des Reaktionsproduktes P:

$$[\mathrm{A}^\star] = \frac{k_\mathrm{a} \cdot [\mathrm{A}] \cdot [\mathrm{M}]}{k_{-\mathrm{a}} \cdot [\mathrm{M}] + k_\mathrm{u}} \, , \tag{10.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{P}]}{\mathrm{d}t} = \frac{k_\mathrm{u} k_\mathrm{a} \cdot [\mathrm{A}] \cdot [\mathrm{M}]}{k_{-\mathrm{a}} \cdot [\mathrm{M}] + k_\mathrm{u}} \, . \tag{10.27}$$

Man unterscheidet nun zwei Extremfälle, nämlich Reaktionen bei sehr niedrigem und bei sehr hohem Druck.

Für den *Niederdruckbereich* ist die Konzentration der Stoßpartner M sehr gering. Mit $k_{-\mathrm{a}} \ll k_\mathrm{u}$ folgt daraus das vereinfachte Geschwindigkeitsgesetz 2. Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{P}]}{\mathrm{d}t} = k_\mathrm{a} \cdot [\mathrm{A}] \cdot [\mathrm{M}] \; . \tag{10.28}$$

Die Reaktionsgeschwindigkeit ist danach proportional zu den Konzentrationen des Stoffes A und des Stoßpartners M, da bei niedrigem Druck die Aktivierung des Moleküls langsam und somit geschwindigkeitsbestimmend ist.

Für den *Hochdruckbereich* ist die Konzentration der Stoßpartner M sehr hoch und mit $k_{-\mathrm{a}} \gg k_\mathrm{u}$ erhält man das vereinfachte Geschwindigkeitsgesetz 1. Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{P}]}{\mathrm{d}t} = \frac{k_\mathrm{u} \cdot k_\mathrm{a}}{k_{-\mathrm{a}}} \cdot [\mathrm{A}] = k_\infty \cdot [\mathrm{A}] \; . \tag{10.29}$$

Die Reaktionsgeschwindigkeit ist hier unabhängig von der Konzentration der Stoßpartner, da bei hohem Druck sehr oft Stöße stattfinden und deshalb nicht die Aktivierung, sondern der Zerfall (Deaktivierung) des aktivierten Teilchens $\mathrm{A}^\star$ der geschwindigkeitsbestimmende Schritt ist.

Der Lindemann-Mechanismus ist ein einfaches Beispiel dafür, dass die Reaktionsordnungen bei einer komplexen Reaktion von den jeweiligen Bedingungen abhängen. Allerdings ist der Lindemann-Mechanismus selbst ein vereinfachtes Modell. Genaue Ergebnisse für die Druckabhängigkeit unimolekularer Reaktionen lassen sich mittels der *Theorie der unimolekularen Reaktionen* (siehe z. B. Robinson und Holbrook (1972); Homann (1975)) erhalten. Diese Theorie berücksichtigt, dass in der Realität nicht nur ein aktiviertes Teilchen $\mathrm{A}^\star$ vorliegt, sondern dass je nach Energieübertrag bei der Aktivierung verschiedene Aktivierungsgrade resultieren. Schreibt man das Geschwindigkeitsgesetz einer unimolekularen Reaktion gemäß

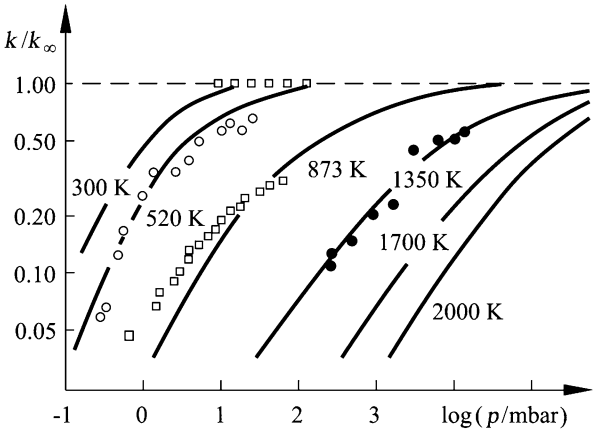


Abb. 10.5 Fall-Off-Kurven für den unimolekularen Zerfall $C_2H_6 \rightarrow CH_3 + CH_3$

$d[P]/dt = k \cdot [A]$, so ist der Geschwindigkeitskoeffizient k von Druck und Temperatur abhängig. Aus der Theorie der unimolekularen Reaktionen erhält man so genannte *Fall-Off-Kurven*, die die Abhängigkeit des Geschwindigkeitskoeffizienten k vom Druck für verschiedene Temperaturen beschreiben. Aufgetragen ist meist der Logarithmus von k gegen den Logarithmus von p. Typische Fall-Off-Kurven sind in Abb. 10.5 dargestellt. Für $p \rightarrow \infty$ nähert sich k dem Grenzwert k_∞, d. h. der Geschwindigkeitskoeffizient wird unabhängig vom Druck (Gl. (10.29)). Für niedrigen Druck ist der Geschwindigkeitskoeffizient k proportional zum Druck (Gl. (10.28)), und es ergibt sich eine lineare Abhängigkeit. Wie aus Abb. 10.5 ersichtlich ist, sind die Fall-Off-Kurven stark temperaturabhängig. Daher zeigen die Geschwindigkeitskoeffizienten unimolekularer Reaktionen für verschiedene Werte des Drucks oft stark unterschiedliche Temperaturabhängigkeiten (siehe Abb. 10.6). In Abb. 10.6 sind Geschwindigkeitskoeffizienten der Rückreaktion zu der in Abb. 10.5 gezeigten Reaktion dargestellt, die aus thermodynamischen Gründen die gleiche Druckabhängigkeit wie die Vorwärtsrektion haben muss. Konkurrierende bimolekulare Reaktionsschritte sind ebenso möglich, so dass sich insgesamt ein ziemlich komplexes Bild ergibt.

1.6 Eigenschaften von Reaktionsmechanismen

Unabhängig von dem speziellen Anwendungsfall weisen Reaktionsmechanismen einige charakteristische Eigenschaften auf. Eine Kenntnis dieser Charakteristiken trägt zum Verständnis der chemischen Reaktion bei und kann überaus wertvolle Hinweise für die spätere Vereinfachung von Reaktionsmechanismen liefern. Besonders erwähnenswert bei Verbrennungsprozessen sind dabei *Quasistationaritäten* und *partielle Gleichgewichte*, die im Folgenden eingehend behandelt werden.

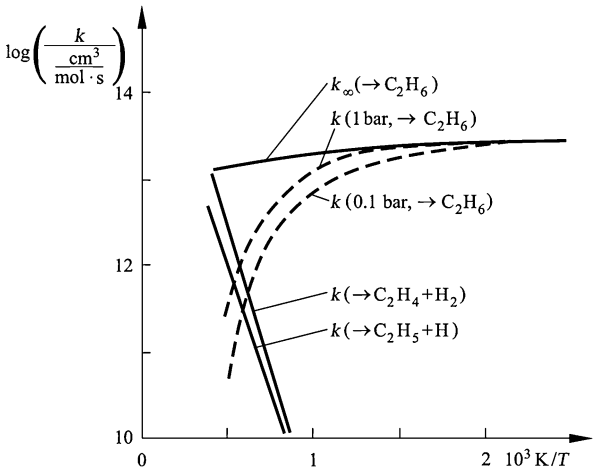


Abb. 10.6 Temperaturabhängigkeit der Geschwindigkeitskoeffizienten für die druckabhängige Reaktion $CH_3 + CH_3 \rightarrow$ Produkte

Quasistationarität

Es wird zur Veranschaulichung eine einfache Reaktionsfolge aus zwei Schritten betrachtet:

$$S_1 \xrightarrow{k_{12}} S_2 \xrightarrow{k_{23}} S_3 \,. \tag{10.30}$$

Die Zeitgesetze für die auftretenden Stoffe sind dann gegeben durch die Ausdrücke

$$\frac{\mathrm{d}\,[S_1]}{\mathrm{d}t} = -k_{12} \cdot [S_1] \,, \tag{10.31}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,[S_2]}{\mathrm{d}t} = k_{12} \cdot [S_1] - k_{23} \cdot [S_2] \,, \tag{10.32}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,[S_3]}{\mathrm{d}t} = k_{23} \cdot [S_2] \,. \tag{10.33}$$

Es wird nun angenommen, dass S_2 ein sehr reaktives und daher kurzlebiges Teilchen ist ($k_{23} \gg k_{12}$). Abb. 10.7 zeigt für das Verhältnis $k_{12}/k_{23} = 0.1$ den Verlauf der Konzentrationen. Der Ausgangsstoff S_1 nimmt mit der Zeit ab, während das Endprodukt S_3 gebildet wird. Da $k_{23} \gg k_{12}$, tritt das Zwischenprodukt S_2 nur in einer sehr geringen Konzentration auf. Sobald es in dem langsamen ersten Schritt der Reaktionsfolge gebildet wird, wird es durch die sehr schnelle Folgereaktion verbraucht. Das führt zu einer *Quasistationarität* des Zwischenprodukts.

Da S_2 sehr reaktiv sein soll, muss die Verbrauchsgeschwindigkeit von S_2 ungefähr gleich der Bildungsgeschwindigkeit von S_2 sein (*Quasistationaritätsannahme*), so dass man angenähert schreiben kann:

$$\frac{\mathrm{d}\,[S_2]}{\mathrm{d}t} = k_{12} \cdot [S_1] - k_{23} \cdot [S_2] \approx 0 \,. \tag{10.34}$$

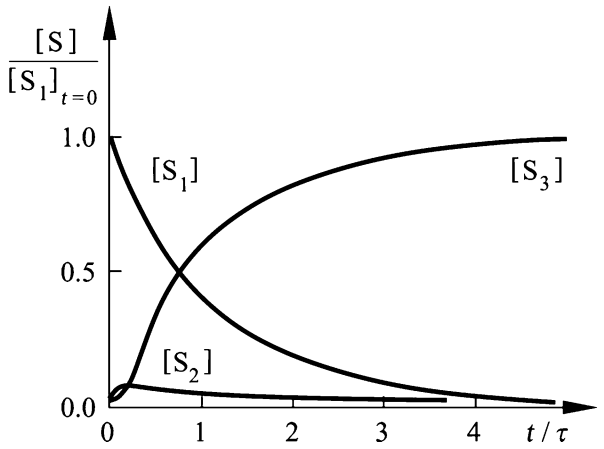


Abb. 10.7 Exakter zeitlicher Verlauf der Reaktion $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$; τ = Lebensdauer von S_1 (Zeit für den Abfall von $[S_1]$ auf $[S_1]/e$)

Der zeitliche Verlauf der Konzentration von S_1 lässt sich bestimmen, da Gl. (10.31) integrierbar ist. Man erhält:

$$[S_1] = [S_1]_0 \cdot \exp(-k_{12} \cdot t) \,. \tag{10.35}$$

Interessiert man sich für die Geschwindigkeit der Bildung des Endproduktes S_3, so liefert Gl. (10.33) nur eine schlecht zu gebrauchende Aussage, da nur die Konzentration des schwer zu fassenden Zwischenproduktes S_2 im Geschwindigkeitsgesetz für S_3 auftaucht. Mit Hilfe der Quasistationaritätsannahme Gl. (10.34) erhält man jedoch eine einfach verwendbare Formulierung:

$$\frac{\mathrm{d}[S_3]}{\mathrm{d}t} = k_{12} \cdot [S_1] \,. \tag{10.36}$$

Durch Einsetzen von Gl. (10.35) in diesen Ausdruck ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}[S_3]}{\mathrm{d}t} = k_{12} \cdot [S_1]_0 \cdot \exp(-k_{12} \cdot t) \,, \tag{10.37}$$

die sich integrieren lässt. Es ergibt sich dabei als Lösung die Gleichung:

$$[S_3] = [S_1]_0 \cdot [1 - \exp(-k_{12} \cdot t)] \,. \tag{10.38}$$

Die Ergebnisse für das oben angegebene Beispiel sind in Abb. 10.8 dargestellt. Man erkennt anhand eines Vergleiches der Abb. 10.7 und Abb. 10.8, dass die Quasistationaritätsannahme eine gute Näherung für den Prozess darstellt. Lediglich

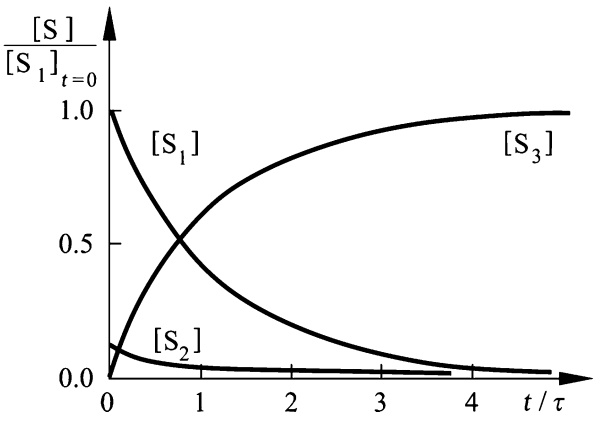


Abb. 10.8 Zeitlicher Verlauf der Reaktion $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$ bei Quasistationarität für S_2

zu Beginn der Reaktion ergeben sich geringe Abweichungen, aber nach einer sehr kurzen Zeit gilt in guter Näherung:

$$[S_2] = \frac{k_{12}}{k_{23}} [S_1] \; . \tag{10.39}$$

Partielle Gleichgewichte

Es wird hier der in Abschn. 1.3 dargestellte Mechanismus für die Wasserstoff-Verbrennung betrachtet. Eine Analyse von Experimenten oder Simulationen ergibt, dass für hohe Temperaturen ($T > 1800$ K bei $p = 1$ bar) die Reaktionsgeschwindigkeiten von Vorwärts- und Rückreaktionen so schnell sind, dass sich für die Reaktionen

$$\begin{aligned} &OH + H_2 = H_2O + H \; , \\ &H + O_2 = OH + O \; , \\ &O + H_2 = OH + H \end{aligned}$$

ein so genanntes *partielles Gleichgewicht* einstellt, bei dem sich jedes der einzelnen Reaktionspaare im Gleichgewicht befindet. Vorwärts- und Rückreaktion sind danach gleich schnell und es folgt durch Gleichsetzen der Reaktionsgeschwindigkeiten:

$$[H] = \left(\frac{k_1^2 \cdot k_3 \cdot k_5 \cdot [O_2] \cdot [H_2]^3}{k_2 \cdot k_4 \cdot k_6 \cdot [H_2O]^2} \right)^{\frac{1}{2}} \; , \tag{10.40}$$

$$[O] = \frac{k_1 \cdot k_3 \cdot [O_2] \cdot [H_2]}{k_2 \cdot k_4 \cdot [H_2O]} \; , \tag{10.41}$$

$$[OH] = \left(\frac{k_3 \cdot k_5}{k_4 \cdot k_6} \cdot [O_2] \cdot [H_2] \right)^{\frac{1}{2}} \; . \tag{10.42}$$

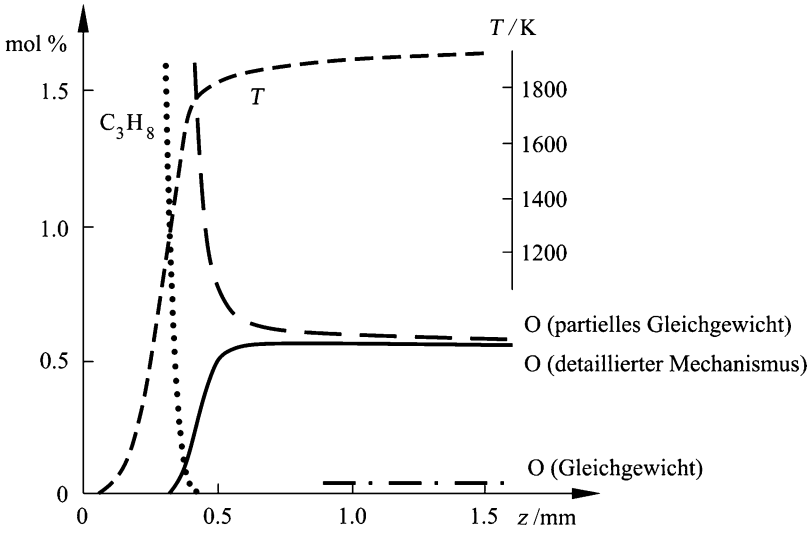


Abb. 10.9 Molenbrüche von O in einer vorgemischten stöchiometrischen C_3H_8-Luft-Flamme bei $p = 1$ bar, $T_u = 298$ K, berechnet mit einem detaillierten Mechanismus, mit Annahme partiellen Gleichgewichts und mit Annahme vollständigen Gleichgewichts

Die Konzentrationen der (schlecht messbaren, da Eichungen schwierig sind) instabilen Teilchen lassen sich also auf die der (gut messbaren) stabilen Teilchen H_2, O_2 und H_2O zurückführen.

Abb. 10.9 zeigt schließlich räumliche Profile der Molenbrüche von Sauerstoffatomen in einer vorgemischten stöchiometrischen C_3H_8-Luft-Flamme bei $p = 1$ bar und einer Temperatur des unverbrannten Gases von $T_u = 298$ K, berechnet mit einem vollständigen Mechanismus, mit der Annahme partiellen Gleichgewichts und mit der Annahme vollständigen Gleichgewichts. Während die Annahme eines vollständigen Gleichgewichts bei allen Temperaturen nur unbefriedigende Ergebnisse liefert, beschreibt das partielle Gleichgewicht die Molenbrüche von Sauerstoffatomen zumindest bei hinreichend hohen Temperaturen befriedigend. Es sei hier angemerkt, dass die betrachtete Menge an Sauerstoffatomen in einem Reaktionssystem entscheidend die Bildung von Stickoxiden beeinflusst.

Empfindlichkeitsanalyse

Die Zeitgesetze für einen Reaktionsmechanismus von R Reaktionen mit S beteiligten Stoffen lassen sich in Form eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen schreiben (vergleiche Abschn. 1.3):

$$\frac{\mathrm{d}c_i}{\mathrm{d}t} = F_i(c_1, \ldots, c_s; k_1, \ldots, k_R), \quad c_i(t = t_0) = c_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, S). \quad (10.43)$$

Dabei ist die Zeit t die *unabhängige Variable*, die Konzentrationen c_i des Stoffes i sind die *abhängigen Variablen* und die k_r sind die *Parameter* des Systems. Die c_i^0 bezeichnen die Anfangsbedingungen. Es werden hier nur die Geschwindigkeits-

koeffizienten der chemischen Reaktionen als Parameter des Systems betrachtet. Vollkommen analog lassen sich aber bei Bedarf auch die Anfangsbedingungen, der Druck usw. als Systemparameter definieren. Die Lösung des Differentialgleichungssystems Gl. (10.43) hängt sowohl von den Anfangsbedingungen als auch von den Parametern ab. Interessant ist nun die Frage, wie sich die Lösung ändert (d. h. die Konzentrationen zur Zeit t), wenn die Systemparameter, d. h. die Geschwindigkeitskoeffizienten der chemischem Reaktionen, verändert werden. Die Antwort auf diese Frage liefert sowohl Informationen über die geschwindigkeitsbestimmenden Reaktionsschritte als auch Hinweis darauf, welchen Einfluss Ungenauigkeiten der Geschwindigkeitskoeffizienten auf die Gesamtreaktion ausüben (einige der in reaktiven Strömungen ablaufenden Elementarreaktionen sind nur auf eine Größenordnung genau bekannt).

Als *Empfindlichkeiten* oder *Sensitivitäten* bezeichnet man die Abhängigkeit der Lösung c_i von den Parametern k_r. Man unterscheidet hier absolute und relative (normierte) Sensitivitäten:

$$E_{i,r} = \frac{\partial c_i}{\partial k_r} \quad \text{bzw.} \qquad E^{\text{rel}}_{i,r} = \frac{k_r}{c_i} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial k_r} = \frac{\partial \ln c_i}{\partial \ln k_r} \,. \tag{10.44}$$

Es wird nun wieder die einfache Reaktionsfolge aus zwei Schritten Gl. (10.30) betrachtet. Die zeitlichen Verläufe der relativen Sensitivitätskoeffizienten sind zusammen mit der Konzentration des Endproduktes in Abb. 10.10 hier für $k_{12} = \tau^{-1}$, $k_{23} = 100 \cdot \tau^{-1}$ dimensionslos dargestellt (τ = Lebensdauer, siehe Abb. 10.7). Das Ergebnis der Empfindlichkeitsanalyse ist: Bezüglich der langsamen (d. h. geschwindigkeitsbestimmenden) Reaktion ($S_1 \xrightarrow{k_{12}} S_2$) ergibt sich eine große relative Sensitivität der Bildung von S_3, für die schnelle (und daher den Reaktionsverlauf nicht hemmende) Reaktion ($S_2 \xrightarrow{k_{23}} S_3$) ergibt sich eine kleine relative Empfindlichkeit. Eine Sensitivitätsanalyse kann also die geschwindigkeitsbestimmenden Reaktionen identifizieren. Solche Analysen sind daher wichtige Instrumente zum Verständnis von komplexen Reaktionsmechanismen.

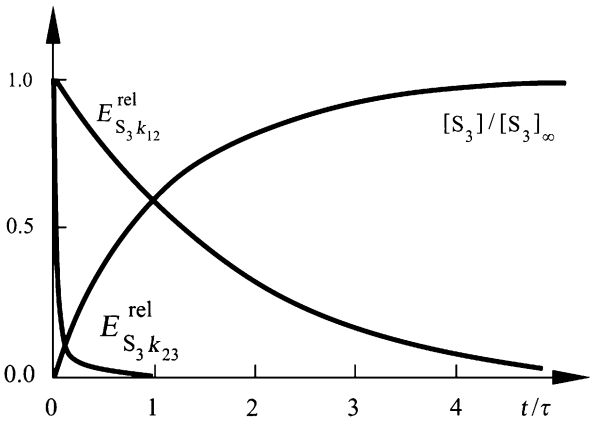


Abb. 10.10 Zeitlicher Verlauf der relativen Sensitivitätskoeffizienten für die Reaktion $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$

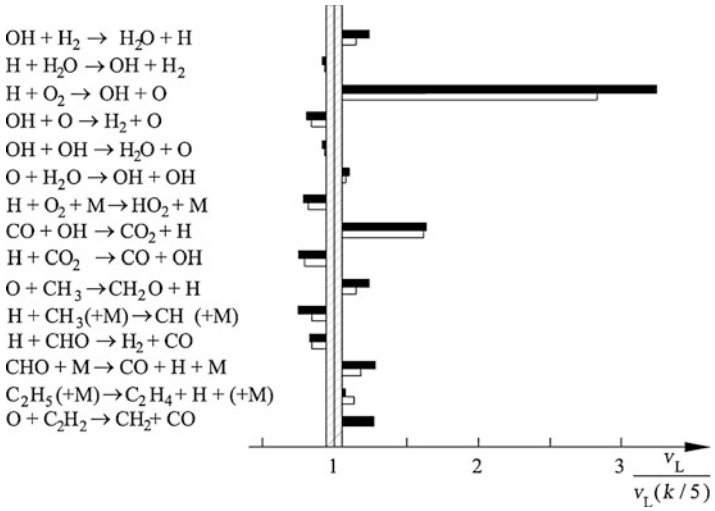


Abb. 10.11 Sensitivitäts-Analyse für die Flammengeschwindigkeit v_L in vorgemischten stöchiometrischen CH_4- (schwarz) und C_2H_6-Luft-Flammen (weiß) bei $p = 1$ bar, $T_u = 298$ K

In Abb. 10.11 ist als Beispiel eine Sensitivitätsanalyse für die Flammengeschwindigkeit v_L in vorgemischten stöchiometrischen CH_4- und C_2H_6-Luft-Flammen dargestellt. Diejenigen Elementarreaktionen, die nicht in dem Diagramm dargestellt sind, haben eine vernachlässigbar kleine Sensitivität. Man erkennt, dass nur wenige der vielen Elementarreaktionen sensitiv sind. Außerdem ergibt sich für die sehr verschiedenen Systeme (CH_4 und C_2H_6) das gleiche qualitative Bild, was darauf hindeutet, dass bei Verbrennungsprozessen unabhängig von dem betrachteten Brennstoff einige Elementarreaktionen im $H_2 - O_2 - CO$-System stets geschwindigkeitsbestimmend sind.

2 Laminare reaktive Strömungen

2.1 Struktur vorgemischter Flammen

Im Folgenden wird für einige typische Fälle ein Vergleich von experimentellen (soweit vorhanden) und berechneten Daten über die Struktur von laminaren flachen Flammenfronten gezeigt. Den numerischen Simulationen liegt dabei ein detaillierter Mechanismus zugrunde (Warnatz 1981).

Es stellt sich heraus, dass bei Flammenbedingungen ($T > 1100$ K) die Oxidation eines großen aliphatischen Kohlenwasserstoffs R-H wie z. B. Oktan C_8H_{18} (siehe Abb. 10.12) eingeleitet wird durch den Angriff von H, O oder OH auf eine C-H-Bindung unter Bildung eines Radikals R•,

$$\mathrm{H, O, OH + RH} \quad \rightarrow \quad \mathrm{H_2, OH, H_2O + R\bullet} \quad \text{(H-Atom-Abstraktion)}\,, \tag{10.45}$$

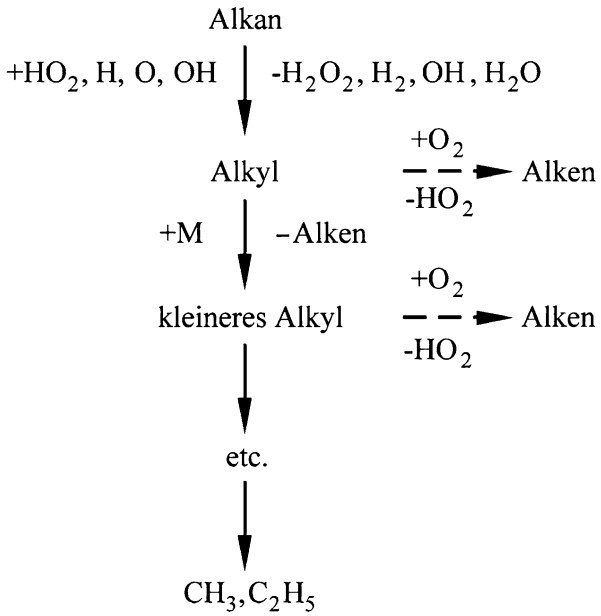


Abb. 10.12 Schematischer Reaktionsmechanismus für die Radikalpyrolyse von großen aliphatischen Kohlenwasserstoffen unter Bildung von CH_3 und C_2H_5

das dann durch thermischen Zerfall zu einem Alken und einem kleineren Radikal R′ führt,

$$R'-CH_2-\overset{\bullet}{C}H-R \quad \rightarrow \quad \bullet R'+CH_2=CH-R'' \quad (\beta\text{-Zerfall}), \qquad (10.46)$$

bis die relativ stabilen Radikale Methyl (CH_3) und Ethyl (C_2H_5) gebildet werden, die dann vergleichsweise langsam oxidiert werden. So kann das Problem der Alkan-Oxidation zurückgeführt werden auf die recht gut bekannte Oxidation von Methyl- und Ethyl-Radikalen (siehe Abb. 10.13).

CH_3-Radikale reagieren hauptsächlich mit O-Atomen unter Formaldehydbildung (der genaue Ablauf der Oxidation von CH_3 durch OH ist noch nicht ganz geklärt). Das CHO-Radikal wird dann durch H-Atom-Abstraktion gebildet. CHO kann thermisch zerfallen zu CO und H oder das H-Atom kann von H oder O_2 abstrahiert werden.

Dieses bis hierher recht einfache Geschehen wird durch die Rekombination der CH_3-Radikale kompliziert. In stöchiometrischen CH_4-Luft-Flammen verbraucht dieser Reaktionsweg etwa 30 % des CH_3 (wenn die Rekombination mit H-Atomen nicht betrachtet wird). In brennstoffreichen Flammen steigt der Anteil der Rekombination bis auf etwa 80 % an.

Die Oxidation von CH_3 und C_2H_5 ist der geschwindigkeitsbestimmende (d. h. der langsamste) Schritt in diesem Oxidationsmechanismus (siehe Abb. 10.18 und 10.19)

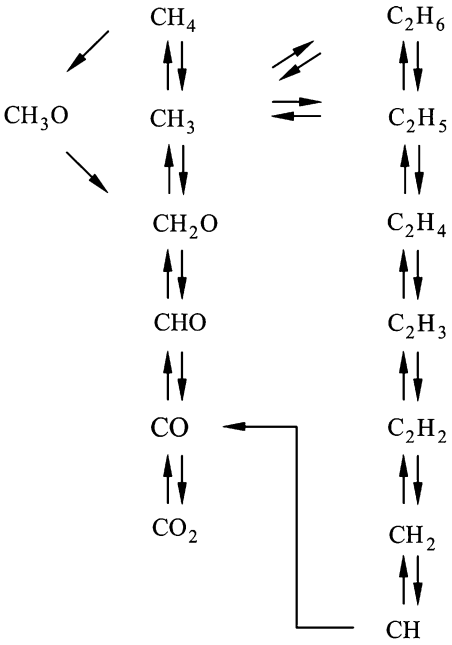


Abb. 10.13 Schematischer Mechanismus der Oxidation von C_1- und C_2-Kohlenwasserstoffen

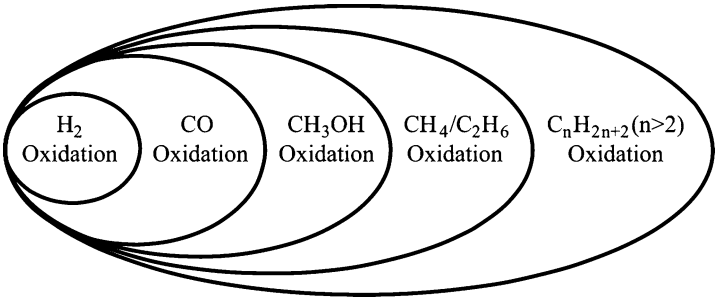


Abb. 10.14 Hierarchische Struktur des Reaktionsmechanismus zur Beschreibung der Verbrennung von aliphatischen Kohlenwasserstoffen

und daher der Grund für die Ähnlichkeit der Verbrennung aller Alkane und Alkene. Damit verbunden ist die Tatsache, dass der Reaktionsmechanismus der Kohlenwasserstoff-Verbrennung eine hierarchische Struktur besitzt, wie es in Abb. 10.14 gezeigt wird (Westbrook und Dryer 1981).

Abb. 10.15 zeigt als Beispiel die Flammenstruktur einer (zur Abkühlung) mit Argon verdünnten Propan-Sauerstoff-Flamme (Bockhorn et al. 1990) bei einem Druck $p = 100$ mbar. Für andere Kohlenwasserstoffe ergeben sich entsprechende Ergebnisse. Die Konzentrationsprofile sind dabei massenspektrometrisch bestimmt (außer für OH, das durch UV-Licht-Absorptionsmessungen ermittelt wird), die Temperatur wird durch Na-D-Linienumkehr gemessen.

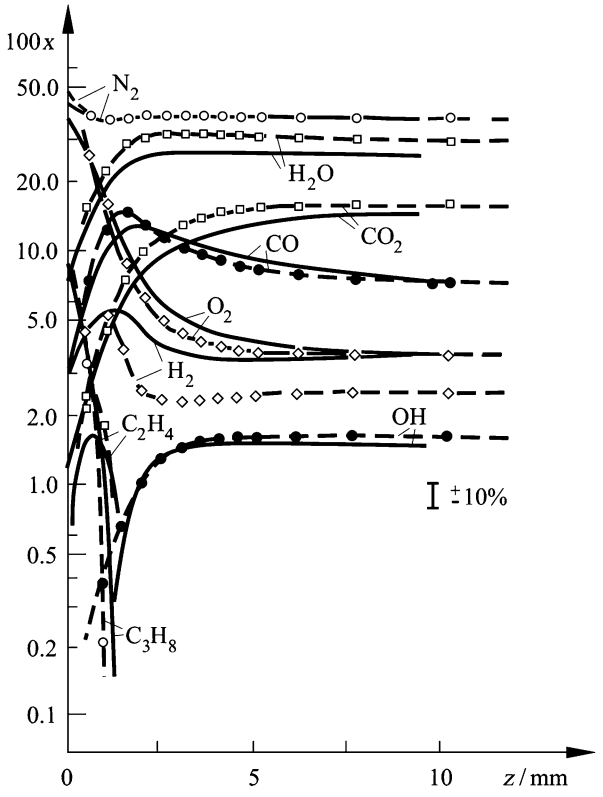


Abb. 10.15 Struktur einer laminaren vorgemischten Propan-Sauerstoff-Flamme (verdünnt mit Ar) bei $p = 100$ mbar (Bockhorn et al. 1990)

2.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit vorgemischter Flammen

Die Druck- und Temperaturabhängigkeit im Fall einer Einschritt-Reaktion (Zeldovich und Frank-Kamenetskii 1938) ist

$$v_{\mathrm{L}} \approx p^{\frac{n}{2}-1} \cdot \exp\left(-\frac{E}{2 \cdot R \cdot T_{\mathrm{b}}}\right). \tag{10.47}$$

Dabei ist n die Reaktionsordnung, E die Aktivierungsenergie der Einschritt-Reaktion und T_{b} die Temperatur des verbrannten Gases.

Abb. 10.16 zeigt die Abhängigkeit der Flammengeschwindigkeit von Druck und Temperatur T_{u} exemplarisch für Methan-Luft Mischungen. Zusätzlich zeigt Abb. 10.17 die Abhängigkeit der Flammengeschwindigkeit von der Zusammensetzung für verschiedene Brennstoffe.

Abb. 10.16 zeigt deutlich die Schwäche des Einschritt-Modells (T_{u} bezeichnet dabei die Temperatur des unverbrannten Gases). Für die geschwindigkeitsbestim-

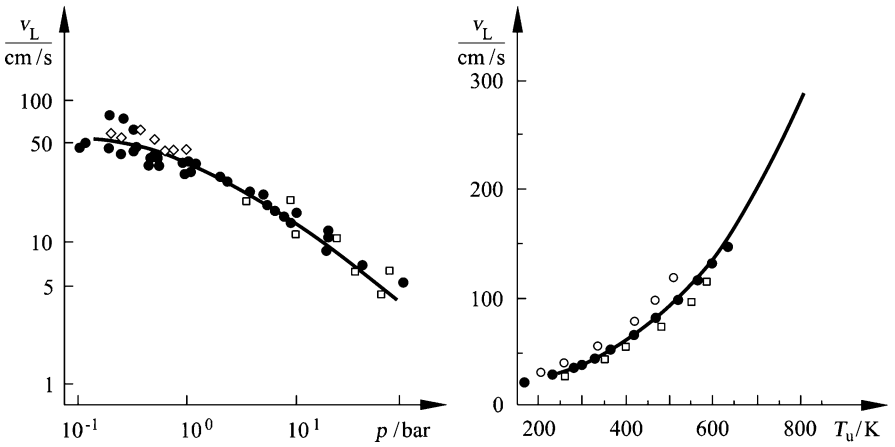


Abb. 10.16 Druckabhängigkeit von v_L für $T_u = 298$ K (links) und Temperaturabhängigkeit von v_L für $p = 1$ bar (rechts) in stöchiometrischen CH_4-Luft-Gemischen

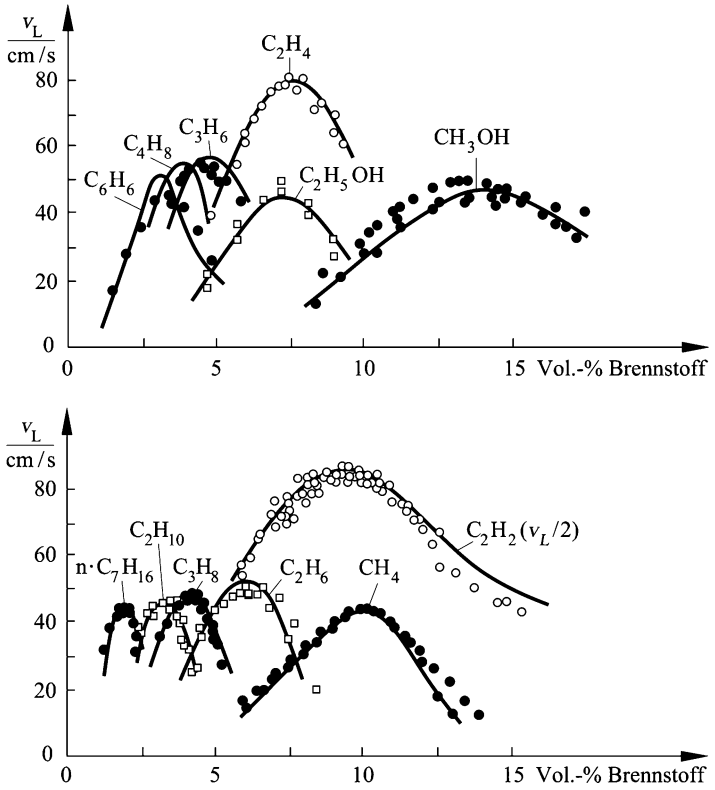


Abb. 10.17 Konzentrationsabhängigkeit (bei $p = 1$ bar, $T_u = 298$ K) von v_L in verschiedenen Brennstoff-Luft-Gemischen

menden Schritte (siehe nächstes Kapitel) ist die Reaktionsordnung 2 oder 3, und das vereinfachte Modell sagt somit entweder Druckunabhängigkeit oder sogar eine positive Druckabhängigkeit voraus. Die numerischen Ergebnisse zeigen dagegen eine starke negative Druckabhängigkeit der Flammengeschwindigkeit.

2.3 Empfindlichkeitsanalyse

Empfindlichkeitsanalysen (siehe Abschn. 1.6) ergeben für alle Kohlenwasserstoff-Luft-Gemische für die Flammengeschwindigkeit recht ähnliche Ergebnisse, Nowak und Warnatz (1988) (siehe Abb. 10.18 und Abb. 10.19). Die Ergebnisse sind außerdem ziemlich unabhängig vom betrachteten Äquivalenzverhältnis. Besonders erwähnenswert ist die geringe Anzahl von Reaktionen mit großen Werten für die Empfindlichkeit (oder Sensitivität) nach Gl. (10.44).

In allen Fällen ist der Elementarschritt $H + O_2 \rightarrow OH + O$ stark geschwindigkeitsbestimmend als langsamste kettenverzweigende Reaktion, während $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$ eine negative Sensitivität zeigt wegen des kettenabbrechenden Charakters. $CO + OH \rightarrow CO_2 + H$ bestimmt die Wärmefreisetzung und ist aus diesem Grund ebenfalls geschwindigkeitsbestimmend.

Auch für die Verbrennung großer aliphatischer Kohlenwasserstoffe gilt, dass die Reaktionen $H + O_2 \rightarrow OH + O$, $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$ und $CO + OH \rightarrow CO_2 + H$ geschwindigkeitsbestimmend sind, wie in Abb. 10.20 demonstriert wird. Es zeigt sich auch hier wieder, dass die brennstoffspezifischen Reaktionen keine wesentlichen Sensitivitäten aufweisen.

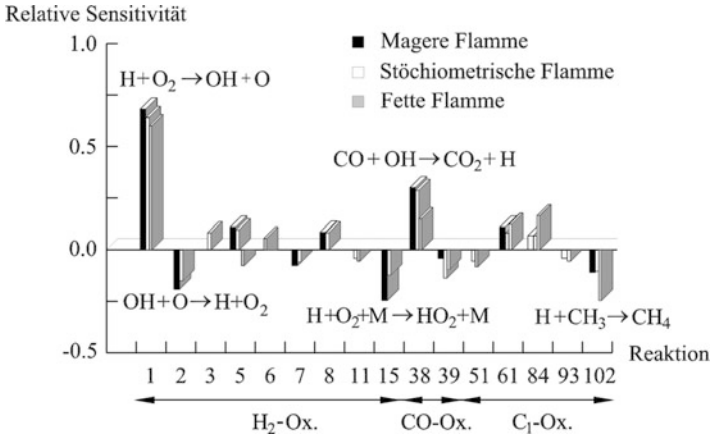


Abb. 10.18 Sensitivitätsanalyse bezüglich der Geschwindigkeitskoeffizienten der beteiligten Elementarreaktionen für die laminare Flammengeschwindigkeit einer Methan-Luft Flamme

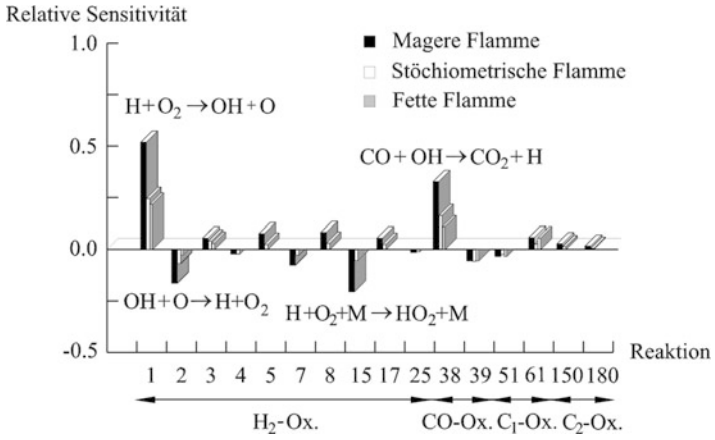


Abb. 10.19 Sensitivitätsanalyse bezüglich der Geschwindigkeitskoeffizienten der beteiligten Elementarreaktionen für die laminare Flammengeschwindigkeit einer Propan-Luft Flamme

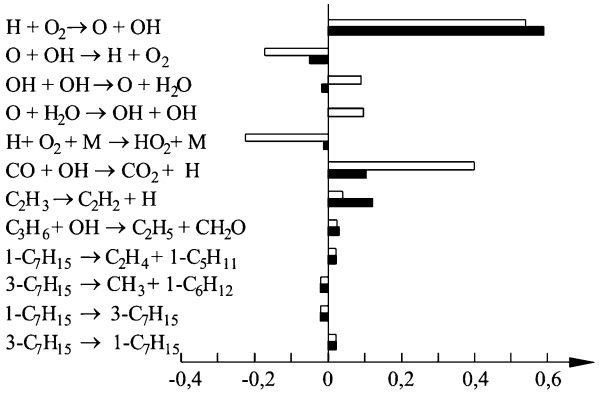


Abb. 10.20 Sensitivitätsanalyse bezüglich der Geschwindigkeitskoeffizienten der beteiligten Elementarreaktionen für die laminare Flammengeschwindigkeit einer stöchiometrischen n-Heptan-Luft Flamme bei $p = 1$ bar, $T_u = 298$ K

2.4 Nicht-vorgemischte Gegenstromflammen

Bei nicht-vorgemischten Flammen handelt es sich um Flammen, bei denen Brennstoff und Oxidationsmittel erst im Verbrennungsraum miteinander vermischt werden. In praktischen Anordnungen werden Brennstoff und Luft durch Konvektion zusammengebracht und vermischen sich dann als Resultat eines Diffusionsprozesses. Im Allgemeinen stellt sich dies als ein dreidimensionales Problem dar.

Ein tieferes Verständnis nicht-vorgemischter Flammen resultiert daher aus Experimenten, in denen die Vorgänge als räumlich eindimensional betrachtet werden. Ein Beispiel einer geeigneten einfachen Brenner-Anordnung ist ein durch zwei

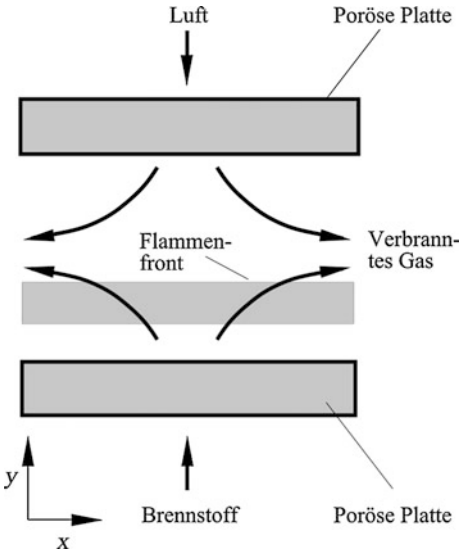


Abb. 10.21 Schematische Darstellung einer Gegenstrom-Zweibrenner-Anordnung

Brenner erzeugter *Gegenstrom*, in der ein gerichteter laminarer Brennstoff-Strom auf einen entgegengesetzt gerichteten laminaren Gegenstrom des Oxidationsmittels trifft (siehe Abb. 10.21). In beiden Brennerkonfigurationen kann die mathematische Behandlung dadurch erheblich vereinfacht werden, dass man sich auf die Strömungseigenschaften in der Staupunktebene (siehe Abb. 10.21) beschränkt. Unter Benutzung der *Grenzschicht-Näherung* von Prandtl (d. h. Vernachlässigung der Diffusion in der Richtung senkrecht zur Anströmung, in Abb. 10.21 in x-Richtung), wird das Problem auf eine räumliche Koordinate reduziert, nämlich die Entfernung vom Stagnationspunkt. Auf diese Weise können die tangentialen Gradienten der Temperatur und der Massenbrüche und die Geschwindigkeitskomponenten v_x eliminiert werden.

Wenn man nur Lösungen in der y-Achse in der durch den Stagnationspunkt bestimmten Symmetrieachse betrachtet, ergibt sich ein Gleichungssystem, das nur von der Zeit t und der Raumkoordinate y als unabhängige Variable abhängt. Der Druckgradient J ist ein Eigenwert des Systems, d. h. für vorgegebene Randbedingungen muss J einen Wert annehmen derart, dass eine Lösung des Problems existiert. Damit lassen sich die Profile von Temperatur, Konzentrationen und Geschwindigkeit in laminaren nicht-vorgemischten Gegenstromflammen berechnen und mit experimentellen Ergebnissen vergleichen. Abb. 10.22 zeigt exemplarisch berechnete und experimentell bestimmte Temperatur- und Konzentrationsprofile (mittels CARS-Spektroskopie bestimmt) in nicht-vorgemischten Methan-Luft-Gegenstromflammen bei einem Druck von $p = 1$ bar. Im Experiment beträgt die Temperatur der anströmenden Luft (im Bild rechts) 300 K.

Einen exemplarischen Vergleich von gemessenen und berechneten Geschwindigkeitsprofilen zeigt Abb. 10.23. Die Geschwindigkeiten werden experimentell

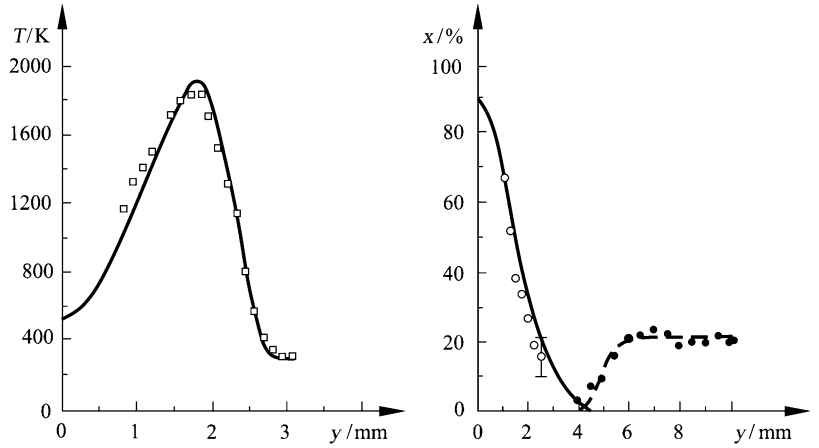


Abb. 10.22 Links: Berechnete und experimentell bestimmte Temperaturprofile in einer nicht-vorgemischten Methan-Luft-Gegenstromflamme bei einem Druck von $p = 1$ bar, y bezeichnet den Abstand zum Brenner (Sick et al. 1991). Rechts: Berechnete und experimentell bestimmte Molenbruchprofile von Methan und Sauerstoff in einer nicht-vorgemischten Methan-Luft-Gegenstromflamme bei einem Druck von $p = 1$ bar, y bezeichnet den Abstand zum Brenner (Dreier et al. 1987)

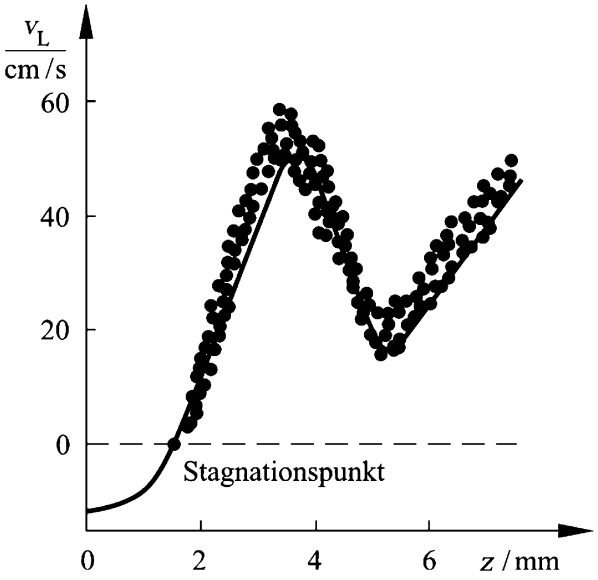


Abb. 10.23 Berechnete (Linie) und experimentell bestimmte (Punkte) Geschwindigkeitsprofile in einer nicht-vorgemischten Methan-Luft-Gegenstromflamme, y bezeichnet den Abstand zum Brenner

aus Teilchenspuren von zugesetzten MgO-Teilchen bestimmt. Die Form des Geschwindigkeitsprofils lässt sich einfach deuten. Eine nicht-reaktive Strömung ist durch einen monotonen Übergang zwischen den Geschwindigkeiten an den beiden Rändern in der hier vorliegenden Geschwindigkeits-Grenzschicht gekennzeichnet. Bei der Verbrennung findet jedoch zusätzlich noch eine starke Dichteänderung statt (bedingt durch die hohe Temperatur im verbrannten Gas) und bewirkt im Bereich der Flammenfront (um $y = 3$ mm) eine Abweichung von dem monotonen Verhalten.

2.5 Nicht-vorgemischte Strahlflammen

Dieser Flammentyp erfordert für eine genaue Beschreibung eine mindestens zweidimensionale Behandlung. Er ist sehr wichtig, da er weit verbreitet ist (*Bunsen-Brenner*). Aus einer Düse strömt dabei Brennstoff in ruhende Luft. Durch molekularen Transport (Diffusion) vermischen sich Brennstoff und Luft und verbrennen in der Reaktionszone.

Die Struktur solch einer nicht-vorgemischten Bunsen-Flamme ist in den Abb. 10.24 und Abb. 10.25 in Beispielen dargestellt. Die Ergebnisse wurden hierbei durch vollständige numerische Lösung der räumlich zweidimensionalen Erhaltungsgleichungen berechnet. Der Durchmesser der den Brennstoff zuführenden

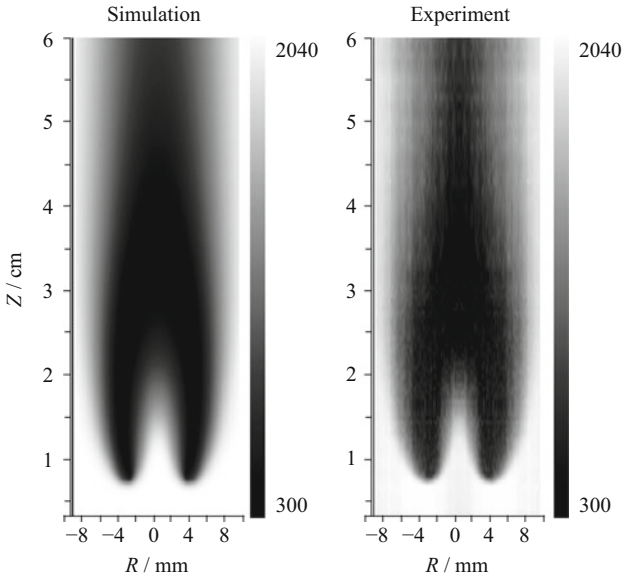


Abb. 10.24 Berechnetes Temperaturfeld (links) in einer nicht-vorgemischten Strahlflamme. Die Ergebnisse können direkt mit entsprechenden Ergebnissen aus LIF-Experimenten (rechts) verglichen werden (Smooke et al. 1989)

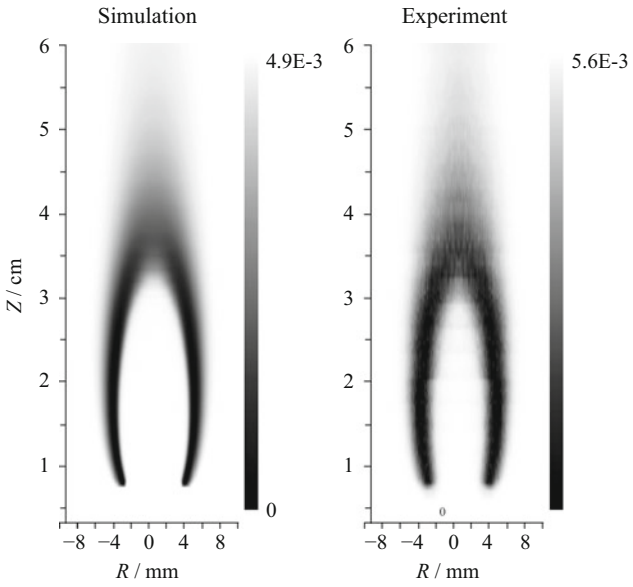


Abb. 10.25 Berechnete Hydroxyl-Radikalkonzentration (links) in einer nicht-vorgemischten Strahlflamme. Die Ergebnisse können direkt mit entsprechenden Ergebnissen aus LIF-Experimenten (rechts) verglichen werden (Smooke et al. 1989)

Düse beträgt in diesem Beispiel 1.26 cm, die abgebildete Höhe der Flamme ist 30 cm. Temperatur- und Konzentrationsskala beginnen jeweils mit dem untersten der abgebildeten Schwärzungsmuster. Die maximale Temperatur ist etwa 2000 K, die OH-Konzentration entspricht maximal einem Molenbruch von 0.35 %.

2.6 Nicht-vorgemischte Flammen mit schneller Chemie

Im Falle unendlich schneller Chemie (in der Praxis: sehr schneller Chemie) lässt sich die Reaktion in Form einer Einschritt-Reaktion von Brennstoff und Oxidationsmittel zu den Reaktionsprodukten schreiben:

$$\mathrm{F} + \mathrm{Ox} \quad \rightarrow \quad \mathrm{P}\,. \tag{10.48}$$

Dies entspricht der Vereinfachung *gemischt* = *verbrannt*, die in den Dreißigerjahren von Rummel 1937 vorgeschlagen wurde. Analog zu den Massenbrüchen w_i lässt sich ein Element-Massenbruch Z_i definieren, der den Massenanteil eines chemischen Elements i an der Gesamtmasse angibt als (siehe (187)):

$$Z_i = \sum_{j=1}^{S} \mu_{ij} \cdot w_j \qquad i = 1, \ldots, M\,. \tag{10.49}$$

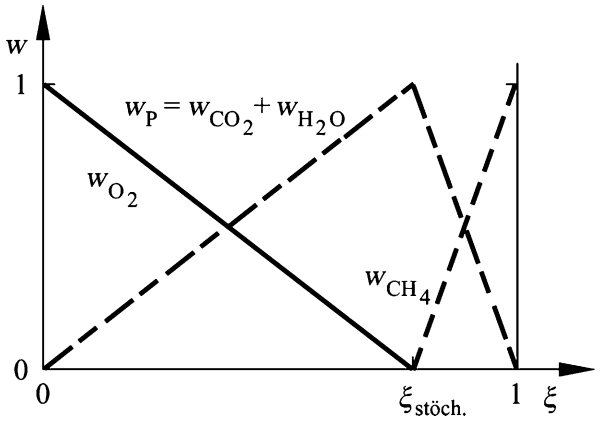


Abb. 10.26 Lineare Zusammenhänge zwischen Mischungsbruch und Massenbrüchen für ein einfaches Reaktionssystem

Hierbei ist S die Zahl der Stoffe und M die Zahl der Elemente im betrachteten Gemisch. Die Koeffizienten μ_{ij} bezeichnen die Massenanteile des Elementes i im Stoff j.

Die Element-Massenbrüche haben eine besondere Bedeutung, da sie sich bei einer reaktiven Strömung weder durch konvektive noch durch chemische Prozesse verändern können.

Für einfache nicht-vorgemischte Flammen, die als *Zweistromproblem* betrachtet werden können, wobei der eine Strom der Brennstoff (F) und der andere das Oxidationsmittel (Ox) ist, lässt sich mit Hilfe der Element-Massenbrüche Z_i ein *Mischungsbruch* ξ definieren (die Indizes 1 und 2 bezeichnen die beiden Ströme):

$$\xi = \frac{Z_i - Z_{i2}}{Z_{i1} - Z_{i2}} \,. \tag{10.50}$$

Der Vorteil dieser Begriffsbildung ist, dass ξ wegen Gl. (10.49) und Gl. (10.50) in linearer Weise mit den Massenbrüchen verknüpft ist (siehe Abb. 10.26). Sind die Diffusionskoeffizienten der verschiedenen chemischen Spezies gleich (was von einigen Ausnahmen abgesehen oft näherungsweise erfüllt ist), so ist der in dieser Weise definierte Mischungsbruch zusätzlich unabhängig von der Wahl des betrachteten Elements i ($i = 1, \ldots, M$).

2.7 Abgasreinigung mit Plasmaquellen

Im Zuge einer effizienten Ressourcennutzung und verstärkten Anstrengungen zum Klimaschutz gibt es immer strengere Grenzwerte für die Emissionen von Verbrennungsmotoren im Straßenverkehr. Neben primären Maßnahmen zur Schadstoffvermeidung während der Verbrennung wird zur Erreichung der gesetzlich vorgeschriebenen Grenzwerte intensiv die Abgasnachbehandlung untersucht.

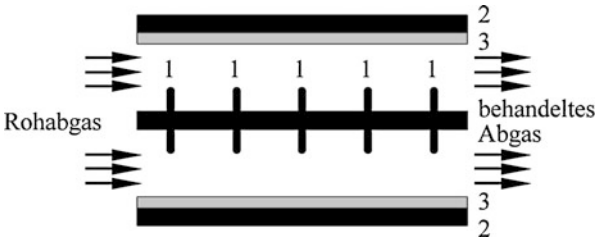


Abb. 10.27 Prinzipskizze eines Plasmareaktors zur Abgasreinigung (1 Innenelektroden, 2 Außenelektrode, 3 Dielektrikum)

Drei-Wege-Katalysatoren zur gleichzeitigen Verminderung von NO_x, unverbrannten Kohlenwasserstoffen und CO erreichen beim Otto-Motor Umsätze von ungefähr 90 %, wenn der Motor mit stöchiometrischer Kraftstoff-Luft-Mischung betrieben wird. Dieselmotoren und auch *direkteinspritzende* Otto-Motoren verbrennen ein mageres Kraftstoff-Luft-Gemisch und erzeugen Abgas mit einem Sauerstoffgehalt von typischerweise 5 % beim Otto-Motor, bis zu 20 % beim Dieselmotor. In Edelmetallkatalysatoren finden Oxidationsprozesse unter diesen Bedingungen nur mit O_2 statt, wodurch nur CO und unverbrannte Kohlenwasserstoffe (HC) vermindert werden, die Reduktion von NO_x unterbleibt jedoch. Als Ergänzung zum Drei-Wege-Katalysator gibt es deshalb Überlegungen plasmachemische Prozesse zur Abgasnachbehandlung einzusetzen. Ein plasmachemisches Verfahren, das sich durch geringen operativen Aufwand auszeichnet, ist die Abgasnachbehandlung mit dielektrisch behinderten Entladungen.

Abb. 10.27 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Reaktors. Solche Plasmareaktoren sind in jüngster Zeit intensiv untersucht worden, um ihr Potential bezüglich der Oxidation unverbrannter Kohlenwasserstoffe und der Reduktion von NO_x im Abgas aufzuklären. Es hat sich gezeigt, dass der Abbau von Kohlenwasserstoffen möglich ist und spezifisch vom unverbrannten Kohlenwasserstoff abhängt (Orlandini und Riedel, 2000). Abb. 10.28 zeigt die erreichbare Minderung für ein Modellabgas, bestehend aus 72 % N_2, 18 % O_2, 10 % H_2O und 440–540 ppm unverbranntem Kohlenwasserstoff (abhängig von experimentellen Bedingungen). Als Kohlenwasserstoff werden Ethan (C_2H_6), Propan (C_3H_8) und Ethen (C_2H_4) untersucht.

Der unterschiedlich starke Abbau ist durch reaktionskinetische Effekte in der Strömung zu erklären, die durch Reaktionsflussanalysen und Sensitivitätsanalysen aufgeklärt wurden. Ferner hat sich herausgestellt, dass bei sauerstoffhaltigen Abgasen NO hauptsächlich zu NO_2 oxidiert wird. Weniger als 10 % des anfänglich vorhandenen NO wird zu N_2 reduziert. Zur Entfernung von NO_2 sind also weitere Maßnahmen, wie zum Beispiel katalytische Reduktion oder Reduktion mit Ammoniak erforderlich.

Für eine Abgaszusammensetzung von 72 % N_2, 18 % O_2, 10 % H_2O und 500 ppm unverbranntem Ethen im Abgas und einem Abgasvolumenstrom von 500 Litern pro Minute zeigt die Abb. 10.29 den Abbau von C_2H_4 durch die Plasmaquelle. Gezeigt ist ein Ausschnitt aus dem Reaktor. Die beiden Innenelek-

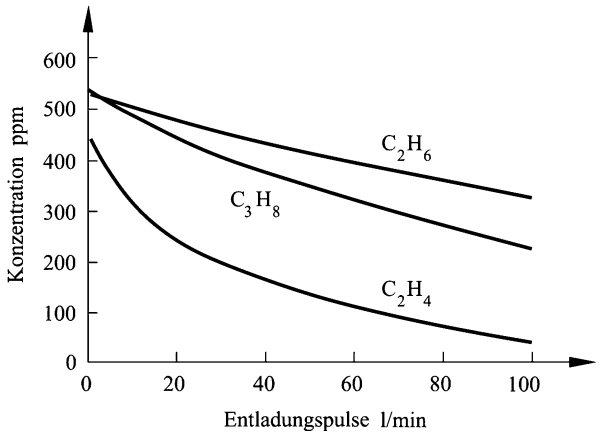


Abb. 10.28 Simulation des Abbaus von C_2H_6, C_3H_8 und C_2H_4 in einem Plasmareaktor als Funktion der Zahl der Entladungspulse, mit denen das Abgas behandelt wird

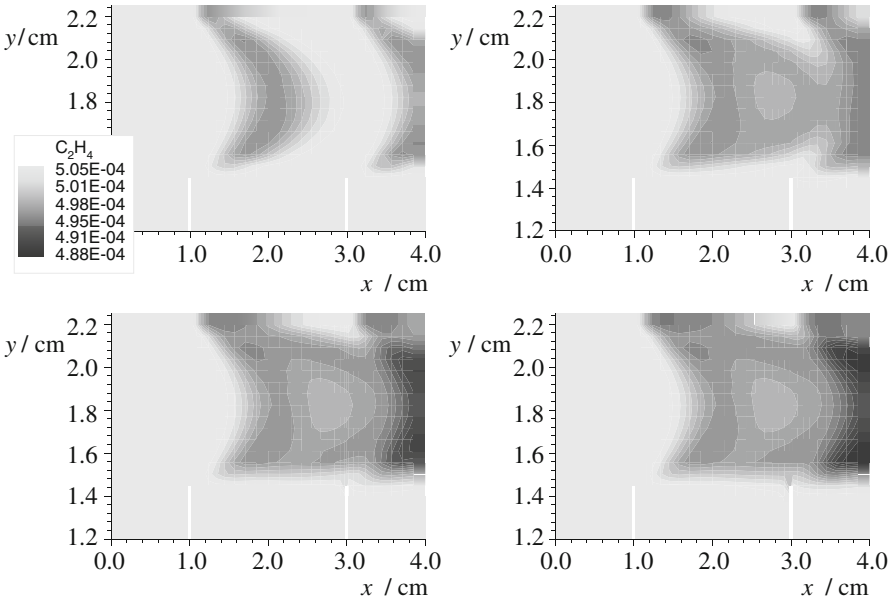


Abb. 10.29 Abbau von C_2H_4 in einem Plasmareaktor nach $t = 0.5$ ms (oben links), $t = 1.0$ ms (oben rechts), $t = 1.5$ ms (unten links) und $t = 2.0$ ms (unten rechts)

troden sind in weiß dargestellt. Bereiche mit geringerer C_2H_4-Konzentration sind dunkler dargestellt. Gezeigt ist die Verteilung nach den ersten vier Pulsen im Reaktor. Der Abbau von Ethen ist quer zur Strömungsrichtung inhomogen, da die zum Abbau benötigten, in der Plasmaentladung erzeugten, Radikale ebenfalls inhomogen verteilt sind.

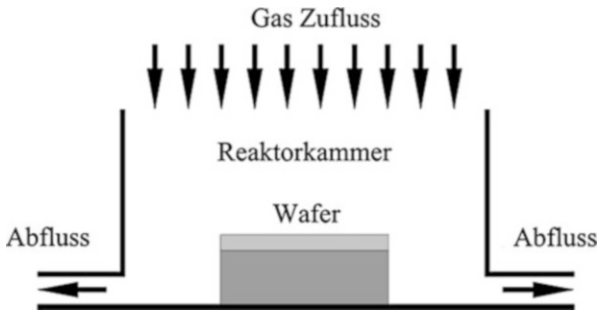


Abb. 10.30 Prinzipskizze eines Ätzreaktors

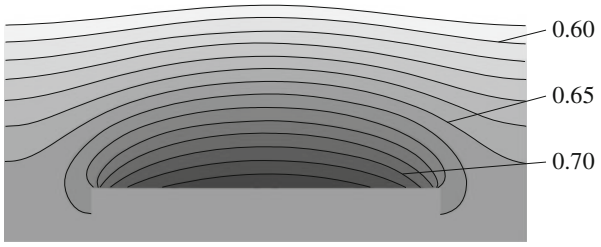


Abb. 10.31 Verteilung des Reaktionproduktes SiF_4 im Reaktor beim Ätzen von Silizium mit Fluor bei einem Druck von 40 Pa

2.8 Strömungen in Ätzreaktoren

Bei der Halbleiterherstellung werden für eine Vielzahl von Bearbeitungsschritten Trocken-Ätzverfahren eingesetzt. Die Ätzgase werden oft stromauf des eigentlichen Reaktors mittels einer Plasmaquelle erzeugt und dann in den Reaktor geleitet. In Abb. 10.30 ist der prinzipielle Aufbau eines Reaktors gezeigt. Um einen gleichmäßigen Materialabtrag über den zu bearbeitenden Wafer zu erzielen, werden diese Verfahren bei niedrigem Druck und mit kleinen Strömungsgeschwindigkeiten betrieben, da unter diesen Bedingungen die Diffusion gegenüber Konvektion und Reaktion überwiegt und für eine nahezu uniforme Verteilung der Reaktanden sorgt.

Die Prozesse an der Oberfläche sind eng mit Strömung und Diffusion aus der Gasphase gekoppelt. Ein Teil der auf den Wafer treffenden Teilchen wird dort adsorbiert und kann mit anderen Spezies aus der Gasphase oder mit bereits an der Oberfläche adsorbierten anderen Teilchen reagieren. Die so entstehenden Reaktionsprodukte können desorbieren und in die Gasphase zurückkehren.

Für eine Zusammensetzung des einströmenden Ätzgases von 70 % F-Atomen und 30 % N_2-Molekülen zeigt Abb. 10.31 für einen axialsymmetrischen Reaktor die Verteilung des Reaktionsprodukts SiF_4, das in Oberflächenreaktionen gebildet wird und aufgrund des niederen Drucks im Reaktor sehr schnell von der Oberfläche wegdiffundiert.

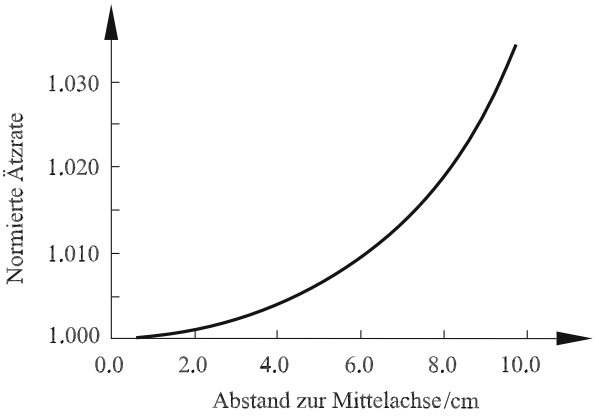


Abb. 10.32 Normierte Ätzgeschwindigkeit als Funktion des Abstands zur Wafermitte

Die Ätzgeschwindigkeit ist an den Kanten des Wafers, der einen Durchmesser von 200 mm hat, um etwa 3.5 % erhöht (Abb. 10.32). Durch die Beschleunigung der Strömung in der Nähe der Kanten des Wafers zum Reaktorauslass hin ist dort der konvektive Fluss an Fluor-Atomen größer als in der Nähe der Symmetrieachse.

3 Turbulente reaktive Strömungen

3.1 Übersicht und Begriffsbildung

Turbulente reaktive Strömungen spielen eine wichtige Rolle bei vielen technischen Verbrennungsprozessen. Im Gegensatz zu laminaren Strömungen sind turbulente Prozesse durch schnelle Fluktuationen von Geschwindigkeit, Dichte, Temperatur und Zusammensetzung charakterisiert. Diese *chaotische* Natur der Turbulenz ist durch die hohe Nichtlinearität der zugrunde liegenden physikalisch-chemischen Prozesse begründet. Selbst kleine Änderungen der Parameter eines Strömungsfeldes können zu Instabilitäten und damit zur Ausbildung von Turbulenz führen.

Die Komplexität turbulenter Verbrennungsprozesse (als ein Standard-Beispiel für turbulente reaktive Strömungen) ist ein Grund dafür, dass die mathematischen Modelle zu ihrer Beschreibung bei weitem noch nicht so weit entwickelt sind wie Modelle zur Beschreibung laminarer Systeme. In den folgenden Kapiteln sollen neben allgemeinen Gesetzmäßigkeiten turbulenter reaktiver Strömungen einige Verfahren zur mathematischen Beschreibung vorgestellt werden, die in jüngster Vergangenheit Eingang in industrielle Rechenprogramme gefunden haben.

Turbulente nicht-vorgemischte Flammen (siehe Abschn. 3.5) sind von großem Interesse in praktischen Anwendungen. Man findet sie in Düsentriebwerken, Dieselmotoren, Dampferzeugern, Öfen und Raketentriebwerken. Da sich Brennstoff und Oxidationsmittel erst im Verbrennungsraum vermischen, sind nicht-vorgemischte

Flammen im Hinblick auf sicherheitstechnische Überlegungen einfacher zu handhaben als vorgemischte Flammen. Gerade die praktische Bedeutung ist ein Grund dafür, dass zahlreiche mathematische Modelle entwickelt wurden, die eine Simulation dieser Verbrennungsprozesse erlauben.

Das Verständnis laminarer nicht-vorgemischter Flammen bildet die Grundlage für das Verständnis turbulenter nicht-vorgemischter Flammen. Solche Flammen wurden früher als *Diffusionsflammen* bezeichnet, da die Diffusion von Brennstoff und Oxidationsmittel zur Flammenzone langsam (und damit geschwindigkeitsbestimmend) gegenüber der chemischen Reaktion ist. Da Diffusion aber auch bei vorgemischten Flammen eine Voraussetzung für die Verbrennung ist, sollen zur Unterscheidung die exakteren Begriffe *vorgemischte* und *nicht-vorgemischte* Flammen verwendet werden.

In (idealen) *turbulenten vorgemischten Flammen* (siehe Abschn. 3.6) ist das unverbrannte Gas vollkommen durchmischt, bevor die chemische Reaktion einsetzt. Die chemische Reaktion führt dazu, dass an einer Grenzfläche ein schneller Übergang von unverbrannt zu verbrannt stattfindet. Diese Grenzfläche bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_{L}.

Die Bewegung einer Vormischflamme ist eine Überlagerung von Flammenfortpflanzung und (gegebenenfalls turbulenter) Strömung. Kurz ausgedrückt bedeutet dies, dass das quantitative Verständnis turbulenter Vormischflammen noch eine viel größere Herausforderung darstellt als die Modellierung nicht-vorgemischter Flammen.

Oft lässt sich nicht eindeutig zwischen vorgemischt und nicht-vorgemischt unterscheiden, wenn die Zeitskalen von Mischung und chemischer Reaktion von der selben Größenordnung sind. Lokale Flammenlöschung bei nicht-vorgemischten Flammen führt z. B. dazu, dass sich Brennstoff und Luft mischen, bevor sie von der sie umgebenden nicht-vorgemischten Verbrennungszone *gezündet* werden (was zu einer *partiell vorgemischten Verbrennung* führt).

3.2 Direkte Simulation

Es gibt keinen Hinweis gegen die Gültigkeit der Navier-Stokes-Gleichungen (180) und (181) auch für turbulente Strömungen, solange die turbulenten Längenmaße groß gegenüber den intermolekularen Abständen sind. Dies ist in Verbrennungsprozessen bei Atmosphärendruck regelmäßig erfüllt, so dass man im Prinzip eine turbulente Strömung durch Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben könnte. Bei *direkten numerischen Simulationen* (DNS, Reynolds 1989) müssen jedoch selbst die kleinsten Längenskalen bei der Ortsdiskretisierung aufgelöst werden. Das Problem besteht daher in dem dabei auftretenden Rechenaufwand, der bei der derzeitigen Rechnerentwicklung eine Lösung erst in einigen Jahrzehnten erwarten lässt. Dies lässt sich durch einfache Überlegungen demonstrieren. Das Verhältnis von größtem und kleinstem turbulentem Längenmaß ist gegeben durch:

$$\frac{l_0}{l_K} \approx Re_t^{\frac{3}{4}}, \tag{10.51}$$

wobei Re_t eine *Turbulenz-Reynolds-Zahl* ist, für die allgemein $Re_t < Re$ gilt. l_0 ist hierbei das *integrales Längenmaß*, das die größte Längenskala angibt und von den Gefäßabmessungen bestimmt wird. l_K ist das *Kolmogorov-Längenmaß*, das die Längenskala der kleinsten turbulenten Strukturen darstellt.

In modernen Gasturbinenbrennkammern z. B. ist eine übliche turbulente Strömung mit $Re_t = 500$ ist $l_0/l_K \approx 20000$, so dass man zur örtlichen Auflösung der kleinsten Strukturen pro Dimension ein Gitter mit mindestens ≈ 200000 Gitterpunkten, für dreidimensionale Probleme also ungefähr 10^{16} Punkte braucht. Berücksichtigt man, dass zur Beschreibung eines instationären Verbrennungsvorganges mindestens 1000 Zeitschritte benötigt werden, so kommt man auf eine Zahl von Rechenoperationen, die in der Größenordnung von 10^{21} ist (bei ungefähr 100 Operationen pro Gitterpunkt). Ein weiteres Problem besteht darin, dass die Rechenzeit zur direkten Simulation außer von der Beziehung Gl. (10.51) auch von der Tatsache bestimmt wird, dass die Zeitschritte umgekehrt proportional zum Quadrat der Stützstellenabstände reduziert werden müssen. Daraus resultiert, dass die Rechenzeit für die direkte Simulation mit etwa der vierten Potenz der Reynolds-Zahl ansteigt.

Trotz dieser Probleme sind direkte numerische Simulationen (DNS) für kleine Reynolds-Zahlen bei einfachen chemischen Systemen möglich. Diese Simulationen sind zwar weit entfernt von praktischen Verbrennungssystemen, können jedoch sehr nützliche Informationen über den Charakter turbulenter Verbrennungsprozesse liefern. Für praktische Anwendungen sind direkte Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen (180) und (181) noch nicht möglich.

Die Bildung von in das Abgas eindringenden *abgeschlossenen Bereichen* von Frischgas stellt ein interessantes Phänomen bei turbulenten Vormischflammen dar. Dieser transiente Prozess kann mittels DNS zeitaufgelöst untersucht werden und ist für die Bestimmung des Gültigkeitsbereiches bestehender sowie die Entwicklung neuer Modelle zur Beschreibung turbulenter Verbrennung von Bedeutung. Die Abb. 10.33 zeigt die Konzentrationsverteilung von OH- und CO-Radikalen sowie die Wirbelstärke in einer turbulenten Methanvormischflamme, die bereits aus dem einführenden Abschnitt des Kapitels Grundlagen der Strömungsmechanik (Abb. 1.9) bekannt ist.

3.3 Mittlere Reaktionsgeschwindigkeiten

Zur Lösung der gemittelten Erhaltungsgleichungen (183) und (184) ist zusätzlich zum Turbulenz-Transportmodell des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Abschn. 4 die Bestimmung der mittleren Reaktionsgeschwindigkeiten $\tilde{\omega}_i$ erforderlich. Zur Demonstration der dadurch verursachten Probleme werden zwei Beispiele behandelt (Libby und Williams 1980).

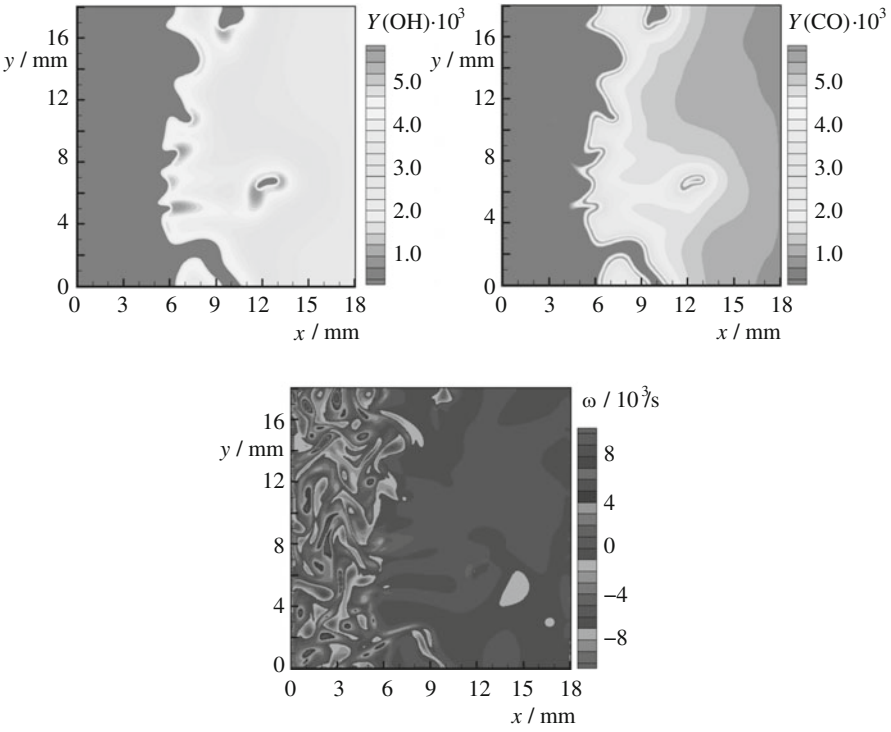


Abb. 10.33 Massenbruch an OH (oben links), CO (oben rechts) und Wirbelstärke (unten) in einer turbulenten vorgemischten Methanflamme

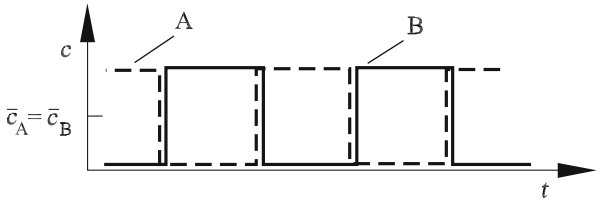


Abb. 10.34 Hypothetischer zeitlicher Konzentrationsverlauf in einer Reaktion A + B → Produkte

Als erstes Beispiel wird eine Reaktion A + B → Produkte bei konstanter Temperatur, aber variablen Konzentrationen betrachtet. Es wird ein hypothetischer – aber doch den Charakter turbulenter nicht-vorgemischter Verbrennung beschreibender – zeitlicher Konzentrationsverlauf entsprechend der Abb. 10.34 angenommen, bei dem c_A und c_B nie gleichzeitig von Null verschieden sind. Es ist (um Verwechslungen mit der turbulenten kinetischen Energie vorzubeugen), der Geschwindigkeitskoeffizient k durch Subskript R gekennzeichnet):

$$\omega_A = -k_R \cdot c_A \cdot c_B \quad \text{und} \quad \overline{\omega}_A = 0\,,$$

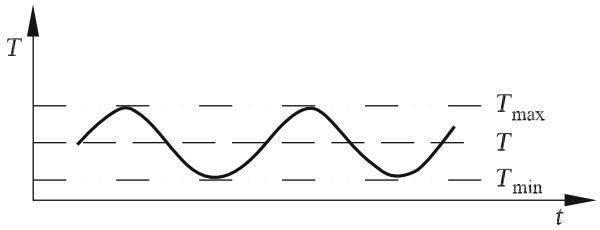


Abb. 10.35 Hypothetischer zeitlicher Temperaturverlauf bei einer Reaktion A + B → Produkte

d. h. die mittlere Reaktionsgeschwindigkeit lässt sich nicht direkt aus den Mittelwerten der Konzentrationen berechnen. Vielmehr gilt die Beziehung für die Mittelwerte:

$$\overline{\omega}_A = -k_R \cdot \overline{c_A \cdot c_B} = -k_R \cdot \overline{c}_A \cdot \overline{c}_B - k_R \cdot \overline{c'_A \cdot c'_B}\,. \tag{10.52}$$

Es ist also keinesfalls erlaubt, die mittleren Reaktionsgeschwindigkeiten einfach (auch nur angenähert) dadurch zu berechnen, dass man die aktuellen Konzentrationen durch die gemittelten Konzentrationen ersetzt.

Als zweites Beispiel wird eine Reaktion bei variabler Temperatur (aber konstanten Konzentrationen) betrachtet, wobei ein sinusförmiger zeitlicher Temperaturverlauf angenommen wird (siehe Abb. 10.35). Als Ergebnis der starken Nichtlinearität der Geschwindigkeitskoeffizienten $k_R = A \cdot \exp(-T_a/T)$ ist $\overline{k}_R$ vollkommen verschieden von $k_R(\overline{T})$. Das soll anhand eines Zahlenbeispiels verdeutlicht werden. Für $T_{min} = 500$ K und $T_{max} = 2000$ K ergibt sich $\overline{T} = 1250$ K. Berechnet man die Reaktionsgeschwindigkeit für eine Aktivierungstemperatur von $T_a = 5 \cdot 10^4$ K ($T_a = E_a/R$), so erhält man:

$$\begin{aligned} k_R(T_{max}) &= 1.4 \cdot 10^{-11} \cdot A\,, \\ k_R(T_{min}) &= 3.7 \cdot 10^{-44} \cdot A\,, \\ k_R(\overline{T}) &= 4.3 \cdot 10^{-18} \cdot A \end{aligned}$$

und nach Berechnung des Zeitmittels (z. B. durch numerische Integration) den Wert

$$\overline{k}_R = 7.0 \cdot 10^{-12} \cdot A\,.$$

Von besonderem Interesse ist diese Tatsache z. B. bei der Behandlung der Stickoxidbildung, die wegen der hohen Aktivierungstemperatur ($T_a = 3.8 \cdot 10^4$ K) stark temperaturabhängig ist. NO wird daher hauptsächlich bei den Temperatur-Spitzenwerten gebildet. Eine Ermittlung des NO beim Temperatur-Mittelwert ist deshalb sinnlos. Temperaturfluktuationen müssen in die Betrachtung einbezogen werden.

Einen Weg zur Formulierung von mittleren Reaktionsgeschwindigkeiten bietet die statistische Behandlung mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

(PDF). Kennt man die PDF, so lässt sich der mittlere Reaktionsterm durch Integration bestimmen. Für das Beispiel A + B → Produkte ergibt sich (Libby und Williams 1980):

$$\overline{\omega} = -\int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^\infty k_\mathrm{R} \cdot c_\mathrm{A} \cdot c_\mathrm{B} \cdot P(\rho, T, w_1, \ldots, w_S, \boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\rho \cdot \mathrm{d}T \cdot \mathrm{d}w_1 \cdot \cdots \mathrm{d}w_S$$

$$= -\frac{1}{M_\mathrm{A} \cdot M_\mathrm{B}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^\infty k_\mathrm{R}(T) \cdot \rho^2 \cdot w_\mathrm{A} \cdot w_\mathrm{B} \cdot P(\rho, T, w_1, \ldots, w_S, \boldsymbol{r}) \cdot$$

$$\mathrm{d}\rho \cdot \mathrm{d}T \cdot \mathrm{d}w_1 \cdot \cdots \mathrm{d}w_S \,. \qquad (10.53)$$

Das Hauptproblem bei diesem Verfahren besteht darin, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion P bekannt sein muss. Zu ihrer Bestimmung gibt es mehrere Verfahren, die je nach den speziellen Anforderungen des bearbeiteten Falles verwendet werden können.

PDF-Transportgleichungen

Den wohl allgemeinsten Weg stellt die Lösung von PDF-Transportgleichungen dar. Aus den Erhaltungsgleichungen für die Teilchenmassen lassen sich Transportgleichungen für die zeitliche Entwicklung der PDFs ableiten. Der große Vorteil dieses Verfahrens ist, dass die chemische Reaktion exakt behandelt wird (während der molekulare Transport auch hier empirisch modelliert werden muss).

Für die numerische Lösung der Transportgleichungen nähert man die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion durch eine sehr große Anzahl verschiedener so genannter stochastischer Partikel, die einzelne Realisierungen der Strömung darstellen. Die Lösung der PDF-Transportgleichungen erfolgt dann mittels eines Monte-Carlo-Verfahrens. Sie ist sehr aufwendig und gegenwärtig auf kleine chemische Systeme mit typischerweise vier Stoffen beschränkt, so dass man unbedingt mit einem reduzierten Mechanismus arbeiten muss.

Empirische Konstruktion von PDF

Bei diesem Verfahren werden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen aus empirischen Daten konstruiert. Dabei wird konsequent die Tatsache ausgenutzt, dass Ergebnisse der Simulation turbulenter Flammen meist nur wenig von der genauen Form der PDFs abhängen.

Eine ganz einfache Art, eine multidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu konstruieren besteht darin, statistische Unabhängigkeit bezüglich der einzelnen Variablen anzunehmen. In diesem Fall lässt sich die PDF in ein Produkt eindimensionaler PDFs zerlegen (Gutheil und Bockhorn 1987):

$$P(\rho, T, w_1, \ldots, w_S) = P(\rho) \cdot P(T) \cdot P(w_1) \cdot \ldots \cdot P(w_S) \,. \qquad (10.54)$$

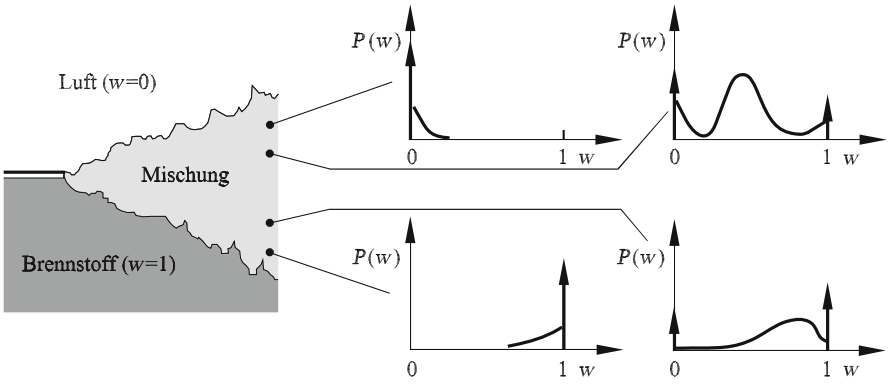


Abb. 10.36 Schematische Darstellung von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für den Massenbruch des Brennstoffs in einer turbulenten Mischungsschicht

Diese Separation ist natürlich nicht korrekt, da z. B. $w_1, w_2, \ldots, w_S$ nicht unabhängig voneinander sind (wegen $\sum w_i = 1$). Aus diesem Grund müssen zusätzliche Korrelationen zwischen den einzelnen Variablen berücksichtigt werden.

Eindimensionale PDFs können aus Experimenten empirisch bestimmt werden. Im Folgenden sollen einige solcher Ergebnisse für einfache Geometrien skizziert werden (Libby und Williams 1994).

In Abb. 10.36 sind PDFs für den Massenbruch des Brennstoffs schematisch für verschiedene Punkte einer turbulenten Mischungsschicht dargestellt. Am Rand der Mischungsschicht ist die Wahrscheinlichkeit, reinen Brennstoff oder reine Luft anzutreffen sehr groß (angedeutet durch Pfeile), während eine Mischung von Brennstoff und Luft nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit vorliegt. Im Inneren der Mischungsschicht ist die Wahrscheinlichkeit, eine Mischung von Brennstoff und Luft anzutreffen, groß. Die PDF besitzt für einen bestimmten Mischungsbruch ein Maximum. Trotzdem liegen auch hier mit großer Wahrscheinlichkeit (angedeutet wieder durch die Pfeile) reine Ausgangsstoffe vor. Der Grund hierfür ist die *Intermittenz*, ein Phänomen, das dadurch bedingt ist, dass durch turbulente Fluktuationen die örtlichen Grenzen zwischen Brennstoff, Mischung und Luft sich ständig verschieben. Zu bestimmten Zeitpunkten befindet sich ein Punkt im reinen Brennstoffstrom oder im reinen Luftstrom (siehe z. B. Libby und Williams 1976, 1994). Ähnliche Ergebnisse erhält man für einen turbulenten Strahl, der als eine Kombination von zwei Mischschichten betrachtet werden kann (siehe Abb. 10.37).

Bei einem turbulenten Reaktor (Abb. 10.38) entspricht die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in etwa einer Gauß-Verteilung. Je weiter man sich von dem Einströmrand entfernt, desto wahrscheinlicher trifft man eine vollständige Vermischung an. Die Breite der Gauß-Verteilung wird immer geringer, bis schließlich die Gauß-Verteilung in eine *Diracsche Deltafunktion* übergeht (die Wahrscheinlichkeit, vollständige Durchmischung anzutreffen, geht gegen eins).

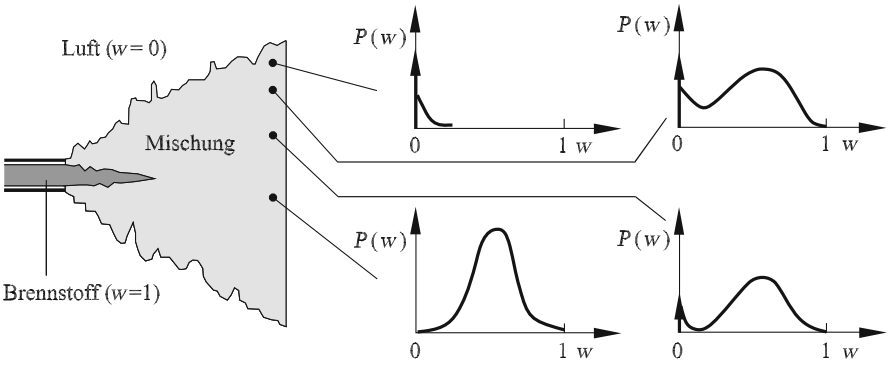


Abb. 10.37 Schematische Darstellung von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für den Massenbruch des Brennstoffs in einem turbulenten Strahl

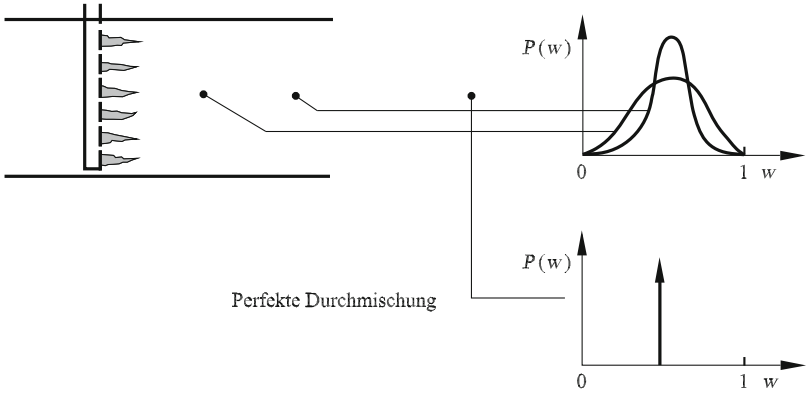


Abb. 10.38 Schematische Darstellung von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für den Massenbruch des Brennstoffs in einem turbulenten Reaktor

Zur analytischen Beschreibung von eindimensionalen PDFs verwendet man z. B. *abgeschnittene Gauß-Funktionen* oder β*-Funktionen*. Die *abgeschnittene Gauß-Funktion* (Abb. 10.39) besteht aus einer Gauß-Verteilung und zwei Diracschen δ-Funktionen zur Beschreibung der *Intermittenzspitzen* (Gutheil und Bockhorn 1987).

Eine analytische Darstellung für diese sehr oft benutzte Funktion ist gegeben durch (Williams 1985):

$$P(Z) = \alpha \cdot \delta(Z) + \beta \cdot \delta(1 - Z) + \gamma \cdot \exp\left(-\frac{(Z-\zeta)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right). \qquad (10.55)$$

Dabei charakterisieren ζ und σ die Lage bzw. die Breite der Gauß-Verteilung ($Z = w_i, T, \ldots$). Die Normierungskonstante γ ergibt sich bei vorgegebenen α und β:

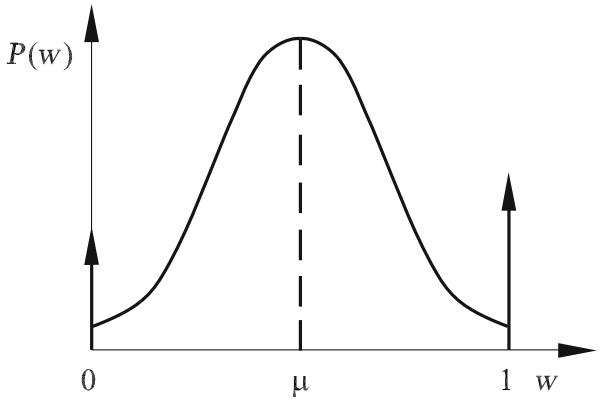


Abb. 10.39 Verlauf einer abgeschnittenen Gauß-Funktion

$$\gamma = \frac{(1-\alpha-\beta)\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\sigma}{\pi}}}{\mathrm{erf}\left(\frac{1-\zeta}{\sqrt{2\cdot\sigma}}\right)+\mathrm{erf}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2\cdot\sigma}}\right)}, \tag{10.56}$$

wobei die Abkürzung erf die Fehlerfunktion (englisch: *error function*) bezeichnet.

Die β-*Funktion* (Abb. 10.40) besitzt den großen Vorteil, dass sie nur zwei Parameter (α, β) enthält, aber trotzdem eine große Breite verschiedener Formen der PDF wiedergeben kann (Rhodes 1979):

$$P(Z) = \gamma \cdot Z^{\alpha-1}\cdot(1-Z)^{\beta-1} \quad \text{mit} \qquad \gamma = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}. \tag{10.57}$$

Der dritte Parameter γ ergibt sich aus der Normierungsbedingung $\int P(Z)\cdot \mathrm{d}Z = 1$. (Es sei in diesem Zusammenhang angemerkt, dass in der Mathematik üblicherweise das Integral $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}\cdot(1-t)^{\beta-1}\cdot \mathrm{d}t$ als β-Funktion bezeichnet wird). Die Konstanten α und β lassen sich aus Mittelwert und Varianz von Z ermitteln als

$$\overline{Z} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{und} \qquad \overline{Z'^2} = \frac{\overline{Z}\cdot(1-\overline{Z})}{1+\alpha+\beta}. \tag{10.58}$$

3.4 Eddy-Break-Up-Modelle

Eddy-Break-Up-Modelle (siehe z. B. Peters 2000) sind empirische Modelle für die mittlere Reaktionsgeschwindigkeit bei sehr schneller Chemie. In diesem Fall wird die Reaktionsgeschwindigkeit durch die Geschwindigkeit der turbulenten Dissipation kontrolliert (*mixed is burnt*). Dieses Modell beschreibt die Reaktionszone als eine Mischung aus unverbrannten und fast vollständig verbrannten Bereichen.

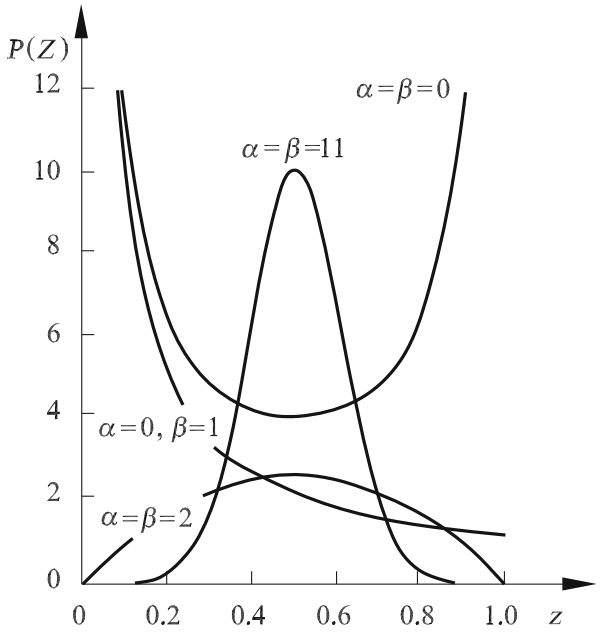


Abb. 10.40 Verlauf der β-Funktion für verschiedene Parametersätze α und β, der Einfachheit halber ist die Normalisierungskonstante $\gamma = 1$ angenommen

Eine Formulierung von Spalding (1970) beschreibt die Geschwindigkeit, mit der Bereiche unverbrannten Gases in kleinere Bruchstücke zerfallen, die ausreichend Kontakt zu bereits verbranntem Gas haben, dadurch eine ausreichend hohe Temperatur haben und somit reagieren, analog zur Abnahme der turbulenten Energie. Es ergibt sich danach für die Reaktionsgeschwindigkeit (F = Brennstoff, C_F ist eine empirische Konstante der Größenordnung 1)

$$\overline{\omega}_F = -\frac{\overline{\rho} \cdot C_F}{\overline{M}} \cdot \sqrt{\overline{w_F''^2}} \cdot \frac{\tilde{\epsilon}}{\tilde{k}}, \tag{10.59}$$

mit der mittleren Molmasse $\overline{M}$, der mittleren Dichte $\overline{\rho}$, dem mittleren Schwankungsquadrat des Brennstoffmassenbruchs $\overline{w_F''^2}$, der turbulenten kinetischen Energie $\tilde{\epsilon}$ und der Dissipationsgeschwindigkeit der Energie $\tilde{k}$.

3.5 Turbulente nicht-vorgemischte Flammen

Nicht-vorgemischte Flammen mit Gleichgewichtschemie

Man erhält einen guten Einblick in den Charakter nicht-vorgemischter turbulenter Flammen, wenn man vereinfacht annimmt, dass Brennstoff und Oxidationsmittel

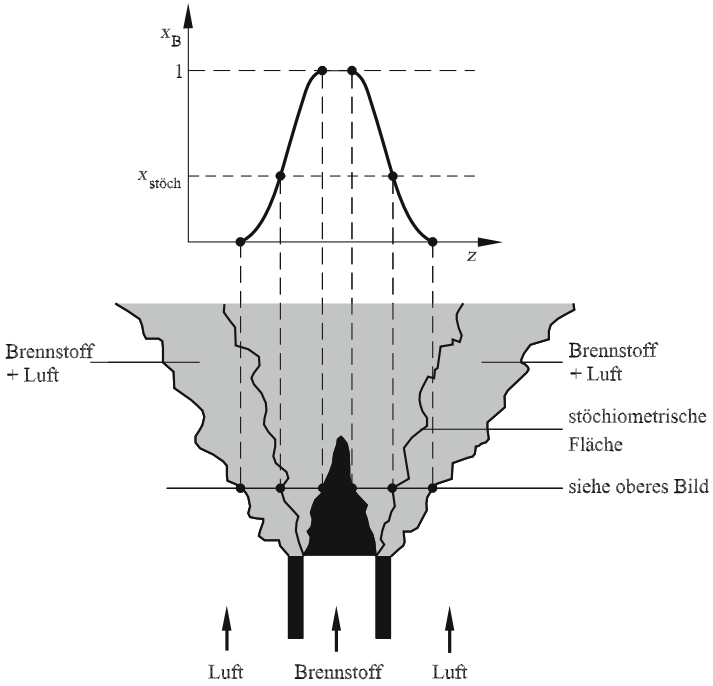


Abb. 10.41 Schematische Darstellung einer Momentaufnahme einer turbulenten nicht-vorgemischten Freistrahlflamme

unendlich schnell reagieren, sobald sie sich gemischt haben. Verwendet man diese Annahme, so muss lediglich bestimmt werden, wie schnell die Mischung stattfindet. Eine Momentaufnahme eines solchen *turbulenten Mischungsprozesses* ist in Abb. 10.41 dargestellt. Brennstoff strömt in das Oxidationsmittel (Sauerstoff, Luft). Turbulente Vermischung bewirkt, dass Brennstoff und Oxidationsmittel eine brennbare Mischung bilden, die unter der oben gemachten Annahme unendlich schneller Chemie sofort reagiert. Neben Bereichen, in denen der Brennstoff überwiegt (fette Mischung) und Bereichen, in denen Oxidationsmittel im Überschuss vorhanden sind (magere Mischung), existiert eine stöchiometrische Fläche, entlang derer eine stöchiometrische Mischung vorliegt. Im oberen Teil der Abbildung ist der Molenbruch beispielhaft für einen bestimmten Abstand zum Brenner dargestellt. In vielen Fällen treten bei turbulenten nicht-vorgemischten Flammen im Bereich sehr nahe der stöchiometrischen Mischung Flammenfronten auf, die sich durch die intensiven Leuchterscheinungen identifizieren lassen.

Neben der Annahme unendlich schneller Chemie werden nun zusätzlich gleiche Diffusionskoeffizienten angenommen, um auch die Beschreibung des Mischungsprozesses zu vereinfachen. Dann mischen alle Spezies gleich schnell und man muss nur die Mischung einer einzigen Variablen betrachten. Da chemische Spezies bei chemischen Reaktionen gebildet oder verbraucht werden, ist es einfacher, den

Mischungsprozess für die Elemente zu verfolgen. Dazu führt man den *Mischungsbruch* ξ ein:

$$\xi = \frac{Z_i - Z_{i2}}{Z_{i1} - Z_{i2}}\,. \tag{10.60}$$

Dabei sind die Z_i Element-Massenbrüche. Es soll nun ein Zwei-Strom-Problem mit den Element-Massenbrüchen Z_{i1} und Z_{i2} in den beiden Strömen (z. B. in einer Strahlflamme) betrachtet werden. ξ ist bei gleichen Diffusivitäten unabhängig von der Wahl des betrachteten Elementes i ($i = 1, \ldots, M$) und wegen Gl. (10.60) und $Z_i = \sum \mu_{ij} \cdot w_j$ Gl. (10.49) linear mit den Massenbrüchen w_j verknüpft. Es ist $\xi = 1$ in Strom 1, $\xi = 0$ in Strom 2. ξ kann als der Massenbruch des Materials gedeutet werden, das aus Strom 1 stammt, $1 - \xi$ als der Massenbruch des Materials, das aus Strom 2 stammt.

Wegen der linearen Abhängigkeit Gl. (10.60) lässt sich mit Gl. (188) eine Erhaltungsgleichung für den Mischungsbruch ξ ableiten:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \xi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \boldsymbol{v} \cdot \xi) - \nabla \cdot (\rho \cdot D \cdot \nabla \xi) = 0\,. \tag{10.61}$$

Bemerkenswert ist, dass in der Erhaltungsgleichung für ξ kein Quellterm auftritt. Man nennt ξ deswegen auch oft *skalare Erhaltungsgröße* (englisch: *conserved scalar*). Nimmt man zusätzlich an, dass die Lewis-Zahl $Le = \lambda/(D \cdot \rho \cdot c_p) = 1$ und, dass keine Wärmeverluste auftreten, so kann auch das Enthalpie- bzw. Temperaturfeld durch ξ mitbeschrieben werden (die kinetische Energie der Strömung ist vernachlässigbar und damit der Druck konstant),

$$\xi = \frac{h - h_2}{h_1 - h_2}\,. \tag{10.62}$$

Bei Annahme von unendlich schneller Chemie (Gleichgewichtschemie), gleichen Diffusivitäten und $Le = 1$ und fehlenden Wärmeverlusten sind alle skalaren Variablen (Temperatur, Massenbrüche und Dichte) eindeutige Funktionen des Mischungsbruches. Diese Funktionen sind direkt durch die Gleichgewichtszusammensetzung gegeben.

Das Problem der Beschreibung turbulenter nicht-vorgemischter Flammen hat sich damit auf das Problem der Beschreibung des turbulenten Mischungsprozesses für den Mischungsbruch ξ reduziert. Für dieses Problem gibt es zahlreiche Ansätze, wie z. B. DNS Reynolds 1989; LES McMurtry et al. 1992, die Lagrangesche Integral-Methode (LIM) Dahm et al. 1996 und die PDF-Methode Pope 1991.

Nach Mittelwertbildung und unter Verwendung des Gradientenansatzes ergibt sich für den stationären Fall (vergleiche Gl. (189)):

$$\nabla \cdot (\overline{\rho} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\xi}) - \nabla \cdot (\overline{\rho} \cdot \nu_{\mathrm{T}} \cdot \nabla \tilde{\xi}) = 0\,. \tag{10.63}$$

Kennt man die Verteilungsfunktion des Mischungsbruches, so lassen sich die Mittelwerte der skalaren Größen berechnen. Da in Gl. (183) und (184) die mittlere Dichte eingeht, lässt sich auf diese Weise das System der gemittelten Erhaltungsgleichungen schließen. Im Idealfall sollte die PDF über ihre Transportgleichung berechnet werden (Pope 1991).

Eine einfachere Methode, die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Mischungsbruches zu bestimmen, besteht darin, dass man eine bestimmte Form der Verteilungsfunktion annimmt (z. B. eine Gauß- oder eine β-Funktion) und durch Mittelwert und Varianz von ξ charakterisiert. Anstelle der Transportgleichung für die PDF müssen dann nur Bilanzgleichungen für Mittelwert und Varianz von ξ gelöst werden. Aus Gl. (10.63) lässt sich eine Erhaltungsgleichung für die Favre-Varianz $\widetilde{\xi''^2} = \overline{\rho \cdot \xi''^2}/\overline{\rho}$ herleiten (Multiplikation von Gl. (10.63) mit ξ und anschließende Mittelwertbildung). Es ergibt sich (Bilger 1980):

$$\nabla \cdot (\overline{\rho} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \widetilde{\xi''^2}) - \nabla \cdot (\overline{\rho} \cdot \nu_\mathrm{T} \cdot \widetilde{\xi''^2}) = 2 \cdot \overline{\rho} \cdot \nu_\mathrm{T} \cdot \nabla^2 \tilde{\xi} - 2 \cdot \overline{\rho \cdot D \cdot \nabla^2 \cdot \xi''} \quad (10.64)$$

wobei $\nabla^2 \xi$ das Betragsquadrat des Gradienten, $(\nabla \xi)^\mathrm{T} \cdot \nabla \xi$ bezeichnet. Den letzten Term dieser Gleichung nennt man *skalare Dissipationsgeschwindigkeit* χ. Auch der Term χ muss in Abhängigkeit bekannter Größen modelliert werden z. B. durch den einfachen Gradiententransport-Ansatz:

$$\tilde{\chi} = 2 \cdot \frac{\overline{\rho \cdot D \cdot \nabla^2 \xi''}}{\overline{\rho}} \approx 2 \cdot D \cdot \nabla^2 \tilde{\xi} \,, \quad (10.65)$$

Aus $\tilde{\xi}$ und $\widetilde{\xi''^2}$ lässt sich nun die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $P(\xi; \boldsymbol{r})$ bestimmen (z. B. eine β-Funktion, siehe Abschn. 3.4). Mit deren Hilfe können dann die interessierenden Mittelwerte berechnet werden, da ρ, w_i und T als Funktionen von ξ bekannt sind:

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_i(\boldsymbol{r}) &= \int_0^1 w_i(\xi) \cdot \tilde{P}(\xi; \boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\xi \,, \\
\tilde{T}(\boldsymbol{r}) &= \int_0^1 T(\xi) \cdot \tilde{P}(\xi; \boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\xi \,, \\
\widetilde{w_i''^2}(\boldsymbol{r}) &= \int_0^1 [w_i(\xi) - \tilde{w}_i(\boldsymbol{r})]^2 \cdot \tilde{P}(\xi; \boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\xi \,, \\
\widetilde{T''^2}(\boldsymbol{r}) &= \int_0^1 \left[T(\xi) - \tilde{T}(\boldsymbol{r})\right]^2 \cdot \tilde{P}(\xi; \boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\xi \,. \quad (10.66)
\end{aligned}$$

$\tilde{P}$ ist dabei eine Favre-gemittelte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, die sich aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion durch Integration über die Dichte berechnen lässt:

$$\tilde{P}(\xi;\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\overline{\rho}} \cdot \int_0^\infty \rho \cdot P(\rho,\xi;\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\rho\,. \tag{10.67}$$

Damit besteht das Gleichungssystem aus den Erhaltungsgleichungen für Dichte- und Geschwindigkeitsfeld (z. B. unter Benutzung der Gleichungen des K-ε-Modells) sowie den Bilanzgleichungen für Favre-Mittelwert $\tilde{\xi}$ und Favre-Varianz $\widetilde{\xi''^2}$ des Mischungsbruches ξ. Aus $\tilde{\xi}$ und $\widetilde{\xi''^2}$ lässt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $P(\xi)$ bestimmen. Wegen des eindeutigen Zusammenhangs zwischen ξ und allen skalaren Größen (d. h. die Gleichgewichtszusammensetzungen) kann man die Statistik jedes Skalars berechnen. Mit diesen Gleichungen lassen sich Flammenlängen, Temperaturfelder und die Konzentrationsfelder von Hauptkomponenten (Brennstoff, Sauerstoff, Wasser, Kohlendioxid) berechnen.

Das Modell wird jedoch nie eine Flammenlöschung simulieren können, da man unendlich schnelle Chemie annimmt. Auch die Rußbildung und die Bildung von Stickoxiden lassen sich durch das Modell nicht beschreiben. Deswegen werden nun Modellverbesserungen behandelt, die den Einfluss endlich schneller Chemie berücksichtigen.

Nicht-vorgemischte Flammen mit endlich schneller Chemie

Im Falle endlich schneller Chemie müssen die vollständigen Erhaltungsgleichungen betrachtet werden, d. h. neben den Erhaltungsgleichungen für Gesamtmasse, Energie und Impuls zusätzlich alle Erhaltungsgleichungen für die einzelnen Spezies des Reaktionssystems mit den Quelltermen $M_i \cdot \omega_i$:

$$\frac{\partial(\rho \cdot w_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \boldsymbol{v} \cdot w_i) + \nabla \cdot (\rho \cdot D \cdot \nabla w_i) = M_i \cdot \omega_i \qquad i = 1, \ldots, \$ \tag{10.68}$$

Wie in Abschn. 3.3 beschrieben wurde, treten Probleme bei der Mittelung der Quellterme auf, da diese sowohl von der Temperatur als auch von den Konzentrationen nichtlinear abhängen.

Prinzipiell ist eine Mittelung möglich, wenn die PDFs der Massenbrüche w_i bekannt sind. Dann kann man die Gleichungen mitteln und lösen (Gutheil und Bockhorn 1987). Probleme treten jedoch dadurch auf, dass man die PDF meist nicht gut kennt und außerdem die Rechnungen wegen der großen Anzahl verschiedener Spezies den Bereich des Möglichen sprengen.

Mit zunehmender Mischungsgeschwindigkeit wird ein bestimmter chemischer Prozess als erster aus dem Gleichgewicht gebracht. Nimmt die Mischungsgeschwindigkeit weiter zu, so weicht ein weiterer Prozess vom Gleichgewicht ab. Die chemischen Prozesse werden nacheinander vom Gleichgewicht abweichen, bis die Reaktionen, die den Hauptteil der Energiebilanz ausmachen, mit Zeitskalen vergleichbar der des Mischungsprozesses ablaufen. Wird dann die Mischungsgeschwindigkeit weiter erhöht, so weicht die Temperatur von ihrem Gleichgewichtswert ab.

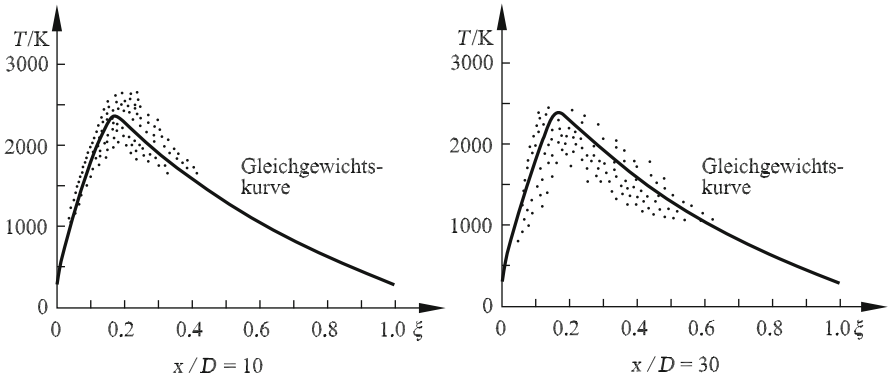


Abb. 10.42 Laser-Raman-Streudiagramm von simultanen Messungen des Mischungsbruchs ξ und der Temperatur T in einer turbulenten nicht-vorgemischten Wasserstoff-Strahlflamme. Die Strahlgeschwindigkeit ist im rechten Bild um einen Faktor 3 größer (Magre und Dibble 1988)

Dies ist in Abb. 10.42 dargestellt. Die Temperatur weicht nur mäßig von ihren Gleichgewichtswerten ab. Linkes und rechtes Diagramm zeigen das gleiche Experiment, wobei lediglich die Geschwindigkeit des Wasserstoffstrahls im rechten Bild auf das Dreifache erhöht wurde. Das Laser-Raman-Streuungsexperiment misst simultan den Mischungsbruch und die Temperatur. Jeder Mikrosekunden-Puls liefert einen Punkt im Diagramm.

Im linken Bild häufen sich die Messungen um die Gleichgewichtslinie. Rechts zeigt die Abnahme der Temperatur, dass der Mischungsprozess, der einer horizontalen Bewegung im Diagramm entspricht, mit der Wärmefreisetzung durch chemische Reaktion, die einer vertikalen Bewegung im Diagramm entspricht, konkurriert. Die Messungen sind ganz deutlich unter der Gleichgewichtslinie. Eine weitere Erhöhung der Strahlgeschwindigkeit führt zu einer globalen Flammenlöschung.

Ein anderes Verhalten zeigt Abb. 10.43. Diese Streudiagramme zeigen lokale Flammenlöschung in der Flamme. Links ist eine nicht-vorgemischte Methan-Luft-Flamme bei kleiner Mischungsgeschwindigkeit dargestellt. Rechts sind Messungen in der gleichen Flamme, aber an einem anderen Ort in der Flamme, nämlich dort, wo sich Luft schnell mit dem Brennstoff mischt. Die lokale Flammenlöschung äußert sich dadurch, dass zahlreiche Messpunkte weit von der Gleichgewichtslinie entfernt liegen. Wird die Strahlgeschwindigkeit weiter erhöht, so beobachtet man auch hier globale Flammenlöschung.

Eine Verbesserung des im letzten Kapitel vorgestellten Gleichgewichtsmodells erhält man dadurch, dass man die Geschwindigkeit des ersten Nichtgleichgewichts-Prozesses berechnet und annimmt, dass sich die restlichen (schnelleren) chemischen Prozesse im Gleichgewicht befinden. Je schneller die Mischung stattfindet, desto mehr wird dieser langsame Prozess vom Gleichgewicht abweichen. Man benötigt dabei einen Parameter, um dieses Abweichen vom Gleichgewicht zu beschreiben.

Die laminaren Gegenstromflammen aus Abschn. 2.4 besitzen Lösungen, die zunehmend vom Gleichgewicht abweichen. Der entscheidende Parameter hierbei

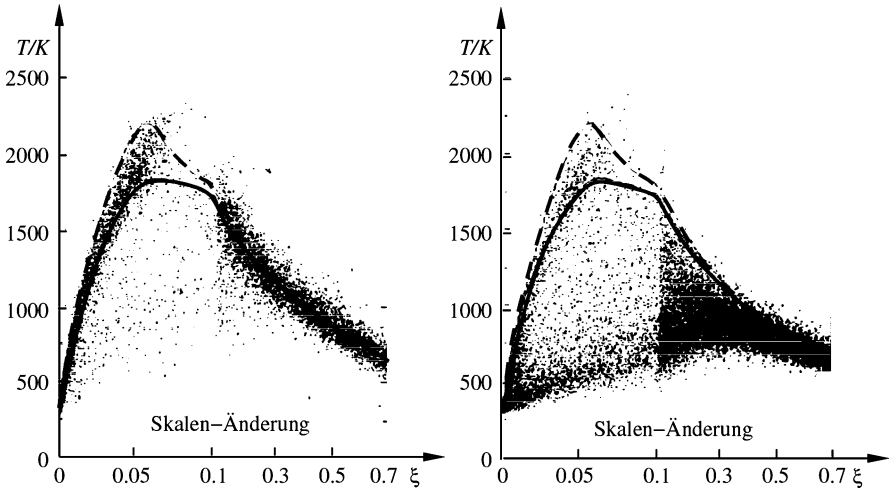


Abb. 10.43 Laser-Raman-Streudiagramm von simultanen Messungen des Mischungsbruchs ξ und der Temperatur T in einer turbulenten nicht-vorgemischten Methan-Strahlflamme bei verschiedenen Abständen vom Brenner (Dibble et al. 1987), die Linien geben Flamelet-Rechnungen für $a = 1\ \mathrm{s}^{-1}$ (gestrichelt) und $a = 320\ \mathrm{s}^{-1}$ wieder

ist die Streckung a, die mit der skalaren Dissipationsrate $\chi = 2 \cdot D \cdot \nabla^2 \xi$ in die Beziehung (Dahm und Bish 1993)

$$a = 2 \cdot \pi \cdot D \cdot \left[\frac{\nabla^2 \xi}{(\xi^+ - \xi^-)^2} \right] \cdot \exp\left(2 \cdot \mathrm{erf}^{-1} \left[\frac{\xi - \frac{1}{2} \cdot (\xi^+ + \xi^-)}{\frac{1}{2} \cdot (\xi^+ - \xi^-)} \right] \right)^2 \quad (10.69)$$

für eine lokal zweidimensionale Strömung übergeht. (Für die Tsuji-Geometrie, z. B. in Abb. 10.21, nähert man die Streckungsgeschwindigkeit üblicherweise durch die Lösung der Potentialströmung, $a = 2 \cdot V/R$). Diese Gleichung beschreibt korrekt, dass bei jeder Streckung a die skalare Dissipation groß oder klein sein kann, je nachdem ob die Differenz zwischen ξ^+ und ξ^- groß oder klein ist.

Die skalare Dissipationsgeschwindigkeit ist somit ein passender Parameter, der die Abweichung vom Gleichgewicht beschreiben kann. Die skalaren Größen in der Flamme sind dann wiederum eindeutige Funktionen des Mischungsbruchs, wobei jedoch nicht die Gleichgewichtswerte benutzt werden, sondern die Werte einer gestreckten Flamme. Dies bedeutet, dass man die turbulente Flamme als ein Ensemble vieler kleiner laminarer Flämmchen (*Flamelets*) sieht, die alle die gleiche skalare Dissipationsgeschwindigkeit ξ besitzen. Dieses Modell stellt eine große Verbesserung dar. Nicht-Gleichgewichts-Konzentrationen von CO, NO und anderen Stoffen werden vorhergesagt. Das Modell wird weiter verbessert wenn man zulässt, dass das Ensemble der Flamelets eine Verteilung der skalaren Dissipationsgeschwindigkeit besitzt, da sich das Geschwindigkeitsfeld in der Flamme durch die Bewegung der Wirbel ändert. Solch ein Modell wird im Folgenden vorgestellt.

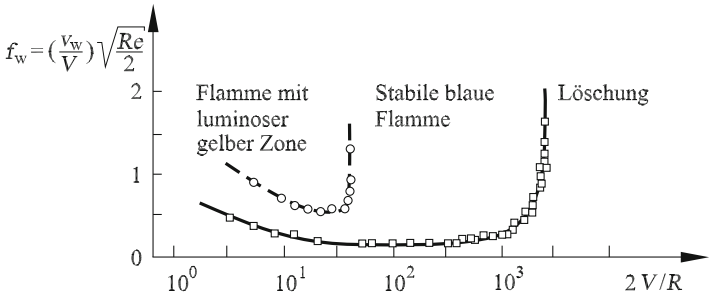


Abb. 10.44 Stabilitätsdiagramm einer laminaren nicht-vorgemischten Gegenstromflamme (Tsuji und Yamaoka 1967)

Flammenlöschung

Laminare nicht-vorgemischte Gegenstromflammen wurden in Abschn. 2.4 schon beschrieben. Es zeigte sich, dass charakteristische Parameter wie z. B. Flammentemperaturen sehr stark von der Streckung abhängen. Die Streckung (charakterisiert durch den Streckungsparameter a) beschreibt dabei den Geschwindigkeitsgradienten entlang der Flammenfläche.

Bei genügend großer Streckung verlöschen die laminaren nicht-vorgemischten Flammen. Dieses Verhalten ist in Abb. 10.44 dargestellt. Oberhalb eines kritischen Streckungsparameters (entsprechend einer kritischen Anströmgeschwindigkeit V der Luft) wird die Flamme *ausgeblasen*. f_W ist ein dimensionsloser Ausströmparameter, der sich aus der Geschwindigkeit V der einströmenden Luft, der Austrittsgeschwindigkeit v_W des Brennstoffs aus dem porösen Zylinder, der Reynolds-Zahl Re und dem Zylinderradius R berechnen lässt. Die Streckung ist dabei gegeben durch $a = 2 \cdot V/R$.

Abb. 10.45 zeigt berechnete Temperaturprofile für verschiedene skalare Dissipationsgeschwindigkeiten χ, d. h. für verschiedene Streckungen a, in einer nicht-vorgemischten Gegenstromflamme. Mit wachsender Streckung sinkt die maximale Flammentemperatur. Oberhalb einer bestimmten Streckung a_q (hier für $\chi_q = 20.6\ s^{-1}$, wobei der Subskript q für *quenching* steht) tritt schließlich Flammenlöschung auf (Rogg et al. 1987).

Die Temperatur sinkt, da der konvektiv-diffusive Wärmetransport zunimmt, während gleichzeitig durch die verringerte Verweilzeit die Wärmeerzeugung durch chemische Reaktion abnimmt. Flammen nahe der Verlöschung werden empfindlich durch die Lewis-Zahlen $Le = \lambda/(D \cdot \rho \cdot c_p)$, d. h. durch das Verhältnis von molekularem Wärmetransport zu molekularem Stofftransport, beeinflusst (Tsuji and Yamaoka 1967; Peters und Warnatz 1982). Bei turbulenten Flammen wird die Streckung der laminaren Flamelets durch die skalare Dissipationsgeschwindigkeit am Ort stöchiometrischer Mischung bestimmt. Die skalare Dissipationsgeschwindigkeit ist demnach ein direktes Maß für die Streckung. Übersteigt sie einen

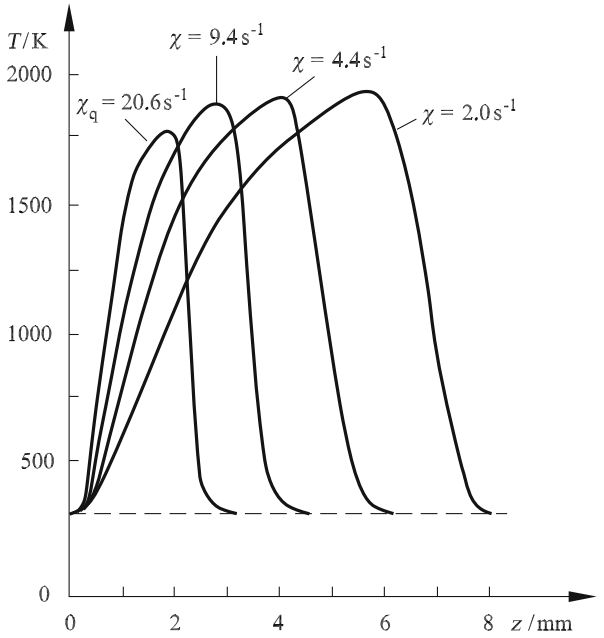


Abb. 10.45 Berechnete Temperaturprofile in einer nicht-vorgemischten CH_4-Luft-Gegenstromflamme für verschiedene skalare Dissipationsgeschwindigkeiten χ; die Flammen-Löschung tritt bei $\chi > 20.6\ \mathrm{s}^{-1}$ auf, Frischgas-Temperatur $T = 298$ K auf beiden Seiten, Druck $p = 1$ bar

kritischen Wert, so tritt lokale Verlöschung der Flamelets ein. Auf diese Weise lassen sich Löschprozesse in turbulenten nicht-vorgemischten Flammen erklären.

Auf die Löschung durch Streckung lässt sich mit Hilfe des Flamelet-Modells auch das *Abheben* von turbulenten Flammen zurückführen, das in Abb. 10.46 schematisch dargestellt ist. Am Düsenaustritt ist die Streckung der Flammenfront am größten, demgemäß tritt hier am häufigsten Löschung ein. Die mittlere leuchtende Flammenkontur zeigt also ein Abheben vom Brenner an, das umso größer ist, je größer die Austrittsgeschwindigkeit des Brennstoffs ist. Die praktische Bedeutung dieser Betrachtung über den Abhebevorgang liegt in der Möglichkeit, Löschprozesse (z. B. an brennenden Ölquellen) optimal durchzuführen, nämlich am Fuß der Flamme, wo die Neigung zur Löschung wegen der dort stärksten Streckung am größten ist.

Bei der Modellierung von turbulenten nicht-vorgemischten Flammen werden Löschprozesse dadurch berücksichtigt, dass bei der Ermittlung der Mittelwerte für Dichte, Temperatur und Massenbrüche nur über denjenigen Bereich der skalaren Dissipationsgeschwindigkeit integriert wird, in dem keine Flammenlöschung stattfindet:

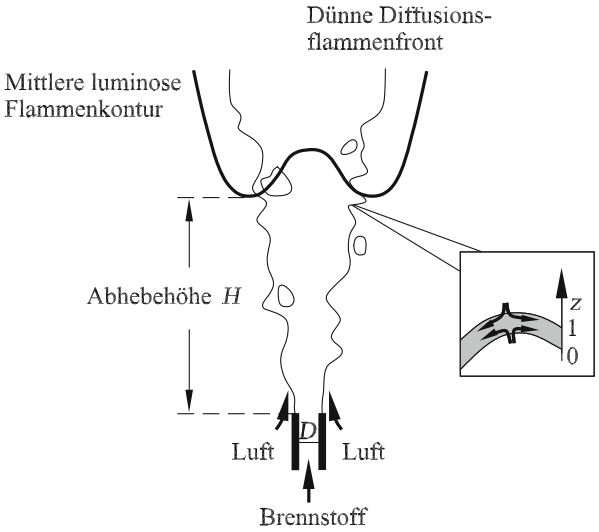


Abb. 10.46 Schematische Darstellung der Vorgänge beim Abheben einer turbulenten nicht-vorgemischten Freistrahlflamme

$$\tilde{T}(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 \int_0^{\chi_q} T^{(F)}(\chi,\xi)\cdot \tilde{P}^{(F)}(\chi,\xi;\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\chi\cdot \mathrm{d}\xi + \int_0^1 \int_{\chi_q}^{\infty} T_u(\chi,\xi)\cdot \tilde{P}^{(F)}(\chi,\xi;\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\chi\cdot \mathrm{d}\xi\,. \tag{10.70}$$

Analoge Ausdrücke erhält man für die anderen Mittelwerte in den Gl. (10.66). Nach der lokalen Verlöschung bei nicht-vorgemischten Flammen mischen sich die Reaktanden. Dies führt lokal zu Bereichen partiell vorgemischter Flammen, und man benötigt einen weiteren Parameter, um diese Vormischung zu beschreiben (Rogg et al. 1987). Die Prozesse in turbulenten vorgemischten Flammen werden in Abschn. 3.6 behandelt.

PDF-Simulationen turbulenter nicht-vorgemischter Flammen

In Abschn. 3 wurde angemerkt, dass das *Schließungsproblem* der chemischen Quellterme gelöst ist, wenn man die gebundene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) der Skalare kennt. Manche Verfahren nehmen dazu bestimmte analytische Ausdrücke für die PDF an (z. B. abgeschnittene Gauß-Funktionen oder β-Funktionen). Diese Funktionen sind durch Mittelwert und Varianz einer Variablen bestimmt. Aus den Navier-Stokes-Gleichungen lassen sich Bilanzgleichungen für diese zwei Variablen ableiten.

Obwohl große Fortschritte mit diesem Verfahren erzielt wurden (siehe z. B. Libby und Williams 1994), lässt sich nicht übersehen, dass die tatsächlichen PDFs oft Eigenschaften aufweisen, die durch die analytischen Funktionen nur unzureichend wiedergegeben werden. Prinzipiell lässt sich jede PDF durch ihre (unendlich viele) Momente beschreiben. Die Herleitung von Bilanzgleichungen für die höheren Momente und deren Lösung ist jedoch von einem praktischen Gesichtspunkt aus nicht sinnvoll.

Die Form der gebundenen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Skalare ergibt sich aus den Mischungsprozessen und der chemischen Reaktion und ist damit durch die Navier-Stokes-Gleichungen zusammen mit den Teilchenerhaltungsgleichungen bestimmt. Ausgehend von diesen Gleichungen lässt sich eine Transportgleichung für die *gebundene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von Geschwindigkeit und Skalaren* herleiten (Pope 1991). Die Einpunkt-Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(v_x, v_y, v_z, \psi_1, \ldots, \psi_n; x, y, z, t) \cdot \mathrm{d}v_x \cdot \mathrm{d}v_y \cdot \mathrm{d}v_z \cdot \mathrm{d}\psi_1 \cdot \cdots \cdot \mathrm{d}\psi_n \quad (10.71)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit zur Zeit t und am Ort x, y, z an, dass das Fluid Geschwindigkeitskomponenten im Bereich von v_i und $v_i + \mathrm{d}v_i$ hat und Werte der Skalare (Massenbrüche, Dichte, Enthalpie) zwischen ψ_α und $\psi_\alpha + \mathrm{d}\psi_\alpha$. Dann lautet die Transportgleichung, die die Entwicklung der PDF beschreibt (Pope 1991):

$$\rho(\boldsymbol{\Psi}) \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{\Psi}) \cdot \sum_{j=1}^{3} \left(v_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \sum_{j=1}^{3} \left(\left[\rho(\boldsymbol{\Psi}) \cdot g_j - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial v_j} \right) +$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Psi}_\alpha} [\rho(\boldsymbol{\Psi}) \cdot S_\alpha(\boldsymbol{\Psi}) \cdot f] \right) = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \left[\left\langle \frac{\partial p'}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} | \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi} \right\rangle \cdot f \right] \right)$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Psi}_\alpha} \left[\sum_{i=1}^{3} \left\langle \frac{\partial J_i^\alpha}{\partial x_i} | \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi} \right\rangle \cdot f \right] \right), \quad (10.72)$$

wobei x_i die x-, y- und z-Koordinaten bezeichnen, g_i die Erdbeschleunigung in x-, y- und z-Richtung, $\boldsymbol{\Psi}$ den n-dimensionalen Vektor der Skalare, v_j die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}$, S_α die Quellterme für die Skalare (z. B. chemische Quellterme), τ_{ij} die Komponenten des Schubspannungs-Tensors und J_i^α die Komponenten der molekularen Stromdichten (z. B. Diffusions- oder Wärmestromdichte) des Skalars α in i-Richtung. Die Terme $\langle q | \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi} \rangle$ kennzeichnen *bedingte Erwartungswerte* der Variable q. So ist $\langle q | \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi} \rangle$ der Mittelwert von q unter der Nebenbedingung, dass Geschwindigkeit und Zusammensetzung jeweils die Werte $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{\Psi}$ annehmen. Physikalisch bedeutet dies, dass die bedingten Erwartungswerte die Mittelwerte der molekularen Stromdichten für bestimmte Werte der Geschwindigkeit und der Skalare beschreiben.

Der erste Term auf der linken Seite beschreibt die zeitliche Änderung der PDF, der zweite die Konvektion (Transport im Ortsraum), der dritte den Transport im Geschwindigkeitsraum durch Gravitation und mittlere Druckgradienten und der vierte den Transport im Zustandsraum durch Quellterme (z. B. chemische Reaktion). Besonders wichtig ist hierbei, dass alle Terme auf der linken Seite der Gleichung in geschlossener Form auftreten. Die chemische Reaktion wird also, was der große Vorteil des Verfahrens ist, exakt behandelt.

Die bedingten Erwartungswerte $\langle q|\boldsymbol{v},\boldsymbol{\Psi}\rangle$ der molekularen Stromdichten auf der rechten Seite der Gleichung müssen jedoch modelliert werden, da sie nicht in geschlossener Form auftreten. Dies bedeutet, dass man eine Abhängigkeit dieser Terme von den bekannten (z. B. berechneten) Größen formulieren muss. Die Notwendigkeit solcher Modelle resultiert daraus, dass man nur eine Einpunkt-PDF zur Beschreibung der Strömung verwendet und somit keine Informationen über räumliche Korrelationen vorliegen hat.

Die Transportgleichung (10.72) für die Einpunkt-PDF kann mit den heutigen Rechnern nicht einfach gelöst werden. Das Problem ist dabei die hohe Dimension. Während bei den Navier-Stokes-Gleichungen nur die Zeit und die Ortskoordinaten unabhängige Variable sind, sind bei der Transportgleichung (10.72) auch die Geschwindigkeitskomponenten und die Skalare unabhängige Variable. Die *Monte-Carlo*-Methode stellt einen Ausweg für dieses Problem dar. Bei diesem Verfahren wird die PDF durch eine sehr große Anzahl (z. B. 10^5 bei räumlich zweidimensionalen Systemen) *stochastischer Partikel* genähert. Diese Partikel verändern zeitlich ihre Eigenschaften bedingt durch Konvektion, chemische Reaktion, molekularen Transport und äußere Kräfte. Sie imitieren somit die Entwicklung der PDF (Pope 1991).

In praktischen Anwendungen reduziert man die gebundene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von Geschwindigkeiten und Skalaren $f(\boldsymbol{v}, T, w_i, \rho)$ auf eine PDF für die Skalare (zur exakten Beschreibung der chemischen Reaktion) und berechnet das Geschwindigkeitsfeld über ein Turbulenzmodell (z. B. das k-ε-Modell), das auf den gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen basiert. Beide Modelle koppeln über die Dichte ρ. Das PDF-Modell liefert ein Dichtefeld, das in das Turbulenzmodell eingeht. Daraus wird ein neues Strömungsfeld berechnet und die Information an das PDF-Modell zurückgegeben. Dieser Prozess wird so lange wiederholt, bis man eine konvergierte Lösung erhalten hat. Solche hybriden PDF/Turbulenzmodell-Simulationen ermöglichen die realistische Behandlung turbulenter Flammen. Als Beispiel zeigt Abb. 10.47 einen Vergleich zwischen experimentellen Ergebnissen an einer rezirkulierenden nicht-vorgemischten Methan-Luft-Flamme mit einer entsprechenden Simulation. Die Simulation basiert auf einem hybriden Verfahren in Kombination mit vereinfachter chemischer Kinetik (ILDM, Warnatz et al. 2001). Die Übereinstimmung ist recht gut. Das Modell ist deutlich besser als ein *Eddy-Dissipation*-Modell (verbessertes EBU-Modell, siehe Abschn. 3.4), das annimmt, dass die chemische Reaktion viel schneller als das molekulare Mischen stattfindet. Die Annahme schneller Chemie überschätzt die Produktbildung und damit den Temperaturanstieg. Als Konsequenz daraus werden die vorhergesagten Werte für die NO-Bildung erheblich zu groß sein.

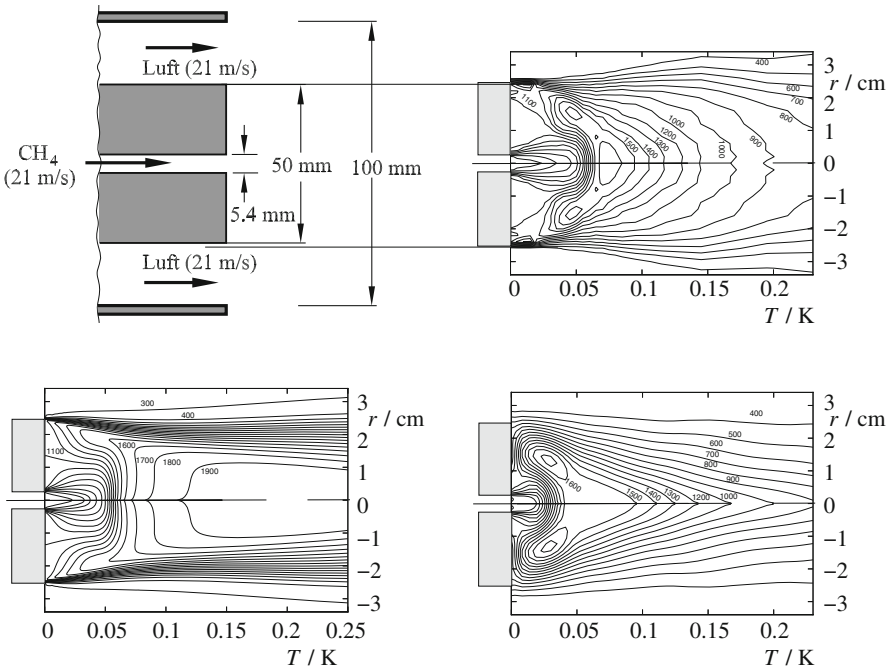


Abb. 10.47 Simulation einer nicht-vorgemischten CH_4-Luft-Strahlflamme, (oben links) Konfiguration, (oben rechts) gemessene Temperaturprofile, $T_{max} \approx 1600$ K, (unten links) Eddy-Dissipation-Modell, $T_{max} \approx 1900$ K, (unten rechts) kombiniertes PDF/Turbulenzmodell-Verfahren, $T_{max} \approx 1600$ K

3.6 Turbulente Vormischflammen

Eine vorgemischte Flamme im turbulenten Strömungsfeld ist in Abb. 10.48 dargestellt. Eine Mischung aus Brennstoff und Oxidationsmittel strömt nach oben und eine vorgemischte Flamme stabilisiert sich durch Rezirkulation heißer Gase hinter einem Staukörper. Die Flamme pflanzt sich vom Staukörper aus in die unverbrannte Mischung fort. Wäre die Strömung laminar, so hätte die Flamme eine *V-Form*. Da die Strömung jedoch turbulent ist, ändert sich der Winkel der Flamme ständig, je nach der lokalen Anströmgeschwindigkeit, und die Flamme nimmt die in Abb. 10.48 gezeigte Form an.

Die bei zunehmendem Turbulenzgrad zunehmend dreidimensionale Struktur der Flamme lässt sich anhand des *Borghi-Diagramms* erklären (Borghi 1984; Candel et al. 1994 und Poinsot et al. 1991), das in Abb. 10.49 in einer doppelt logarithmischen Auftragung dargestellt ist. Aufgetragen ist v'/v_L, die Turbulenzintensität v' normiert durch die laminare Flammengeschwindigkeit v_L, gegen l_0/l_L, d. h. die größte Längenskala l_0 der Wirbel normiert durch die laminare Flammendicke l_L.

Das Diagramm wird durch verschiedene Geraden in einzelne Bereiche aufgeteilt. Ist die Turbulenz-Reynolds-Zahl $Re_t = v' \cdot l_0/\nu$ kleiner als Eins, $Re_t < 1$, so

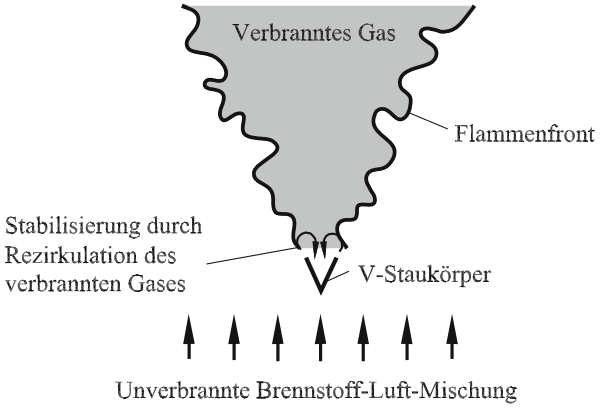


Abb. 10.48 Schematische Darstellung einer Momentaufnahme einer staukörperstabilisierten turbulenten Vormischflamme

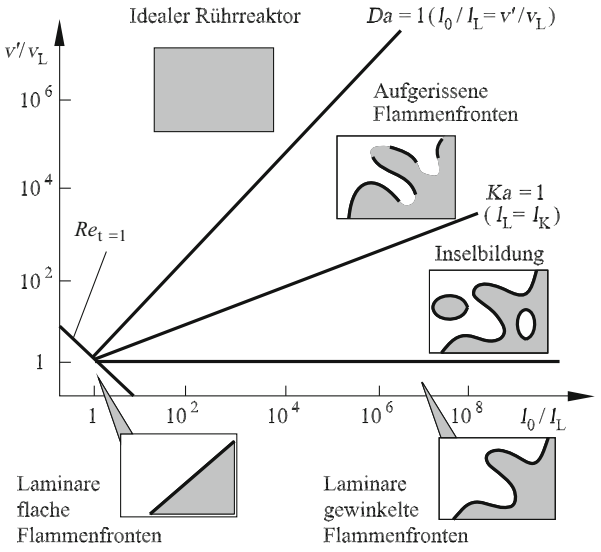


Abb. 10.49 Borghi-Diagramm

findet laminare Verbrennung statt. Der Bereich turbulenter Verbrennung ($Re_t > 1$) lässt sich weiter unterteilen. Dazu ist es vorteilhaft, zwei dimensionslose Größen neu einzuführen, nämlich die (*turbulente*) *Karlovitz-Zahl* Ka und weiterhin die *turbulente Damköhler-Zahl* Da.

Die Karlovitz-Zahl Ka beschreibt das Verhältnis der Zeitskala t_L der laminaren Flamme ($t_L = l_L/v_L$) zur Kolmogorov-Zeitskala t_K:

$$Ka = \frac{t_L}{t_K} \quad \text{mit} \qquad t_K = \sqrt{\frac{\nu}{\tilde{\epsilon}}}\,, \tag{10.73}$$

wobei ν eine charakteristische kinematische Viskosität ist ($\nu = \mu/\rho$) und $\tilde{\epsilon}$ die Dissipationsgeschwindigkeit der turbulenten kinetischen Energie. Bei der Kolmogorov-Skala ist die Zeit, die ein Wirbel der Größe l_K für eine Umdrehung braucht, so groß wie die Zeit, die durch Diffusion durch den Wirbel hindurch benötigt wird. Ist die Zeitskala der laminaren Flamme kleiner als die Kolmogorov-Skala, so liegen lokal laminare Vormischflammen vor, die in die turbulente Strömung eingebettet sind. Im Borghi-Diagramm liegt dieser *Flamelet-Bereich* unterhalb der Geraden $Ka = 1$.

Die turbulente Damköhler-Zahl Da beschreibt das Verhältnis zwischen den makroskopischen Zeitskalen und der Zeitskala der chemischen Reaktion

$$Da = \frac{t_0}{t_L} = \frac{l_0 \cdot v_L}{v' \cdot l_L} . \tag{10.74}$$

Für $Da < 1$ ist die Zeit für die chemische Reaktion länger als die Zeit für die ablaufenden physikalischen Prozesse. In diesem Bereich wechselwirken die Wirbel direkt mit der Flammenstruktur, die so sehr verbreitert ist, dass man sie kaum noch als *Flammenfront* bezeichnen kann. Im Borghi-Diagramm liegt dieser Bereich oberhalb der Geraden $Da = 1$. Dieser Bereich wird auch *homogener Reaktor*, *perfekter Rührreaktor* oder *Idealreaktor* genannt.

Zwischen dem Bereich des Idealreaktors und dem Flamelet-Bereich befindet sich die *Reaktionszone*, wo sich ein Teil der Wirbel in der Flammenfront befindet (Wirbel, die Längenskalen l_K kleiner als l_L besitzen). In jeder turbulenten Strömung liegt ein breites Spektrum verschiedener Dissipationsgeschwindigkeiten $\tilde{\epsilon}$ vor, die wahrscheinlich eine logarithmische Normalverteilung besitzen (Dahm und Bish 1993; Dahm et al. 1996). Aus diesem Grund lassen sich die Bedingungen in einer turbulenten Flamme nicht als Punkt im Borghi-Diagramm beschreiben, sondern durch eine Zone, die sich über verschiedene Bereiche des Diagramms erstrecken kann.

Flamelet-Behandlung

Die bisher beschriebenen Hilfsmittel erlauben die Berechnung laminarer vorgemischter flacher Flammen, z. B. der Profile von Temperatur und Konzentrationen (einschließlich Schadstoffen) sowie der Flammengeschwindigkeit. Turbulente Flammen sind jedoch dreidimensional und instationär. Eine direkte numerische Simulation (DNS) übersteigt deshalb (vergl. Abschn. 3.2) weit den Bereich des heute Möglichen bezüglich der Rechenkapazität. Die praktische Alternative hierzu ist, Modelle zu entwickeln, die eine Beschreibung der wichtigsten Eigenschaften der turbulenten Flammen erlauben.

Das *Flamelet-Modell* turbulenter vorgemischter Flammen ist analog zum Flamelet-Modell nicht-vorgemischter Flammen. Die turbulente Flamme wird als ein Ensemble vieler kleiner laminarer Flammen im turbulenten Strömungsfeld betrachtet. Geht die turbulente Reynolds-Zahl Re_t gegen Null, so geht das Modell korrekt in das Modell einer laminaren Flamme über. Es herrscht die übereinstimmende Meinung, dass das Flamelet-Konzept im Bereich großer Damköhler-Zahlen, wo die turbulenten Zeitskalen größer sind als die Zeitskala der laminaren Flammen,

angewendet werden kann. Dieser Bereich liegt im unteren rechten Teil des Borghi-Diagramms (Abb. 10.49).

In turbulenten nicht-vorgemischten Flammen konnte (zumindest im Falle schneller Chemie) das Konzentrationsfeld durch den Mischungsbruch vollständig beschrieben werden. Für turbulente Vormischflammen ist diese Begriffsbildung sinnlos, da Brennstoff und Oxidationsmittel schon vor der Reaktion miteinander vermischt sind. Daher muss eine andere Variable zur Beschreibung des Verbrennungsprozesses gewählt werden. Es hat sich deshalb durchgesetzt, dazu eine *Fortschrittsvariable* c zu benutzen, die den Fortgang der Verbrennung in einer Vormischflammenfront beschreibt und so wie der Mischungsbruch Werte von Null bis Eins annimmt (Bray 1980). Dazu benutzt man z. B. den Prozentsatz der Bildung eines Endproduktes wie

$$w_{CO_2} = c \cdot w_{CO_2,b}\,, \tag{10.75}$$

wobei der Index b das verbrannte Gas bezeichnet. Das benutzte Profil darf kein Maximum aufweisen, da sonst keine eindeutige Festlegung von c möglich ist. Die Skalare, wie z. B. OH, O_2, CO, CO_2 usw., sind dann an jedem Punkt in der Strömung eindeutig durch die Reaktionsfortschrittsvariable c und, wenn nötig, durch die lokale Dissipation von c bestimmt.

Laminare Vormischflammen mit vorgegebenen Werten der Dissipationsgeschwindigkeit lassen sich bei einer Gegenstromanordnung experimentell (Law 1989) und numerisch (Stahl und Warnatz 1991) erhalten.

Die Rechtfertigung der Anwendung des Flamelet-Modells in vorgemischter turbulenter Verbrennung bei motorischen Bedingungen ergibt sich z. B. aus Laser-Lichtschnitt-Experimenten. Ein Beispiel ist in Abb. 10.50 dargestellt. In dieser turbulenten Bunsen-Flamme scheint die Flamelet-Annahme gerechtfertigt. Die Abbildung zeigt eine LIF-OH Momentaufnahme einer turbulenten Erdgas-Luft-Freistrahl-Vormischflamme auf einem Brenner in halbtechnischem Maßstab. Wieder lassen sich ganz deutlich die gewinkelten laminaren Flammenstrukturen erkennen. Bei Verwendung des Flamelet-Modells benötigt man ein Modell zur Beschreibung des Transports und der Änderung von c. Aus c ergeben sich mit Hilfe des Flamelet-Modells die Temperatur, die Stoffkonzentrationen und die Dichte, die dann in das Turbulenzmodell eingeht. Zur Koppelung von Flamelet- und Turbulenzmodell gibt es zahlreiche Möglichkeiten, die z. B. in Ashurst (1995); Candel et al. (1994); Pope (1991); Libby und Williams (1994) und Peters (1987a) beschrieben werden.

Turbulente Flammengeschwindigkeit

Den Fortschritt einer turbulenten Vormisch-Flammenfront versucht man (analog zum laminaren Fall) durch eine turbulente Flammengeschwindigkeit v_T zu beschreiben. Im einfachsten Fall stellt man sich die turbulente Flammenfront als eine gewinkelte laminare Flammenfront vor (Damköhler 1940), mit dem Ansatz:

$$\rho_u \cdot v_T \cdot A_T = \rho_u \cdot v_L \cdot A_L\,, \tag{10.76}$$

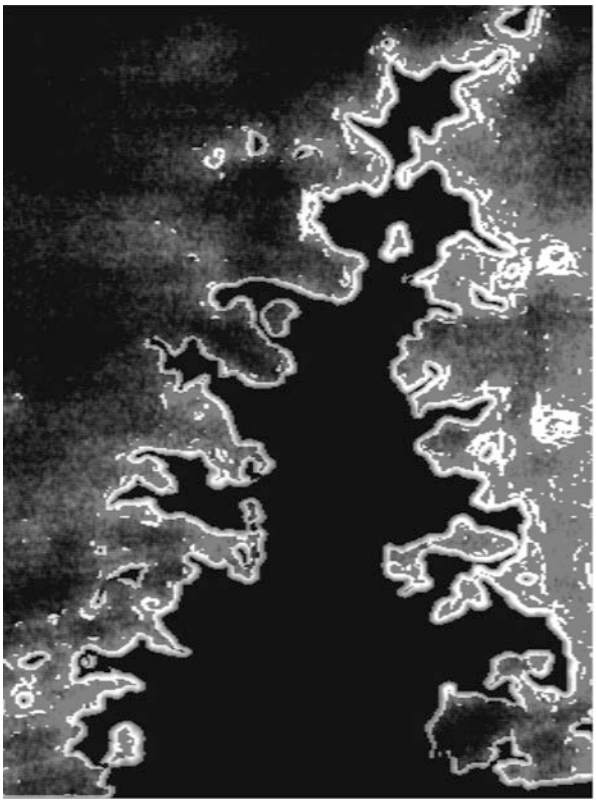


Abb. 10.50 Laser-Lichtschnitt-LIF-Messung der OH-Konzentration in einer turbulenten vorgemischten Erdgas-Luft-Strahlflamme, die auf einer Düse von 3 cm Durchmesser stabilisiert ist (Dinkelacker et al. (1993)), das schwarze Innere zeigt den Bereich der einströmenden Mischung (Äquivalenzverhältnis $\Phi = 0.8$, $Re_l = 857$, $Ka = 0.07$)

wobei A_L die Gesamtfläche der gewinkelten laminaren Flammenfronten, A_T die Fläche der mittleren turbulenten Flammenfront und v_L die laminare Flammengeschwindigkeit bezeichnen (siehe Abb. 10.51). Es ergibt sich dann der grundlegende Zusammenhang:

$$v_T = v_L \cdot \frac{A_L}{A_T} . \tag{10.77}$$

Das Verhältnis von v_T und v_L ist also durch das Flächenverhältnis von laminarer und (mittlerer) turbulenter Flammenfläche gegeben. Damköhler verwendet z. B. den Ansatz $A_L/A_T = 1 + v'/v_L$ wobei v' die turbulente Schwankungsgeschwindigkeit bedeutet (vergleiche Abschn. 3.6). Damit ergibt sich der Ausdruck:

$$v_T = v_L + v' = v_L \cdot \left(1 + \frac{v'}{v_L}\right) . \tag{10.78}$$

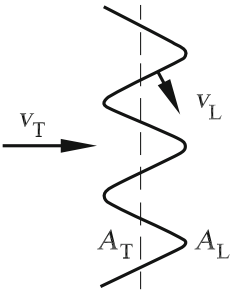


Abb. 10.51 Schematische Darstellung der Fortpflanzung einer turbulenten Flammenfront

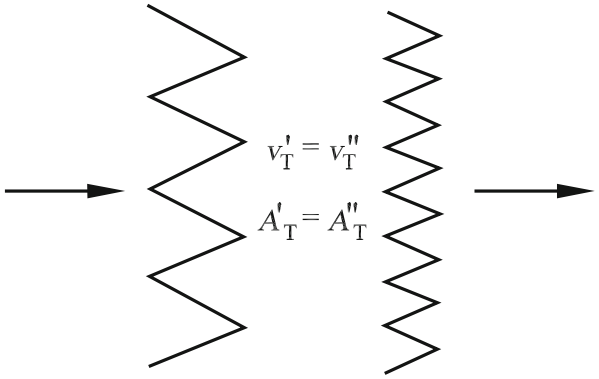


Abb. 10.52 Schematische Darstellung zweier Flammenfronten mit unterschiedlichen Längenskalen, aber gleicher Fläche

Dieses Ergebnis steht in Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen, solange die Turbulenzintensität nicht zu groß ist (Auftreten von Flammenlöschung). Insbesondere beschreibt dieses Modell die Tatsache, dass bei der motorischen Verbrennung die Erhöhung der Umdrehungszahl (v' ist in etwa proportional zur Umdrehungszahl) zur Beschleunigung der Brenngeschwindigkeit führt. Ohne diesen Zusammenhang wäre eine effektive motorische Verbrennung auf niedrige Drehzahlen beschränkt (Heywood 1988).

Ebenfalls in Übereinstimmung mit dem Experiment (Liu und Lenze 1988) ist die Tatsache, dass Gl. (10.76) keine Abhängigkeit vom turbulenten Längenmaß (z. B. vom integralen Längenmaß l_0) zeigt. Dies lässt sich anhand einer einfachen schematischen Darstellung erklären (Abb. 10.52). Obwohl die beiden dargestellten Flammenfronten verschiedene Längenskalen besitzen, sind die Gesamtflächen der laminaren Flammenfronten und damit auch die turbulente Flammengeschwindigkeit gleich.

Probleme treten bei diesem einfachen Modell auf, wenn die Mischung zu fett oder zu mager ist (außerhalb der Brennbarkeitsgrenzen, aus Abb. 10.54 durch Extrapolation zu ermitteln). Dann ist die laminare Flammengeschwindigkeit v_L Null, es liegt also keine Flamme vor, aber das Modell sagt dann fälschlicherweise $v_T = v'$ voraus.

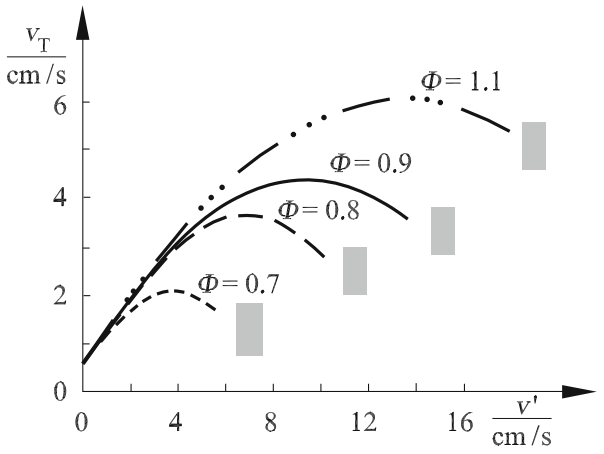


Abb. 10.53 Abhängigkeit der turbulenten Flammengeschwindigkeit von der Turbulenzintensität, Reaktion einer C_3H_8-Luft-Mischung in einer Verbrennungsbombe, grau unterlegt: Verlöschungsbereich

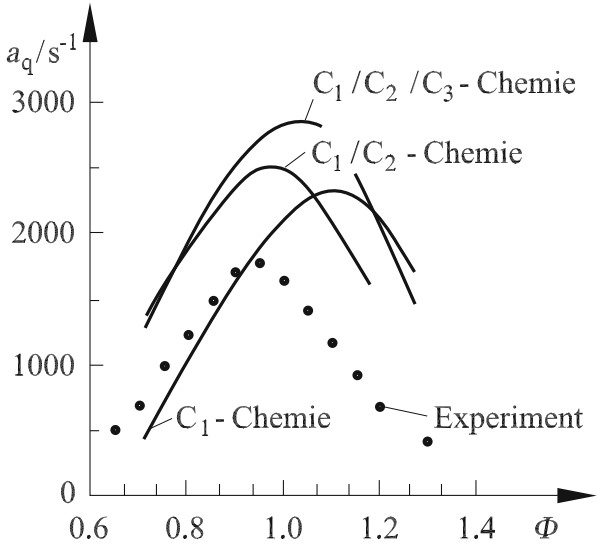


Abb. 10.54 Abhängigkeit der zur Flammenlöschung notwendigen Streckung a_q von der Gemischzusammensetzung für Propan-Luft Flammen

Flammenlöschung

Bei zunehmender Schwankungsgeschwindigkeit v' beobachtet man ein Maximum der turbulenten Flammengeschwindigkeit v_T, bedingt durch lokale Flammenlöschung. Diese wurde z. B. von Abdel-Gayed et al. (1984) und Bradley (1993) in einer Verbrennungsbombe mit C_3H_8-Luft bei intensiver Turbulenzerzeugung durch mehrere starke Ventilatoren gezeigt (Abb. 10.53). Eine Erklärung für dieses

Verhalten erhält man sofort, wenn man auf die Flamelet-Vorstellung zurückgreift (Löschung bei genügend großer Streckung).

Abb. 10.54 zeigt die zur Löschung notwendige Streckung als Funktion des Äquivalenzverhältnisses Φ für ein Paar von gegeneinander brennenden Methan-Luft-Vormischflammen. Es werden verschiedene Reaktionsmechanismen überprüft, um abzusichern, dass die Diskrepanz zwischen Messung und Simulation nicht auf die Chemie zurückzuführen ist. Die Erfahrung zeigt, dass geringe Energieverluste, die im Experiment schwierig zu quantifizieren sind, für die Diskrepanz verantwortlich sein können Stahl und Warnatz (1991).

Diese Messungen und Simulationen bei laminaren Bedingungen zusammen mit einem Flamelet-Modell erlauben eine Erklärung der in turbulenten Vormischflammen beobachtbaren Löscherscheinungen.

Rechnungen zeigen weiterhin, dass die charakteristische Zeit für die Flammenlöschung nur einige Bruchteile von Millisekunden beträgt. Die durch das plötzliche Löschen verursachten Kontraktionen des Gases sind als Quelle der Flammengeräusche (zusammen mit durch die Geometrie bedingten entsprechenden Resonanzbedingungen) anzusehen.

Wie Abb. 10.54 zeigt, löschen magere (wie auch fette) Gemische besonders leicht. Dies ist einer der Gründe, warum man unerwartet starke Kohlenwasserstoff-Emissionen bei Magermotoren beobachtet. Naiverweise würde man meinen, dass der Überschuss an Sauerstoff zu einer vollständigen Verbrennung führt.

3.7 Gasturbinen

Gasturbinenbrenner und -brennkammern – gekennzeichnet durch chemische Reaktionen in turbulenter Strömung – werden zunehmend mittels CFD-Verfahren ausgelegt. Für genaue numerische Vorhersagen ist eine vorausgehende aufwändige Validierung der Rechnungen durch laserdiagnostische Verfahren mit hoher Auflösung ein entscheidendes Erfolgskriterium. Dies soll am Beispiel des FLOX-Brenners für Gasturbinen gezeigt werden.

FLOX steht für *Flameless Oxidation* und bezeichnet ein Brennverfahren mit nahezu flammenloser Verbrennung durch eine örtlich weit verteilte Reaktionszone im Unterschied zu ausgeprägten (dünnen) Flammenfronten. Die FLOX-Verbrennung ist im Allgemeinen charakterisiert durch eine Verbrennung auf niedrigem Temperaturniveau, was zu sehr geringen (thermischen) NO-Emissionen führt.

Abb. 10.55 zeigt einen Validierungsfall für den Brennstoff Methan mit sehr guter Übereinstimmung zwischen Messung und numerischer Simulation. Mittels Planarer Laserinduzierte Fluoreszenz (PLIF) wurde die Konzentration an OH-Radikalen in der Flamme vermessen. Zu sehen sind links ausgewählte Einzelschuss OH-PLIF Aufnahmen, gemessen in verschiedenen Höhen über der Brennerdüse und zusammengesetzt zu einer Gesamtansicht. PLIF wird hier verwendet, um instantane Flammenstrukturen zu visualisieren (turbulenter Transport, Mischungs- und Verbrennungsprozesse in der Flamme). In den dunklen Zonen ist das Gas relativ kalt, in den Regionen mit OH-Signal herrschen Temperaturen über 1400 K.

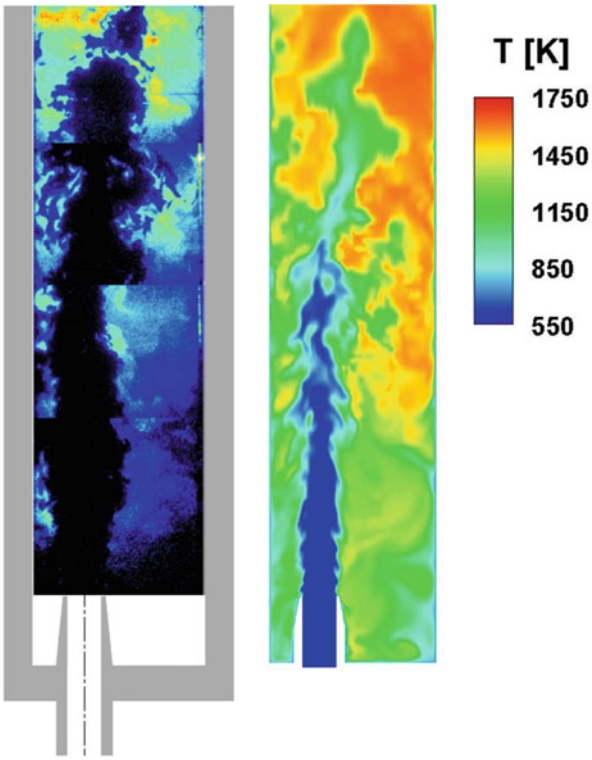


Abb. 10.55 FLOX-typische Modellflamme. Links: Instantane mittels OH-PLIV gemessene Flamenstrukturen (Lammel et al. 2012), rechts: Simulation mit detailliertem chemischen Verbrennungsmodell (hybrides LES/RANS Modell, Di Domenico et al. 2011)

Der rechte Teil von Abb. 10.55 zeigt eine Momentaufnahme der Simulation der Temperaturverteilung, die sich bei der Verbrennung eines vorgemischten Luft-Methan-Strahls einstellt, wenn der Strahl mit hoher Geschwindigkeit in die Brennkammer eintritt (turbulente Strömung). Die Verbrennung wurde hierbei durch ein Modell berücksichtigt, das. Reaktionsmechanismen direkt in die Simulationsrechnung einfügt. Es ist zu sehen, dass sich bei dieser Art der Verbrennung die Flamme erst weit nach der Eindüsung von Luft und Brennstoff einstellt. Derartig weit abgehobene Flammen sind typisch für die schadstoffarm verlaufende FLOX-Verbrennung. Die Abb. 10.56 zeigt das Ergebnis einer LES-Simulation für einen FLOX-Brenner in einer Gasturbinenanwendung, berechnet mit einem detaillierten Reaktionsmodell.

Das der Simulation zu Grunde liegende Rechengebiet besteht aus ca. 1,2 Mio unstrukturiert angeordneten Hexaeder-Zellen und umfasst einen kompletten Brenner sowie ein sich daran anschließendes 30° Brennkammersegment, auf dessen Schnittflächen periodische Randbedingungen formuliert sind. Zum Einsatz gelangt ein LES-Code der eine beliebige Anzahl an Spezies und chemischen Reaktionsgleichungen erlaubt. Für die Simulation des mit Erdgas betriebenen Brenners wird der GRI3.0-Mechanismus mit 53 Spezies und 325 Elementarreaktionen verwendet.

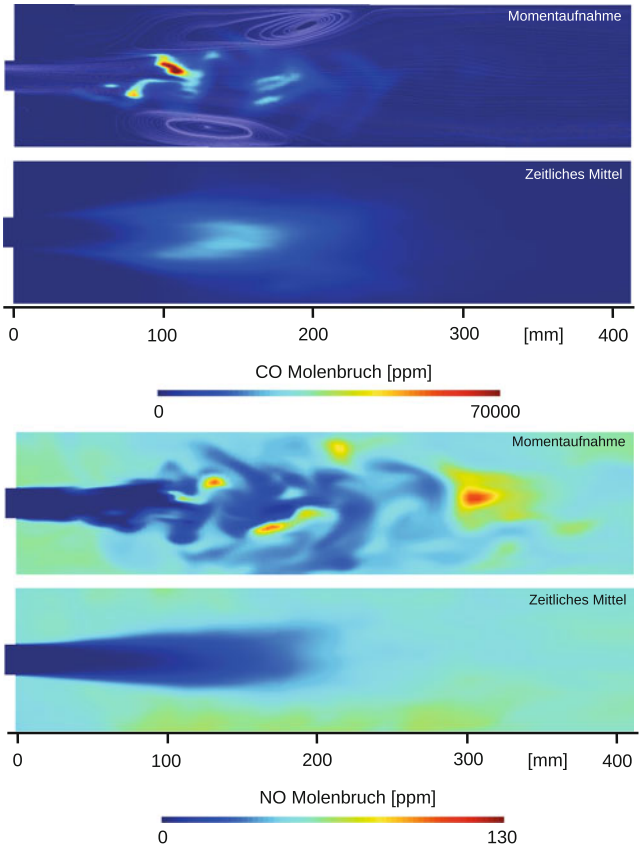


Abb. 10.56 LES-Simulation einer FLOX-Brennkammer: Momentaufnahme und zeitgemittelte CO- und NO-Konzentrationen (Schütz et al. 2008)

Die Verbrennung in einer Gasturbinenbrennkammer verläuft im Allgemeinen auf einem hohen Druck- und thermischen Leistungsdichteniveau. Konventionell kommen dabei Drallbrenner zum Einsatz. Demgegenüber wird bei FLOX-Brennern für Gasturbinen ein global überstoichiometrisches Brennstoff/Luftgemisch axial und unverdrallt mit sehr hoher Geschwindigkeit in eine typischerweise zylindrische Brennkammer eingedüst. Der Brennstoff ist dabei von der Verbrennungsluft komplett eingehüllt. Auf Grund der hohen Geschwindigkeiten und einhergehender chemischer Nichtgleichgewichtseffekte wird das Brennstoff/Luftgemisch weit in den Brennraum eingetragen, bevor es zum chemischen Umsatz kommt. Dadurch kann vor Einsetzen der Verbrennung die Mischung im Brennraum weitestgehend homogenisiert werden, wobei idealerweise die lokale Luftzahl den Wert der globalen Luftzahl annähert. Die Folge sind lokal niedrige Temperaturen und damit geringe NO-Produktionsraten.

In Abb. 10.56 ist auf einem Längsschnitt durch die betrachtete FLOX-Brennkammer die Verteilung der beiden Schadstoffe CO und NO dargestellt. Die Bildebene wird durch die Mischrohrachse eines der zwölf Brenner sowie durch die dazu parallel verlaufende Achse der zylindrischen Brennkammer aufgespannt. Der Brenner selbst ist nicht dargestellt. Die Verteilung der zeitgemittelten CO-Konzentration zeigt das typische Aussehen einer abgehobenen Flamme mit einer räumlich weit ausgedehnten Verbrennungszone. Diese ist, ebenso wie die zeitgemittelte NO-Konzentration, durchaus vergleichbar mit dem Ergebnis einer URANS-Simulation, in der die Zeitmittelung bereits in den zu Grunde liegenden Gleichungen steckt. Der Blick auf eine beliebige Momentaufnahme der zeitaufgelösten LES-Simulation zeigt aber, dass in der Reaktionszone lokale Bereiche mit Spitzenwerten für CO und NO entstehen können, die die entsprechenden Maximalwerte der Zeitmittelung um das 3-4-fache übersteigen.

Daraus kann man schließen, dass an diesen Stellen die Verbrennung deutlich näherstöchiometrisch verläuft, als wir das im idealen Fall bei vollständiger Mischung aus der globalen Luftzahl erwarten können. Die Mischung ist zwar nicht komplett bis in die kleinsten Skalen, jedoch zeigen die relativ homogenen Verläufe der Mittelwerte, dass die lokalen Bereiche in ihrer räumlichen und zeitlichen Ausdehnung klein und über einen großen räumlichen Bereich gestreut sind. Die Frage niedriger Stickoxidemissionen in der Verbrennung ist also maßgeblich durch die Frage bestimmt, bis zu welchen räumlichen und zeitlichen Skalen es gelingt, eine möglichst homogene Mischung von Brennstoff und Luft vor Einsetzen der chemischen Reaktionen zu bewirken.

Weiterführende Literatur

Abdel-Gayed, R.G., Bradley, D., Hamid, N.M., Lawes, M.: Lewis number effects on turbulent burning velocity. Proc. Combust. Inst. **20**, 505 (1984)

Arrhenius, S.A.: Über die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Inversion von Rohrzucker in Säuren. Z. Phys. Chem. **4**, 226–248 (1889)

Ashurst, W.T.: Modelling turbulent flame propagation. Proc. Combust. Inst. **25**, 1075 (1995)

Atkins, P.W.: Physikalische Chemie. Wiley-VCH, Weinheim (2013)

Bilger, R.W.: Turbulent Flows with nonpremixed reactants. In: Libby, P.A., Williams, F.A. (Hrsg.) Turbulent Reactive Flows. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1980)

Bockhorn, H., Chevalier, C., Warnatz, J., Weyrauch, V.: Bildung von promptem NO in Kohlenwasserstoff-Luft-Flammen. 6. TECFLAM-Seminar. DLR, Stuttgart (1990)

Borghi, R. (Hrsg.): Recent Advances in Aeronautical Science. Pergamon, London (1984)

Bradley, D.: How fast can we burn. Proc. Combust. Inst. **24**, 247 (1993)

Bray, K.N.C.: Turbulent flows with premixed reactants. In: Libby, P.A., Williams, F.A. (Hrsg.) Turbulent Reacting Flows. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1980)

Candel, S., Veynante, D., Lacas, F., Darabiha, N.: Current progress and future trends in turbulent combustion. Combust. Sci. Technol. **98**, 245 (1994)

Dahm, W.J.A., Bish, E.S.: High resolution measurements of molecular transport and reaction processes in turbulent combustion. In: Takeno, T. (Hrsg.) Turbulence and Molecular Processes in Combustion. Elsevier, New York (1993)

Dahm, W.J.A., Tryggvason, G., Zhuang, M.: Integral method solution of time-dependent strained diffusion-reaction layers with multi-step kinetics. SIAM J. Appl. Math. **56**(4), 1039 (1996)
Damköhler, G.: Der Einfluss der Turbulenz auf die Flammengeschwindigkeit in Gasgemischen. Z. Elektrochem, **46**, 601–652 (1940)
Dibble, R.W., Masri, A.R., Bilger, R.W.: The spontaneous Raman scattering technique applied to non-premixed flames of methane. Combust. Flame **67**, 189 (1987)
Di Domenico, M., Beck, C.H., Lammel, O., Krebs, W., Noll, B.E.: Experimental and numerical investigation of turbulent, lean, high-strained, confined, jet flames. In: AIAA 2011–238, 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting, 2011, Orlando (2011)
Dinkelacker, F., Buschmann, A., Schäfer, M., Wolfrum, J.: Spatially resolved joint measurements of OH- and temperature fields in a large premixed turbulent flame. In: Proceedings of the Joint Meeting of the British and German Sections of the Combustion Institute, S. 295, Cambridge (1993)
Dopazo, C., O'Brian, E.E.: An approach to the description of a turbulent mixture. Acta Astron. **1**, 1239 (1974)
Dreier, T., Lange, B., Wolfrum, J., Zahn, M., Behrendt, F., Warnatz, J.: CARS measurements and computations of the structure of laminar stagnation-point Methane-air counterflow diffusion flames. Proc. Combust. Inst. **21**, 1729 (1987)
Gutheil, E., Bockhorn, H.: The effect of multi-dimensional PDFs in turbulent reactive flows at moderate Damköhler number. Physicochem. Hydrodyn. **9**, 525 (1987)
Heywood, J.B.: Internal Combustion Engine Fundamentals. McGraw-Hill, New York (1988)
Homann, K.H.: Reaktionskinetik. Steinkopff, Darmstadt (1975)
Homann, K.H., Solomon, W.C., Warnatz, J., Wagner, H.G., Zetzsch, C.: Eine Methode zur Erzeugung von Fluoratomen in inerter Atmosphäre. Berichte der Bunsengesellschaft für Physikalische Chemie **74**, 585 (1970)
Lammel, O., Stöhr, M., Kutne, P., Dem, C., Meier, W., Aigner, M.: Experimental analysis of confined jet flames by laser measurement techniques. J. Eng. Gas Turbines Power **134**, 041506 (2012)
Law, C.K.: Dynamics of streched flames. Proc. Combust. Inst. **22**, 1381 (1989)
Libby, P.A., Williams, F.A.: Turbulent flows involving chemical reactions. Annu. Rev. Fluid Mech. **8**, 351–376 (1976)
Libby, P.A., Williams, F.A.: Fundamental aspects of turbulent reacting flows. In: Libby, P.A., Williams, F.A. (Hrsg.) Turbulent Reacting Flows. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1980)
Libby, P.A., Williams, F.A.: Turbulent Reacting Flows. Academic, New York (1994)
Liu, Y., Lenze, B.: The influence of turbulence on the burning velocity of premixed CH_4-H_2 flames with different laminar burning velocities. Proc. Combust. Inst. **22**, 747 (1988)
Magre, P., Dibble, R.W.: Finite chemical kinetic effects in a subsonic turbulent hydrogen flame. Combust. Flame **73**, 195 (1988)
McMurtry, P.A., Menon, S., Kerstein, A.R.: A linear Eddy sub-grid model for turbulent reacting flows: application to hydrogen-air combustion. Proc. Combust. Inst. **24**, 271 (1992)
Metka, U., Schweitzer, M.G., Volpp, H.-R., Wolfrum, J., Warnatz, J.: In-situ detection of NO chemisorbed on platinum using infrared-visible sum-frequency generation SFG. Zeitschr. f. Phys. Chem. **214**, 865–888 (2000)
Nowak, U., Warnatz, J.: Sensitivity Analysis in Aliphatic Hydrocarbon Combustion. A. L. Kuhl, J. R. Bowen, J.-C. Leyer, A. Borisov, eds., Dynamics of reactive systems. American Institute of Aeronautics and Astronautics, New York (1988)
Orlandini, I., Riedel, U.: Chemical kinetics of NO-removal by pulsed corona discharges. J. Phys. D (Appl. Phys.) **33**, 2467–2474 (2000)
Peters, N.: Laminar flamelet concepts in turbulent combustion. Proc. Combust. Inst. **21**, 1231 (1987a)
Peters, N.: Laminar flamelet concepts in turbulent combustion. Proc. Combust. Inst. **21**, 1231 (1987b)
Peters, N.: Turbulent Combustion. Cambridge University Press, Cambridge (2000)

Peters, N., Warnatz, J.: Numerical Methods in Laminar Flame Propagation. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden (1982)
Poinsot, T., Veynante, D., Candel, S.: Diagrams of premixed turbulent combustion based on direct numerical simulation. Proc. Combust. Inst. **23**, 613 (1991)
Pope, S.B.: Computations of turbulent combustion: progress and challenges. Proc. Combust. Inst. **23**, 591 (1991)
Reynolds, W.C.: The potential and limitations of direct and large Eddy simulation. In: Whither Turbulence. Turbulence at Crossroads, Bd. 313. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1989)
Rhodes, R.P. (Hrsg.): Turbulent mixing in non-reactive and reactive flows. Plenum Press, New York (1979)
Robinson, P.J., Holbrook, K.A.: Unimolecular Reactions. Wiley-Interscience, New York (1972)
Rogg, B., Behrendt, F., Warnatz, J.: Turbulent non-premixed cumbustion in partially premixed diffusion flamelets with detailed chemistry. Proc. Combust. Inst. **21**, 1533 (1987)
Rummel, K.: Der Einfluß des Mischungsvorganges auf die Verbrennung von Gas und Luft in Feuerungen. Stahleisen, Düsseldorf (1937)
Schütz, H., Lückerath, R., Kretschmer, T., Noll, B., Aigner, M.: Analysis of the Pollutant formation in the FLOX combustion. J. Eng. Gas Turbines Power **130**, 011503 (2008)
Sick, V., Arnold, A., Diessel, E., Dreier, T., Ketterle, W., Lange, B., Wolfrum, J., Thiele, K.U., Behrendt, F., Warnatz, J.: Two-dimensional laser diagnostics and modelling of counterflow diffusion flames. Proc. Combust. Inst. **23**, 495 (1991)
Smooke, M.D., Mitchell, R.E., Keyes, D.E.: Numerical solution of two-dimensional axisymmetric laminar diffusion flames. Combust. Sci. Technol. **67**, 85 (1989)
Spalding, D.B.: Mixing and chemical reaction in steady confined turbulent flames. Proc. Combust. Inst. **13**, 649 (1970)
Stahl, G., Warnatz, J.: Numerical investigation of strained premixed CH_4-air flames up to high pressures. Combust. Flame **85**, 285 (1991)
Tsuji, H., Yamaoka, I.:. The counterflow diffusion flame in the forward stagnation region of a porous cylinder. Proc. Combust. Inst. **11**, 979 (1967)
Warnatz, J.: The structure of laminar Alkane-, Alkene-, and acetylene flames. Proc. Combust. Inst. **18**, 369 (1981)
Warnatz, J.: Resolution of gas phase and surface chemistry into elementary reactions. Proc. Combust. Inst. **24**, 553 (1993)
Warnatz, J., Maas, U., Dibble, R.W.: Verbrennung. Springer, Berlin/Heidelberg (2006)
Westbrook, C.K., Dryer, F.L.: Chemical kinetics and modelling of combustion processes. Proc. Combust. Inst. **18**, 749 (1981)
Williams, F.A.: Combustion Theory. The Benjamin Cummings Publishing Company, Menlo Park/Reading/Don Mills (1985)
Zeldovich, Y.B., Frank-Kamenetskii, D.A.: The theory of thermal propagation of flames. Zh. Fiz. Khim. **12**, 100 (1938)

Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean

11

Dieter Etling

Zusammenfassung

Das Kapitel *Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean* ist Teil des Lehrbuches und Nachschlagewerkes *H. Oertel jr. (Hrsg.) Prandtl-Führer durch die Strömungslehre*. Hierbei werden zunächst die Gemeinsamkeiten von Strömungsvorgängen in Atmosphäre und Ozean dargestellt. Anschließend werden spezielle Strömungsformen in der Atmosphäre wie thermische Windsysteme und atmosphärische Wirbelformen beschrieben. Als Auswahl ozeanischer Strömungsformen werden windgetriebene Meeresströmungen und Wasserwellen behandelt. Hinsichtlich praktischer Anwendungen der Gesetzmäßigkeiten von Strömungsvorgängen in der Atmosphäre und im Ozean finden sich Ausführungen zur Wetter- und Klimavorhersage sowie zum Problem des Ozonlochs

1 Grundlagen der Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean

1.1 Einführung

Die Strömungen in der Erdatmosphäre (Luftströmungen) und in den Ozeanen (Meeresströmungen) unterscheiden sich prinzipiell nicht von den in den bisherigen Kapiteln behandelten Strömungen in technischen Bereichen. Es handelt sich um Bewegungen in Gasen (Atmosphäre) und Flüssigkeiten (Ozean), die dem Einfluss der Schwerkraft unterliegen und die durch Druck- und Reibungskräfte bestimmt werden. Atmosphäre und Ozean sind Teil des rotierenden Systems der Erde, in dem zusätzlich *Coriolis*- und *Zentrifugalkräfte* wirken.

D. Etling (✉)
Institut für Meteorologie und Klimatologie, Leibniz Universität Hannover, Hannover, Deutschland
E-Mail: etling@muk.uni-hannover.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5_11

Die gemeinsame Behandlung der Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean erscheint vor diesem Hintergrund durchaus sinnvoll. In der Tat hat sich im angelsächsischen Sprachraum dafür der Begriff *Geophysical Fluid Dynamics* etabliert. Hier wird auf die Lehrbücher von Cushman-Roisin und Beckers (2011); Pedlosky (1994) und Vallis (2006) verwiesen. Auch *Ludwig Prandtl* hat sich in seinem Führer durch die Strömungslehre an verschiedenen Stellen mit Strömungen in Atmosphäre und Ozean befasst.

Im folgenden Kapitel werden die wesentlichen Elemente der geophysikalischen Strömungsvorgänge in Atmosphäre und Ozean aufgezeigt. Dies kann naturgemäß nur in Auszügen erfolgen und ersetzt keineswegs die umfangreiche Spezialliteratur aus den Gebieten der Meteorologie und Ozeanographie.

1.2 Grundgleichungen im rotierenden System

Die in Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik aufgestellten Grundgleichungen für Flüssigkeiten und Gase gelten auch für die Fluide in Ozean und Atmosphäre. In den entsprechenden Gleichungen sind lediglich stoffspezifische Eigenschaften wie Dichte, Wärmeleitfähigkeit oder Viskosität für das betrachtete Medium anzusetzen. Es muss berücksichtigt werden, dass die Erde und mit ihr Atmosphäre und Ozean um die Erdachse rotieren. Da es zweckmäßig ist, die Bewegungsvorgänge in einem erdfesten Koordinatensystem zu beschreiben, wird man die Grundgleichungen im rotierenden System formulieren. Die in Abschn. 2 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik abgeleiteten Navier-Stokes-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. 18) und Reynolds-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. 33–37) sind für ein beschleunigungsfreies Inertialsystem gültig. In der Meteorologie und Ozeanographie hat es sich deshalb eingebürgert, die Grundgleichungen auf das rotierende Koordinatensystem der Erde zu beziehen.

Die dabei notwendigen Koordinatentransformationen sind ausführlich in Lehrbüchern beschrieben (siehe z. B. Etling (2008); Pedlosky (1994)). Im Folgenden wird eine kurze Herleitung gegeben. In Abb. 11.1 ist ein rotierendes Koordinatensystem dargestellt. Hier ist $\boldsymbol{\Omega}$ der Vektor der Erdrotation und $\boldsymbol{r}$ der Abstand des betrachteten Massenpunktes von der Rotationsachse. Der Betrag des Rotationsvektors ist definiert als Kreisfrequenz der Erdrotation $\Omega = 2 \cdot \pi / T$, mit der Umdrehungsdauer $T = 24\,\mathrm{h}$. Damit ergibt sich $\Omega = 2 \cdot \pi / 24\,\mathrm{h} = 0.727 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$.

Ein fester Punkt auf der Erdoberfläche, dessen Position durch den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ gegeben ist, hat gegenüber dem Inertialsystem (im Folgenden mit dem Index i bezeichnet) die Geschwindigkeit

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{f}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}\,. \tag{11.1}$$

Diese Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}$ steht senkrecht auf dem Vektor der Erdrotation und dem Radiusvektor und ist nach Osten gerichtet.

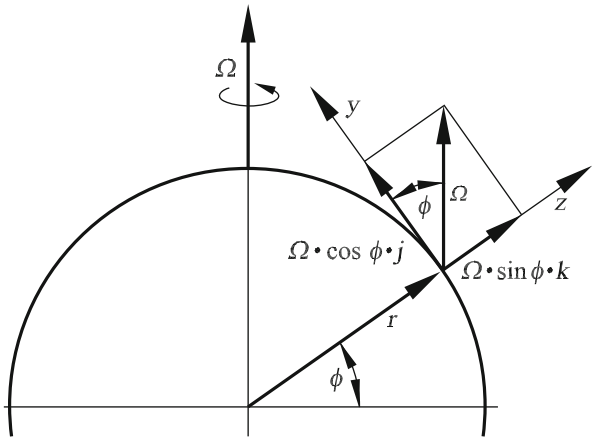


Abb. 11.1 Komponenten der Erdrotation $\boldsymbol{\Omega}$ in einer Tangentialebene (die x-Koordinate und der Einheitsvektor $\boldsymbol{i}$ weisen in die Abbildung)

Hat nun ein Luftpartikel relativ zur Erdoberfläche die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\mathrm{e}$ (Index e für ein mit der rotierenden Erde verbundenes Koordinatensystem), so hat dieses im Inertialsystem die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$:

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{i} = \boldsymbol{v}_\mathrm{e} + \boldsymbol{v}_\mathrm{f} = \boldsymbol{v}_\mathrm{e} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{11.2}$$

Zwischen der zeitlichen Änderung des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}_\mathrm{e}$ in Inertial- und mitrotierendem System besteht folgende Beziehung:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathrm{i} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathrm{e} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_\mathrm{e}. \tag{11.3}$$

Für den Zusammenhang zwischen den Beschleunigungen im Inertialsystem und im erdfesten System erhält man mit Gl. (11.1)–(11.3):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathrm{i} &= \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathrm{i}} + \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})\right)_\mathrm{i}} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathrm{e} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_\mathrm{e} + \boldsymbol{\Omega} \times \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathrm{e}}_{\boldsymbol{v}_\mathrm{e}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

Unter Fortlassen des Index e für das mit der Erde rotierende Koordinatensystem lautet somit die Beziehung zwischen den jeweiligen Beschleunigungen:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathrm{i} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + 2 \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{11.4}$$

Die zusätzlich auftretenden Terme werden als Coriolis-Beschleunigung $-(2\cdot\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v})$ und Zentrifugalbeschleunigung $-(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})$ bezeichnet.

Insgesamt lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. 20) der inkompressiblen Strömung für ein mit der Erde mitrotierendes Koordinatensystem wie folgt schreiben:

$$\rho\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+2\cdot\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}\right)=\boldsymbol{f}-\nabla p+\mu\cdot\Delta\boldsymbol{v}. \quad (11.5)$$

Für viele Probleme in Meteorologie und Ozeanographie ist die Beschreibung der Bewegungen in Kugelkoordinaten, wie es für die Erde angepasst ist, nicht notwendig. Man legt vielmehr ein kartesisches Koordinatensystem so an die Erdoberfläche, dass seine horizontalen Koordinaten (x und y mit den Einheitsvektoren $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{j}$) eine *Tangentialebene* in einer bestimmten geographischen Breite ϕ bilden. Die vertikale Koordinate z (mit dem Einheitsvektor $\boldsymbol{k}$) steht dann senkrecht auf dieser Ebene, wie in Abb. 11.1 dargestellt. Der Rotationsvektor $\boldsymbol{\Omega}$ lässt sich in diesem Koordinatensystem aufspalten in

$$\boldsymbol{\Omega}=\Omega\cdot\cos(\phi)\cdot\boldsymbol{j}+2\cdot\Omega\cdot\sin(\phi)\cdot\boldsymbol{k}=f^*\cdot\boldsymbol{j}+f\cdot\boldsymbol{k},$$

wobei $f^*=\Omega\cdot\cos(\phi)$ und $f=2\cdot\Omega\cdot\sin(\phi)$ als *Coriolis-Parameter* bezeichnet werden.

In Atmosphäre und Ozean wirkt als konservative Kraft $\boldsymbol{f}$ in Gl. (11.5) die Schwerkraft pro Volumen mit der Erdbeschleunigung $g=9.81\,\mathrm{m/s^2}$:

$$\boldsymbol{f}=-\rho\cdot g\cdot\boldsymbol{k}=-\rho\cdot\nabla\Phi.$$

Diese kann auch durch den Gradienten des Schwerepotentials Φ ($\Phi=g\cdot z$) dargestellt werden. Die Schwerkraft wirkt zum Erdmittelpunkt und somit ihre Komponente $g\cdot\cos(\phi)$ in Richtung der Rotationsachse. Die Zentrifugalkraft $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ wirkt von der Rotationsachse nach außen und ist somit der Schwerkraft entgegengesetzt. Wegen des geringen Betrages der Zentrifugalbeschleunigung ($\Omega^2\cdot r\approx 3\cdot10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}$) wird diese in der Meteorologie und Ozeanographie gegenüber der Schwerkraft vernachlässigt.

Mit den oben genannten Vereinfachungen lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. 20) für eine Tangentialebene schreiben:

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+f\cdot\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\cdot\nabla p-\nabla\Phi+\nu\cdot\Delta\boldsymbol{v}, \quad (11.6)$$

wobei $\nu=\mu/\rho$ die kinematische Zähigkeit ist.

Die im rotierenden Koordinatensystem hinzugekommene Coriolis-Kraft müsste eigentlich in allen Grundgleichungen der Strömungsmechanik vorkommen, da sich alle Strömungsvorgänge, auch die in der Technik, auf der rotierenden Erde abspielen.

Als Maß für das relative Gewicht der Coriolis-Kraft hat sich die *Rossby-Zahl* etabliert, welche das Verhältnis von Trägheitskraft $\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}$ und Coriolis-Kraft $f\cdot\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}$ darstellt. Für einen Strömungsvorgang mit einer typischen Abmessung L und einer typischen Geschwindigkeit U lassen sich die Größenordnungen abschätzen:

$$\text{Trägheitskraft} \sim \frac{U^2}{L},$$
$$\text{Coriolis} - \text{Kraft} \sim f \cdot U.$$

Somit ergibt sich für die Rossby-Zahl:

$$Ro = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Coriolis} - \text{Kraft}} = \frac{U}{f \cdot L}. \tag{11.7}$$

Eine große Rossby-Zahl ($Ro \gg 1$) bedeutet, dass in den Bewegungsgleichungen Gl. (11.6) die Coriolis-Kraft gegen die Trägheitskraft vernachlässigt werden kann. Im umgekehrten Fall ($Ro \ll 1$) spielt die Coriolis-Kraft eine dominierende Rolle und darf nicht vernachlässigt werden.

Folgende Beispiele sollen dies verdeutlichen. Hierbei ist für den Coriolis-Parameter der Wert $f = 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$ eingesetzt, der für etwa 45° geographischer Breite gilt:

Strömung	Dimension	Geschwindigkeit	Ro
Zyklone	10^3 km	10 m/s	0.1
Land-See Wind	50 km	5 m/s	1
Staubteufel	50 m	5 m/s	10^3
Badewannenwirbel	50 cm	5 cm/s	10^3

Man erkennt an dieser Tabelle, dass für kleinräumige atmosphärische und technische Strömungen die Coriolis-Kraft keine Rolle spielt. Bei großräumigen Vorgängen (Zyklone) muss sie aber berücksichtigt werden. Dies wird auch in den folgenden Kapiteln deutlich, in denen einige atmosphärische und ozeanische Strömungsvorgänge beschrieben werden.

Gleichung (11.6) stellt die Grundlage für die formale Beschreibung der Bewegungsvorgänge in Atmosphäre und Ozean dar. Hinzu kommen noch die Kontinuitätsgleichung und die Energiegleichung, welche bereits in den Abschn. 1 und 2 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik behandelt wurden. Eine Zusammenstellung der genannten Gleichungen findet man in Abschn. 4.1.

In Ergänzung wird auf den in der Meteorologie häufig verwendeten Begriff der potentiellen Temperatur eingegangen. Dieser ergibt sich aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik für einen adiabaten Prozess. In diesem Fall sind Druck p und Temperatur T verknüpft über:

$$\frac{T(p_0)}{T(p)} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}. \tag{11.8}$$

Hierbei ist p_0 ein Referenzdruck, der üblicherweise mit $p_0 = 1000\,\mathrm{hPa}$ angesetzt wird. Die *potentielle Temperatur* θ ist diejenige Temperatur $T(p_0)$ die ein Luftpaket mit der Temperatur T und dem Luftdruck p annimmt, wenn man es in einem adiabaten Prozess auf den Referenzdruck p_0 führt:

$$\theta = T \cdot \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}. \tag{11.9}$$

Hierbei ist $R = 287\,\mathrm{J/kg/K}$ die Gaskonstante für trockene Luft und $c_p = 1005\,\mathrm{J/kg/K}$ die spezifische Wärme bei konstantem Druck. Die potentielle Temperatur ist für adiabate Prozesse eine Erhaltungsgröße, d. h. es gilt $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$, weshalb sie bei der Beschreibung atmosphärischer Prozesse verwendet wird.

1.3 Geostrophische Strömung

In diesem Kapitel wird die Wirkung der Coriolis-Kraft auf Strömungen in Atmosphäre und Ozean betrachtet. Dazu setzt man eine reibungsfreie horizontale Strömung (Index h) voraus. Somit erhält man aus Gl. (11.6):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{h}}{\mathrm{d}t} + f \cdot \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}_\mathrm{h} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla_\mathrm{h} p. \tag{11.10}$$

Ein Fluidpartikel kann in der Horizontalen durch Coriolis-Kraft und Druckkraft beschleunigt werden. Wenn eine Strömung aber beschleunigungsfrei ist, d. h. $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{h}/\mathrm{d}t = 0$, so ergibt sich im Gleichgewicht:

$$f \cdot \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}_\mathrm{h} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla_\mathrm{h} p.$$

Nach Umformung ergibt sich für die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\mathrm{h}$:

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{h} = \frac{1}{\rho \cdot f} \cdot \boldsymbol{k} \times \nabla_\mathrm{h} p. \tag{11.11}$$

Diese bezeichnet man als *geostrophische* Geschwindigkeit (in der Atmosphäre geostrophischer Wind) und kennzeichnet sie mit dem Index $g(\boldsymbol{v}_\mathrm{g})$. Wie man aus Gl. (11.11) erkennt, ist die Strömungsrichtung parallel zu den Linien gleichen

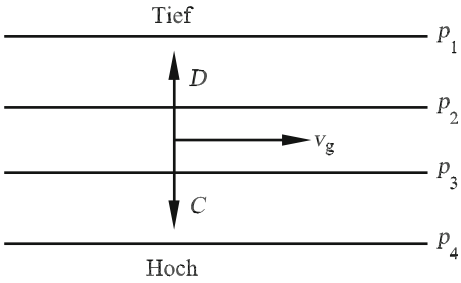


Abb. 11.2 Beziehung zwischen Druckfeld p, Druckkraft $\boldsymbol{D}$, Coriolis-Kraft $\boldsymbol{C}$ und geostrophischer Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_g$

Drucks (Isobaren) oder senkrecht zum Druckgradienten. Dies ist in Abb. 11.2 dargestellt. Die zunächst erstaunliche Tatsache, dass eine Strömung senkrecht zur wirkenden (Druck-)Kraft erfolgt, liegt darin begründet, dass in einem rotierenden Koordinatensystem mit der Coriolis-Kraft eine kompensierende Kraft auftritt, die zu einem Gleichgewicht (so genanntes geostrophisches Gleichgewicht) führen kann. Den Ausführungen in Abschn. 1.2 entsprechend ist dies möglich, wenn für die Rossby-Zahl gilt $Ro \to 0$. Es muss sich wegen $Ro = U/(f \cdot L)$ um einen sehr großräumigen Strömungsvorgang handeln. In der Tat wird eine annähernd geostrophische Strömung z. B. in atmosphärischen Hoch- und Tiefdruckgebieten beobachtet. Hier weht der Wind annähernd parallel zu den Isobaren und zwar im Tiefdruckgebiet im Gegenuhrzeigersinn (Abb. 11.16), um ein Hoch im Uhrzeigersinn herum , wie jeder Leser beim Blick auf eine Wetterkarte auf der Nordhalbkugel nachprüfen kann. Auf der Südhalbkugel wird der Coriolis-Parameter $f = 2 \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \sin(\phi)$ negativ. Aus diesem Grund weht dort der Wind im Uhrzeigersinn um ein Tief herum. Der tiefe Luftdruck liegt damit rechts zur Windrichtung.

Das geostrophische Strömungsgesetz Gl. (11.11) gilt für alle Höhenschichten der Atmosphäre, bzw. Tiefenschichten des Ozeans. Beobachtungen haben gezeigt, dass sich in der Atmosphäre der geostrophische Wind mit der Höhe ändert (man findet typischerweise eine Zunahme der Windgeschwindigkeit mit der Höhe, siehe auch Abb. 11.21 in Abschn. 2.5). Die Ableitung des Windgesetzes Gl. (11.11) nach der Vertikalkoordinate z führt unter Verwendung der Zustandsgleichung für Gase und der statischen Grundgleichung (siehe Abschn. 2.4 und 2.5) zu folgender Beziehung:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_g}{\partial z} = \frac{g}{f \cdot T} \cdot \boldsymbol{k} \times \nabla T. \tag{11.12}$$

In Gl. (11.12) ist g die Erdbeschleunigung, f der Coriolis-Parameter und T die Lufttemperatur. Diese Gleichung wird auch *thermische Windbeziehung* genannt, da die Höhenänderung des geostrophischen Windes vom horizontalen Temperaturgradienten abhängt. Als *thermischer Wind* $\boldsymbol{v}_T$ bezeichnet man das Integral von Gl. (11.12):

$$\boldsymbol{v}_T = \boldsymbol{v}_g(z_2) - \boldsymbol{v}_g(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{g}{f \cdot T} \cdot \boldsymbol{k} \times \nabla T \right) \cdot dz.$$

Der thermische Wind $\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}$ lässt sich daraus bei Kenntnis des Temperaturfeldes $T(x, y, z)$ berechnen. Meist nimmt man zur Vereinfachung eine höhenkonstante Temperatur zwischen zwei Höhenniveaus z_1 und z_2 an, so dass sich als Beziehung für den thermischen Wind ergibt:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}} = \frac{g}{f \cdot T} \cdot \boldsymbol{k} \times \nabla T \cdot (z_2 - z_1). \tag{11.13}$$

Diese thermische Windbeziehung ist für die globale atmosphärische Zirkulation (siehe Abschn. 2.5) sehr wichtig. Sie erklärt unter anderem, dass in den höheren Atmosphärenschichten wegen des Temperaturgegensatzes zwischen äquatornahen und polaren Gebieten praktisch immer westliche Winde herrschen.

Andererseits ergibt sich der thermische Wind aus dem Gleichgewicht zwischen der horizontalen Druckkraft und der Coriolis-Kraft. Ein Gleichgewicht kann sowohl stabil als auch instabil sein, wie z. B. anhand von Konvektion und Schwerewellen in Abschn. 2.3 und 2.4 erläutert wird. Im Falle des thermischen Windes können unter gewissen Voraussetzungen (z. B. großer horizontaler Temperaturgradient) Druckkraft und Coriolis-Kraft aus dem Gleichgewicht gebracht werden, was zur so genannten *baroklinen Instabilität* führt, in deren Folge die Tiefdruckgebiete (Zyklonen) in unseren Breiten entstehen (siehe Abschn. 2.5).

1.4 Vorticity

Die Strömungsvorgänge in Atmosphäre und Ozean lassen sich mit Hilfe der Bewegungsgleichungen Gl. (11.6) und der in den Abschn. 1 und 3 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik abgeleiteten Kontinuitäts- gleichung und Energiegleichung beschreiben. Auf der großräumigen Skala werden die Bewegungsvorgänge durch zyklonale und antizyklonale Wirbel mit vertikaler Achse dominiert, den Tief- und Hochdruckgebieten (siehe Abschn. 2.5). Aus diesem Grund werden neben den oben genannten Gleichungen auch solche verwendet, welche die Wirbelstärke der geophysikalischen Strömungen beschreiben. Diese sind verknüpft mit den Begriffen *Vorticity* und *potentielle Vorticity*.

Die vertikale *Vorticity* (mit ω bezeichnet) ist definiert als die Vertikalkomponente der Geschwindigkeitsrotation:

$$\omega = \boldsymbol{k} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}). \tag{11.14}$$

Da die Vorticity die Wirbelstärke der Strömungen im Bezug auf ein erdfestes Koordinatensystem beschreibt, wird sie auch als relative Vorticity bezeichnet. Die rotierende Erde besitzt vom Inertialsystem aus betrachtet ebenfalls eine Vorticity, nämlich $2 \cdot \Omega$ oder senkrecht zur Tangentialebene den Wert $2 \cdot \Omega \cdot \sin(\phi)$. Letzterer entspricht gerade dem Coriolis-Parameter f. Die Summe aus relativer Vorticity ω und Coriolis-Parameter f nennt man *absolute Vorticity* und bezeichnet sie mit η:

$$\eta = \omega + f. \tag{11.15}$$

Eine Gleichung für die zeitliche Änderung der absoluten Vorticity erhält man durch die Anwendung des Operators $\boldsymbol{k} \cdot \nabla\times$ auf die Bewegungsgleichung Gl. (11.6). Nach Vernachlässigung einiger Terme und der Voraussetzung einer reibungsfreien Strömung erhält man die für großräumige atmosphärische und ozeanische Bewegungsvorgänge gültige Gleichung für die absolute oder relative Vorticity:

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \beta \cdot v = -\eta \cdot \nabla_\mathrm{h} \cdot \boldsymbol{v}_\mathrm{h}. \tag{11.16}$$

Hierbei ist β der so genannte *Beta-Parameter*

$$\beta = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi}, \tag{11.17}$$

mit dem Erdradius R, der die Variation des Coriolis-Parameters f mit der geographischen Breite angibt. Im Spezialfall einer zweidimensionalen, inkompressiblen Strömung in der x-y-Ebene erhält man statt Gl. (11.16):

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \beta \cdot v = 0. \tag{11.18}$$

Unter diesen Voraussetzungen ist die absolute Vorticity eine Erhaltungsgröße. Daher gilt:

$$\eta = \omega + f = \text{konst.}.$$

Wegen der Variation des Coriolis-Parameters f mit der geographischen Breite muss entsprechend Gl. (11.18) bei einer Bewegung nach Nord oder Süd die relative Vorticity einer Strömung zu- oder abnehmen. Diese Wirkung der Kugelgestalt der Erde im Hinblick auf die Coriolis-Kraft nennt man auch (wegen Gl. (11.17)) den Beta-(β)-Effekt. Dies führt unter anderem zur Ausbildung großräumiger Schwingungen in meridionaler Richtung (Abb. 11.3), die sich in Atmosphäre und Ozean als so genannte *Rossby-Wellen* bemerkbar machen. Diese erhält man formal aus der linearisierten Form der Vorticitygleichung Gl. (11.18) unter der Annahme einer konstanten Grundströmung $\overline{u}$ (in West-Ost Richtung) für die vereinfachte Störungsvorticity $\omega' = \partial v'/\partial x$. Mit einem Wellenansatz der Form

$$v'(x,t) = v_0 \cdot \cos(a \cdot (x - c \cdot t)),$$

Wellenzahl $a = 2 \cdot \pi/\lambda$, Wellenlänge λ, Phasengeschwindigkeit c, erhält man aus der linearisierten Vorticitygleichung als Dispersionsbeziehung für die Phasengeschwindigkeit der *Rossby-Wellen*

$$c = \overline{u} - \frac{\beta}{a^2} = \overline{u} - \frac{\beta \cdot \lambda^2}{4 \cdot \pi^2}. \tag{11.19}$$

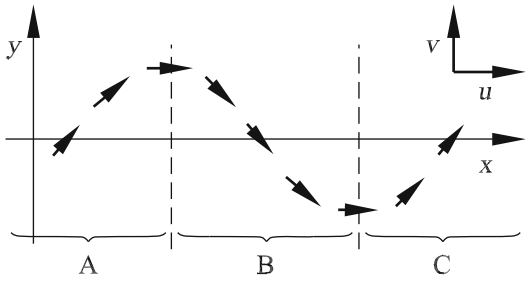


Abb. 11.3 Bahn eines Fluidpartikels unter der Wirkung des β-Effektes. Gebiete A und C: $v > 0$, B: $v < 0$

Aus der Dispersionsbeziehung Gl. (11.19) kann man für stationäre Wellen (d. h. $c = 0$) die Wellenlänge abschätzen. Für typische Strömungsgeschwindigkeiten in Atmosphäre und Ozean erhält man:

$$\begin{aligned} &\text{Atmosphäre:} && \overline{u} \approx 15\,\mathrm{m/s}, \quad \lambda \approx 6000\,\mathrm{km}, \\ &\text{Ozean:} && \overline{u} \approx 0.15\,\mathrm{m/s}, \ \lambda \approx 600\,\mathrm{km}. \end{aligned}$$

Es handelt sich bei den Rossby-Wellen also um großräumige Strömungsvorgänge in der Atmosphäre und im Ozean. Stationäre Rossby-Wellen werden durch in Nord-Süd-Richtung verlaufende Gebirgszüge angeregt. Ein Beispiel für atmosphärische Rossby-Wellen ist in Abb. 11.4 dargestellt.

Neben Vorticity und Vorticitygleichung hat sich der Begriff der *potentiellen Vorticity* im Bereich der Meteorologie und Ozeanographie durchgesetzt. Die *potentielle Vorticity*, meist mit PV bezeichnet, ist definiert als das Produkt von absoluter Vorticity η und dem vertikalen Gradienten der potentiellen Temperatur $\partial\theta/\partial z$:

$$PV = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \eta. \tag{11.20}$$

Für den Fall adiabater Vorgänge kann man aus der Vorticitygleichung Gl. (11.16) und dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik eine Gleichung für die potentielle Vorticity ableiten (*H. Ertel* 1942):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \eta\right) = 0. \tag{11.21}$$

Diese Gleichung gilt für großräumige, dreidimensionale adiabate Bewegungsvorgänge. Für diese ist die potentielle Vorticity eine Erhaltungsgröße.

In der Ozeanographie wird häufig eine abgewandelte Form der potentiellen Vorticity verwandt, die für *barotrope Strömungen* gültig ist:

$$PV = \frac{\eta}{H}, \tag{11.22}$$

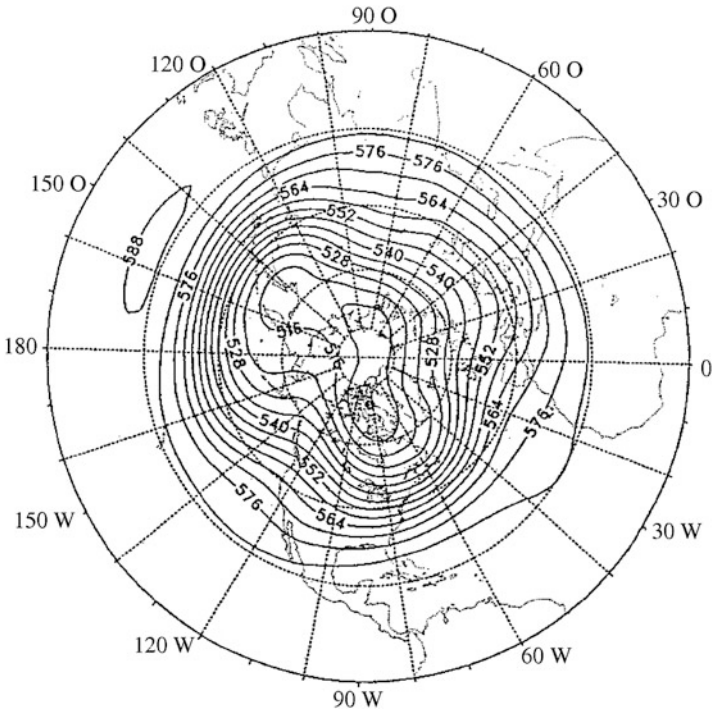


Abb. 11.4 Großräumige stationäre Wellen in etwa 5 km Höhe auf der Nordhalbkugel. Die Ausbildung eines Leeseitentrogs östlich der Rocky Mountains ist deutlich zu erkennen

wobei H die Tiefe einer Wassersäule ist. Die entsprechende Vorticitygleichung lautet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\eta}{H}\right) = 0. \tag{11.23}$$

Die Erhaltung der potentiellen Vorticity in der Form Gl. (11.21) oder Gl. (11.23) hat neben der Ausbildung von Rossby-Wellen noch ein anderes großräumiges Phänomen zur Folge, den *Leeseitentrog*. Damit ist die Ausbildung eines Troges (Gebiet relativ niedrigen Drucks) im Lee von Gebirgen, die in Nord-Süd Richtung verlaufen, gemeint. Dies ist in Abb. 11.5 skizziert. Im Bereich des Gebirges kommt es wegen der Querschnittsverengung zu horizontalen Geschwindigkeitsdivergenzen und -konvergenzen. Entsprechend der Vorticitygleichung Gl. (11.16) bewirkt dies eine Änderung der relativen Vorticity ω , welche in Verbindung mit dem β-Effekt (Gl. (11.17) und Abb. 11.3) zur Ausbildung des Leeseitentrogs führt.

1.5 Ekman-Schicht

In Abschn. 1.3 wird die geostrophische Strömung als Gleichgewicht zwischen Druckkraft und Coriolis-Kraft hergeleitet. In diesem Kapitel soll unter der Beibehal-

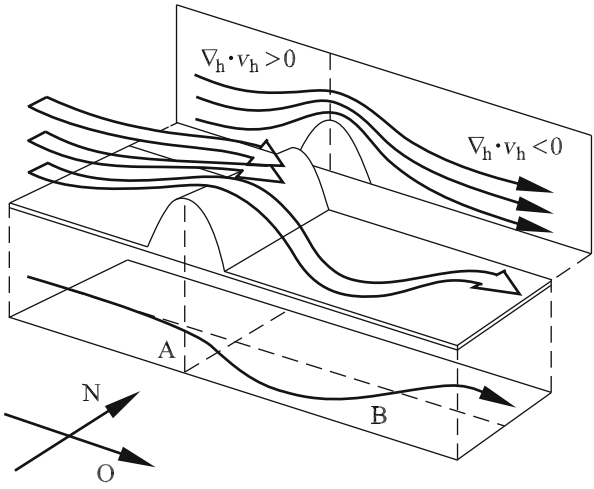


Abb. 11.5 Trajektorien von Fluidpartikeln beim Überströmen eines zweidimensionalen Gebirges (A). Durch die Wirkung von Divergenz- und β-Effekt auf die Vorticity Gl. (11.16) kommt es im Lee zur Ausbildung eines Troges (B)

tung der Einschränkungen horizontaler beschleunigungsfreier Strömung als dritte Kraft die Reibungskraft zugelassen werden. Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$f \cdot \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}_h = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla_h p + \nu \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_h}{\partial z^2}. \tag{11.24}$$

Mit der geostrophischen Windbeziehung Gl. (11.11) lässt sich die Druckkraft ersetzen durch $f \cdot \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}_g$:

$$f \cdot \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_g) = \nu \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_h}{\partial z^2}$$

oder mit den Geschwindigkeitskomponenten u und v:

$$-f \cdot (v - v_g) = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{11.25}$$

$$f \cdot (u - u_g) = \nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \tag{11.26}$$

Aus den Beziehungen Gl. (11.25) und Gl. (11.26) lässt sich bei geeigneten Randbedingungen der Vertikalverlauf der Strömungskomponenten $u(z)$ und $v(z)$ berechnen. Betrachtet wird zunächst ein Beispiel für die Atmosphäre. Am Erdboden gilt die Haftbedingung:

$$z = 0 \quad : \qquad u = v = 0. \tag{11.27}$$

Nach oben hin besitzt die Atmosphäre keinen festen Rand. Man kann aber plausibel annehmen, dass der Einfluss der festen Berandung über den Reibungsterm umso

geringer wird, je weiter man vom Rand entfernt ist. Für große Höhen (formal für $z \to \infty$), soll die Strömung sich der geostrophischen Strömung anpassen:

$$z \to \infty \quad : \qquad u = u_g, \qquad v = v_g, \tag{11.28}$$

Die Gleichungen Gl. (11.25) und Gl. (11.26) können mit den Randbedingungen Gl. (11.27) und Gl. (11.28) analytisch gelöst werden, wie dies der schwedische Ozeanograph Ekman (1905) abgeleitet hat. Zur Vereinfachung soll das Koordinatensystem so orientiert werden, dass der geostrophische Wind in x-Richtung weist und somit $\boldsymbol{v}_g = (u_g, 0)$ gilt. Die Lösung lautet:

$$u(z) = u_g \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{z}{D}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{D}\right)\right), \tag{11.29}$$

$$v(z) = u_g \cdot \exp\left(-\frac{z}{D}\right) \cdot \sin\left(\frac{z}{D}\right), \tag{11.30}$$

mit

$$D = \sqrt{\frac{2 \cdot \nu}{f}}. \tag{11.31}$$

Die Länge D Gl. (11.31) wird auch als *Ekman-Länge* bezeichnet.

Um die Windrichtungsänderung mit der Höhe besser darzustellen, verwendet man häufig ein so genanntes Hodogramm, in dem die Geschwindigkeitsvektoren auf die u-v-Ebene projiziert werden. Dies ist in Abb. 11.6 gezeigt. Man erkennt neben der Zunahme des Geschwindigkeitsbetrages eine Drehung des Windes mit der Höhe in die geostrophische Windrichtung. Für Höhen $z > \pi \cdot D$ stellt der Hodograph eine Spirale dar, die auch als *Ekman-Spirale* bezeichnet wird. Offensichtlich sind die Abweichungen des wahren Windes $\boldsymbol{v}_h$ vom geostrophischen Wind $\boldsymbol{v}_g$ für $z > \pi \cdot D$ recht gering, weshalb man die Schicht unterhalb $\pi \cdot D$ auch als *Ekmansche*

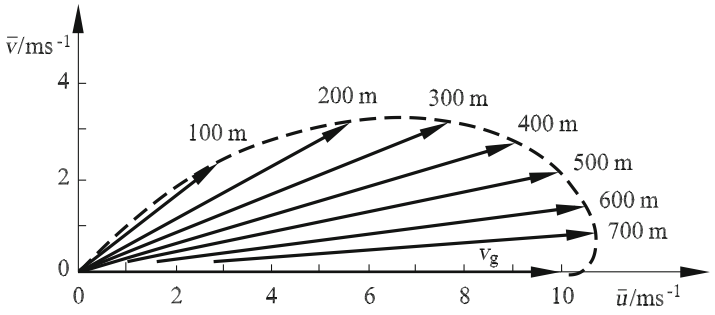


Abb. 11.6 Hodographendarstellung der Windverteilung in der atmosphärischen Ekman-Schicht entsprechend Gl. (11.29)–(11.31) für den Fall $|\boldsymbol{v}_g| = 10\,\mathrm{m/s}$, $f = 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$, $\nu = 10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, $\boldsymbol{v}_g$ geostrophischer Wind

Grenzschicht oder kurz *Ekman-Schicht* bezeichnet. Sie stellt die reibungsbedingte Grenzschicht über einer festen Berandung in einem rotierenden System dar.

Für den Ozean ergibt sich eine leicht abgeänderte Problemstellung. Hier wird die Frage untersucht, welche Strömung sich im Meer ohne Vorhandensein eines großräumigen Druckgradienten (geostrophische Strömung) unter der Wirkung der Windschubspannung an der Meeresoberfläche einstellt. Die Grundgleichungen lauten dann:

$$-f \cdot v = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad f \cdot u = \nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{11.32}$$

mit den Randbedingungen:

$$z = 0 \quad : \quad \frac{\tau_x}{\rho} = \nu \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \quad \frac{\tau_y}{\rho} = \nu \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \tag{11.33}$$

$$z \to -\infty \quad : \quad u = v = 0. \tag{11.34}$$

Hierbei sind τ_x und τ_y die Komponenten der durch den Wind auf die Wasseroberfläche wirkenden Schubspannung.

Die Lösung dieser Gleichung stammt wiederum von Ekman (1905) und lautet für den Fall, dass die Windschubspannung in y-Richtung angreift (d. h. $\tau_x = 0$):

$$u(z) = \frac{\tau_y}{\rho \cdot \sqrt{\nu \cdot f}} \cdot \exp\left(\frac{z}{D}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{D} + \frac{\pi}{4}\right), \tag{11.35}$$

$$v(z) = \frac{\tau_y}{\rho \cdot \sqrt{\nu \cdot f}} \cdot \exp\left(\frac{z}{D}\right) \cdot \sin\left(\frac{z}{D} + \frac{\pi}{4}\right), \tag{11.36}$$

z wird hier negativ nach unten gezählt.

Der Hodograph der Meeresströmung nach Gl. (11.35) und Gl. (11.36) ist in Abb. 11.7 dargestellt. Man erkennt wiederum eine Ekman-Spirale ähnlich wie in Abb. 11.6. Das Erstaunliche an dieser Lösung ist, dass die oberflächennahe Meeresströmung um 45° nach rechts von der aufgeprägten Windschubspannung gerichtet ist. Diese an Bord des Forschungsschiffes Frahm gemachte Beobachtung hatte Ekman (1905) zur Ableitung der Gleichungen veranlasst.

Setzt man zur Ermittlung der vertikalen Erstreckung $H = \pi \cdot D$ der Ekman-Grenzschicht in Atmosphäre und Ozean die jeweiligen Werte der kinematischen Zähigkeiten ein (Luft: $\nu = 0.15\,\mathrm{cm^2/s}$, Wasser: $\nu = 0.01\,\mathrm{cm^2/s}$), erhält man z. B. für $f = 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$:

$$\text{Atmosphäre} : \quad H = 55\,\mathrm{cm},$$

$$\text{Ozean} \quad : \quad H = 15\,\mathrm{cm}.$$

Diese Werte sind nach den Beobachtungen viel zu gering. Tatsächlich beträgt die vertikale Größe der Ekman-Schicht etwa 1000 m in der Atmosphäre und etwa

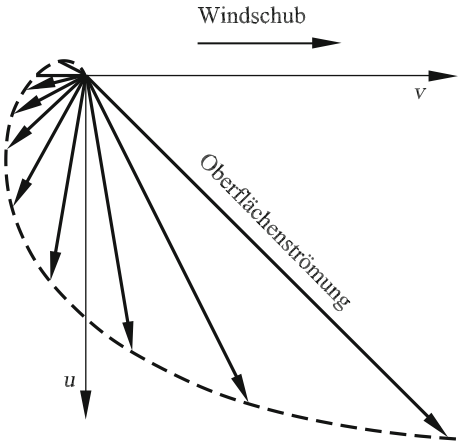


Abb. 11.7 Hodograph der Strömungsverhältnisse in der ozeanischen Ekman-Schicht

50 m im Ozean. Der Grund für diese vermeintliche Diskrepanz liegt darin, dass atmosphärische und ozeanische Grenzschichten turbulent sind und deshalb in den Gleichungen (11.25), (11.26) und (11.32) die turbulenten Diffusionskoeffizienten ν_t statt der molekularen kinematischen Zähigkeit ν verwendet werden müssten (d. h. $\nu_t \approx 10\,\mathrm{m^2/s}$ für die Atmosphäre und $\nu_t \approx 0.1\,\mathrm{m^2/s}$ für den Ozean).

Ein weiteres Defizit der Ekman-Lösungen im Vergleich zu Beobachtungen ist der große Ablenkungswinkel von 45° zwischen Bodenwind und geostrophischem Wind beziehungsweise Windschubspannung und Oberflächenströmung. Dies hängt damit zusammen, dass der turbulente Diffusionskoeffizient keine Materialkonstante ist, sondern sich mit der Höhe ändert. Numerische Lösungen der Ekman-Gleichungen mit variablen Diffusionskoeffizienten ergeben Ablenkungswinkel um 20° in Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Tatsächlich hat schon *L. Prandtl* 1949 in der 3. Auflage seines Buches eine analytische Lösung für eine turbulente Ekman-Schicht angegeben (siehe dort Kapitel V, 9), die den Beobachtungen recht nahe kommt.

1.6 Prandtl-Schicht

Die im vorigen Kapitel behandelte Ekman-Schicht beschreibt den vertikalen Strömungsverlauf in der gesamten atmosphärischen oder ozeanischen Grenzschicht. In der Nähe der Erdoberfläche hat man die Verhältnisse in zahlreichen Feldexperimenten genauer untersucht und daraus das Konzept der bodennahen Grenzschicht, im deutschen Sprachraum auch als *Prandtl-Schicht* bezeichnet, eingeführt. Man setzt voraus, dass in der Prandtl-Schicht die turbulente Schubspannung höhenkonstant ist:

$$\tau(z) = \tau_0 = -\overline{\rho \cdot w' \cdot \boldsymbol{v}_h'} = \overline{\rho} \cdot u_*^2. \tag{11.37}$$

Die Größe $u_*^2 = |\overline{w' \cdot \boldsymbol{v}_h'}|$ bezeichnet man als Schubspannungsgeschwindigkeit. Mit dem üblichen Gradientenansatz für turbulente Flüsse

$$\overline{w' \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{h}}'} = -\nu_{\mathrm{t}} \cdot \frac{\partial \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{h}}}{\partial z}$$

und dem Prandtlschen Mischungswegansatz für den turbulenten Diffusionskoeffizienten $\nu_{\mathrm{t}} = k \cdot u_* \cdot z$, mit der von Kármán Konstanten $k = 0.4$, erhält man bei Wahl des Koordinatensystems $\overline{\boldsymbol{v}} = (u, 0)$ durch Integration das Windprofil:

$$\overline{u}(z) = \frac{u_*}{k} \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{11.38}$$

Diese Beziehung ist das *logarithmisches Wandgesetz* (Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Gl. 41). Die im Logarithmus auftretende Höhe z_0 wird als Rauigkeitslänge bezeichnet und ist ein Maß für die Rauigkeit des Untergrundes (z. B. Sandfläche: $z_0 = 0.1\,\mathrm{mm}$, Gras: $z_0 = 5\,\mathrm{cm}$). Das logarithmische Windprofil ist durch Messungen vielfach bestätigt und gilt etwa für die untersten 20–50 m der Atmosphäre. Ein ähnliches Gesetz findet man auch in turbulenten technischen Strömungen über rauen Platten oder in Rohren (Wandgesetz, Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten).

Eine Besonderheit der atmosphärischen Prandtl-Schicht ist das üblicherweise gleichzeitige Auftreten eines vertikalen Temperaturgradienten, welcher zu einer geschichteten Scherströmung führt. Um den Einfluss der Temperaturschichtung auf das Windprofil zu erfassen hat sich in den letzten Dekaden die Ähnlichkeitstheorie nach Monin und Obukhov (1954) etabliert. Diese besagt, dass geeignet normierte Geschwindigkeitsgradienten in der Prandtl-Schicht universell sind:

$$\frac{k \cdot z}{u_*} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \phi\left(\frac{z}{L}\right). \tag{11.39}$$

Die dimensionslose Ähnlichkeitsfunktion ϕ hängt nur von der normierten Höhe z/L ab. Dabei ist L die *Monin-Obukhov-Länge*, welche über den turbulenten Temperaturfluss $\overline{w' \cdot \theta'}$ den Einfluss der Temperaturschichtung erfasst:

$$L = -\frac{u_*^3}{\frac{k \cdot g}{\theta_0} \cdot \overline{w' \cdot \theta'}}. \tag{11.40}$$

Die Funktion ϕ ist aus zahlreichen Feldmessungen bestimmt worden. Gebräuchlich ist z. B. die Form:

$$\begin{aligned}
&\phi = 1 + 5 \cdot \frac{z}{L}, && \frac{z}{L} > 0 \quad \text{stabileSchichtung},\\
&\phi = 1, && \frac{z}{L} = 0 \quad \text{neutraleSchichtung},\\
&\phi = (1 - 15 \cdot \frac{z}{L})^{-\frac{1}{4}}, && \frac{z}{L} < 0 \quad \text{labileSchichtung}.
\end{aligned}$$

Das vertikale Windprofil in einer thermisch geschichteten Prandtl-Schicht erhält man aus der Integration von Gl. (11.39) unter Verwendung der empirischen Ansätze für die Ähnlichkeitsfunktion $\phi(z/L)$.

Im Ozean kann im Prinzip auch eine Prandtl-Schicht mit einem logarithmischen Strömungsprofil erwartet werden. Jedoch wird die oberflächennahe Ozeanschicht durch Wellen meist so stark gestört, dass sich ein Geschwindigkeitsgesetz analog zu Gl. (11.38) nur unter besonders günstigen Umständen finden lässt. Näheres zu den Grenzschichten in Atmosphäre und Ozean und deren Wechselwirkung findet man in der Monographie von Kraus und Businger (1994).

2 Strömungen in der Atmosphäre

In den folgenden Kapiteln sollen Beispiele einzelner Strömungsformen in der Atmosphäre näher beschrieben werden. Die Auswahl ist naturgemäß auf wenige typische Erscheinungen beschränkt. Sie umfasst aber alle Skalen von den kleinräumigen Staubwirbeln bis hin zur globalen atmosphärischen Zirkulation.

Da die Luft als solche unsichtbar ist, stellt sich für atmosphärische Strömungen das Problem der Sichtbarmachung. Hier helfen die Wolken sozusagen als natürliche Tracer. Beispiele hierfür sind in dem von einem Wettersatelliten aufgenommenen Photo der Erde zu sehen (Abb. 11.8). Die verschiedenen atmosphärischen Phänomene, die auf diesem Satellitenbild zu sehen sind, werden in der Interpretationshilfe der Abb. 11.9 erläutert. In den nachfolgenden Kapiteln wird auf diese Strömungsformen näher eingegangen. Ausführliche Darstellungen zu verschiedenen kleinräumigen atmosphärischen Phänomenen findet man in den Monographien von Atkinson (1981) sowie Markowsky und Richardson (2010). Zahlreiche Beispiele von Satellitenaufnahmen und deren Interpretation hinsichtlich der atmosphärischen Strömungen sind in Scorer (1986) aufgeführt.

Ausführliche Darstellungen der Bewegungsformen in der Atmosphäre findet man z. B. in den deutschsprachigen Lehrbüchern von Häckel (1999) und Kraus (2000). Der theoretische Aspekt atmosphärischer Strömungen wird z. B. in den Monographien von Etling (2008) und Pichler (1997) ausführlich behandelt.

In den oben genannten Büchern nimmt auch die Behandlung der Strömung in der atmosphärischen Grenzschicht einen gewissen Raum ein. Hier soll es bei den Ausführungen zur Ekman-Schicht (Abschn. 1.5) und Prandtl-Schicht (Abschn. 1.6) belassen werden, weshalb im Folgenden diese Grenzschichtströmungen nicht behandelt werden. Dem interessierten Leser seien die Spezialmonographien zur atmosphärischen Grenzschicht von Garratt (1992) oder Kaimal und Finnigan (1994) sowie Kraus (2008) empfohlen.

2.1 Thermische Windsysteme

Wie bereits in Abschn. 1.2 diskutiert, werden die Luftbewegungen durch Druck-, Coriolis-, Reibungs- und Schwerkraft hervorgerufen beziehungsweise beeinflusst.

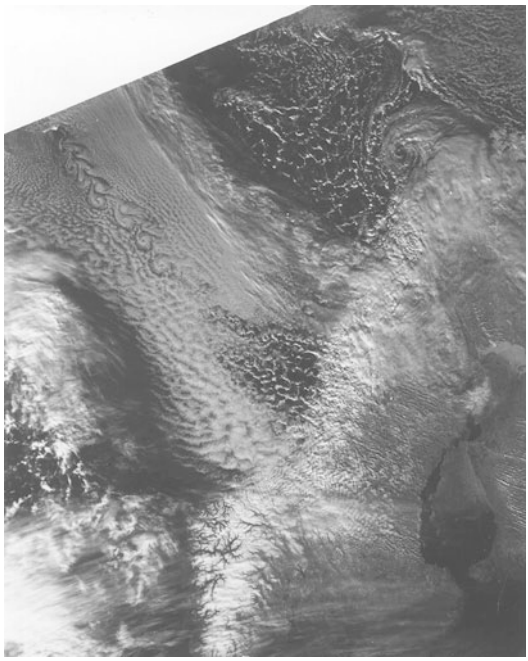


Abb. 11.8 Satellitenbild mit verschiedenen atmosphärischen Phänomenen (z. B. thermische Konvektion in Form von Rollen und Zellen, Wirbelstraße, Schwerewellen, Zyklone) die durch Wolken sichtbar gemacht werden. (Quelle: M. Eckardt FU Berlin)

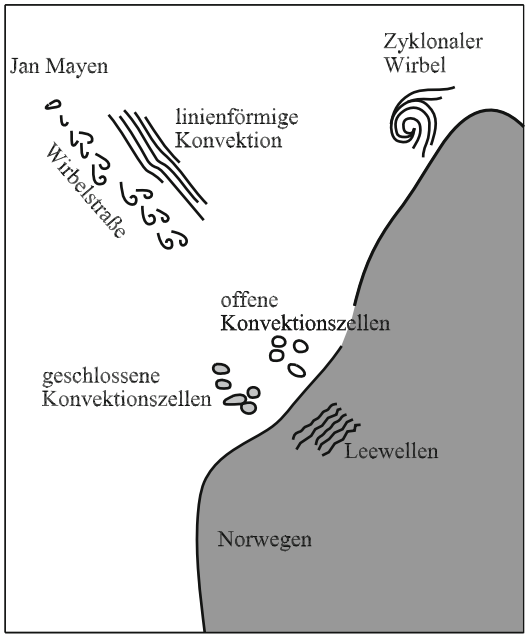


Abb. 11.9 Interpretationshilfe für die verschiedenen Strömungstypen, die auf dem Satellitenbild von Abb. 11.8 zu sehen sind

Dabei bewirkt die Reibung eine Abschwächung der Strömung und die Coriolis-Kraft lediglich eine Richtungsänderung. Da die Schwerkraft nur auf vertikale Bewegungen wirkt, verbleibt die Druckkraft als Antrieb für horizontale Atmosphärenbewegung. Es stellt sich die Frage nach dem Ursprung der Druckkräfte. Da die Atmosphäre ein nahezu ideales Gas darstellt, hängt der Luftdruck entsprechend der Zustandsgleichung für Gase sowie der Energiegleichung von der Lufttemperatur ab.

Im Folgenden sollen solche Strömungsvorgänge skizziert werden, die durch horizontale Temperaturunterschiede entstehen. Diese werden allgemein als *thermische Windsysteme* bezeichnet. Zu diesem Zweck betrachten wir die Zirkulation in einer x-z-Ebene. Die Zirkulation Γ entlang einer geschlossenen Kurve S ist definiert als:

$$\Gamma = \oint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_S v_s \cdot \mathrm{d}s. \tag{11.41}$$

Dabei ist v_s die Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Kurvenvektors $\boldsymbol{s}$. Ergibt sich bei der Auswertung des Integrals gemäß Gl. (11.41) Γ positiv, so spricht man von einer zyklonalen Zirkulation (im Gegenuhrzeigersinn), im Fall $\Gamma < 0$ ist die Zirkulation antizyklonal (im Uhrzeigersinn).

Die zeitliche Änderung der Zirkulation erhält man aus der Bewegungsgleichung (11.6). Im Folgenden sollen kleinräumige Phänomene betrachtet werden, so dass die Coriolis-Kraft vernachlässigt werden kann. Reibungseffekte bleiben ebenfalls unberücksichtigt. Damit ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_S v_s \cdot \mathrm{d}s = -\oint_S \frac{\mathrm{d}p}{\rho}, \tag{11.42}$$

oder unter Verwendung der Zustandsgleichung für ideale Gase $p = \rho \cdot R \cdot T$:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = -\oint_S \frac{R \cdot T}{p} \cdot \mathrm{d}p. \tag{11.43}$$

Im Falle einer konstanten Lufttemperatur ergibt sich wegen der Integration über eine geschlossene Kurve in Gl. (11.43) $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}t = 0$. Damit eine Zirkulation entsteht, müssen also räumliche Temperaturgegensätze vorhanden sein. Dies sei am Beispiel des so genannten *Land-See-Windes* erläutert. An sonnigen Tagen erwärmt sich die Luft über dem Land stärker als über dem Wasser, was auf unterschiedliche Wärmeleitung und Wärmekapazität der Untergründe (Wasser bzw. feste Erde) zurückzuführen ist. Da der Luftdruck immer mit der Höhe abnimmt, wie bereits in Abschn. 2 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik erläutert wurde, ergibt sich schematisch die in Abb. 11.10 dargestellte Verteilung von Isobaren und Isothermen.

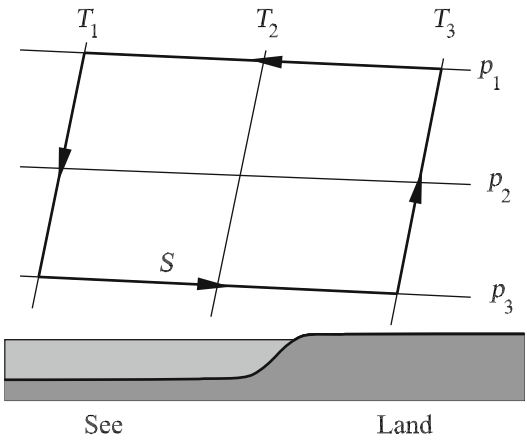


Abb. 11.10 Schematische Darstellung der Land-Seewind-Zirkulation für den Fall, dass die Landoberfläche wärmer ist als das Wasser (Seewind). Isothermen $T_1 < T_2 < T_3$, Isobaren $p_1 < p_2 < p_3$

Wählt man die Integrationskurve S so, dass sie jeweils entlang der Isobaren und Isothermen verläuft, so ergibt sich z. B. in Abb. 11.10:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = R \cdot (T_3 - T_1) \cdot \ln\left(\frac{p_3}{p_1}\right) > 0. \tag{11.44}$$

Es stellt sich eine zyklonale Zirkulation ein, die in Bodennähe, also unter höherem Luftdruck, vom kalten Wasser zum warmen Land gerichtet ist und die als Seewind bezeichnet wird. In größeren Höhen (niedriger Luftdruck) erfolgt eine kompensatorische Strömung vom Land zum Meer (Landwind).

In der Nacht kehren sich die Verhältnisse um. Dann kühlt die Luft über dem Land stärker ab als über dem Wasser. In Abb. 11.10 sind die Isothermen T_1 und T_3 vertauscht, entsprechend ergibt sich eine antizyklonale Zirkulation, d. h. in Bodennähe vom Land zum Meer. Insgesamt kann man sagen, dass eine thermische Zirkulation in der Atmosphäre sich so einstellt, dass ein Temperaturausgleich zwischen relativ warmen und kalten Gebieten angestrebt wird.

Die wichtige Erkenntnis aus diesem einfachen Beispiel ist, dass atmosphärische Bewegungen durch horizontale Temperaturunterschiede verursacht werden. Die Land-See-Wind Zirkulation ist dafür ein Beispiel. Sie tritt praktisch an allen Küsten auf und hat eine horizontale Erstreckung von 10–100 km. Die Stärke des Land-See Windes hängt dabei entsprechend Gl. (11.44) vom Temperaturunterschied Land-Wasser ab, aber auch von der üblicherweise überlagerten großräumigen Windströmung. Ein weiteres Beispiel sind die so genannten *Hangwinde*. Diese stellen sich an geneigten Hängen ein und führen Tags in Nähe der erwärmten Hangfläche zu einem Hangaufwind, nachts aufgrund der Abkühlung der Luft in Hangnähe zu einem Hangabwind. Da bei letzterem kältere Luft den Hang herunter strömt, bezeichnet man diesen auch als Kaltluftabfluss.

Im einfachsten Fall lassen sich die Hangwinde ebenfalls mit der Zirkulationsgleichung (11.42)–(11.44) erklären. In der Realität sind die Verhältnisse aber etwas

komplexer, da die Atmosphäre schon von Grund auf eine vertikale Temperaturschichtung besitzt und die Isothermen somit nicht hangparallel verlaufen können. Dies hat bereits *L. Prandtl* erkannt und in einer früheren Auflage des Führers durch die Strömungslehre eine analytische Lösung der Hangwinde angegeben (3. Auflage 1949, Kapitel V, 16). Weitere Ausführungen zu thermischen Windsystemen findet man in den Monographien von Atkinson (1981); Markowsky und Richardson (2010) sowie Simpson (1994, 1997) und Whiteman (2000).

2.2 Thermische Konvektion

In den Abschn. 1 und 2 des Kap. 8 ▸ Konvektive Wärme- und Stoffübertragung wurde im Rahmen der Wärmeübertragung auch das Phänomen der natürlichen Konvektion behandelt. Besonders die Bedingungen für *Zellularkonvektion* in horizontalen Schichten finden sich auch in der Atmosphäre wieder. Bei der Zellularkonvektion handelt es sich um eine Instabilität in einem thermisch instabil geschichteten Medium. Der Grundgedanke lässt sich vereinfacht wie folgt erklären.

Für eine Atmosphäre mit einem konstanten vertikalen Temperaturgradienten lässt sich aus den Bewegungsgleichungen und dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik folgende Beziehung für die vertikale Auslenkung z eines Partikels aus der Ruhelage ableiten:

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + N^2 \cdot z = 0. \tag{11.45}$$

Hierbei ist N die nach den englischen und finnischen Meteorologen Brunt (1927) und Väisälä (1925) benannte Brunt-Väisälä-Frequenz, die über den Vertikalgradienten der aktuellen Temperatur T oder der potentiellen Temperatur θ Gl. (11.9) definiert ist:

$$N = \sqrt{\frac{g}{T_0} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma' \right)} = \sqrt{\frac{g}{\theta_0} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}}. \tag{11.46}$$

Dabei ist Γ' der trockenadiabate Temperaturgradient mit einem Wert von $\Gamma' = g/c_p = 9.8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K/m}$ oder etwa $1\,\mathrm{K}/100\,\mathrm{m}$. Lenkt man ein Luftpaket in der Vertikalen um die Höhe Z_a gegen seine Gleichgewichtslage aus, so ergibt sich als Lösung von Gl. (11.45):

$$Z(t) = Z_\mathrm{a} \cdot \exp(N \cdot t), \qquad \text{für} \quad \frac{\partial T}{\partial z} < -\Gamma' \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} < 0,$$

$$Z(t) = Z_\mathrm{a} \cdot \cos(N \cdot t), \qquad \text{für} \quad \frac{\partial T}{\partial z} > -\Gamma' \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} > 0.$$

Im ersten Fall entfernt sich das Luftpaket immer weiter von seiner Gleichgewichtslage, welches man als instabil bezeichnet. In diesem Fall kann es im Medium Luft zu thermischer Konvektion kommen. Als Bedingung gilt, dass die Lufttemperatur mit der Höhe schneller abnimmt als für den Fall adiabater (neutraler) Schichtung.

Im zweiten Fall schwingt das Luftpartikel um seine Gleichgewichtslage. Dieser Fall, den man stabil nennt, wird in Abschn. 2.4 bei der Behandlung der Schwerewellen noch diskutiert.

Voraussetzung für das Auftreten thermischer Konvektion in der Atmosphäre ist somit die Erwärmung der Luftschichten vom Erdboden her. Die bereits in Abschn. 2 des Kap. 8 ▸ Konvektive Wärme- und Stoffübertragung besprochene Form der Zellularkonvektion (Rollen oder Hexagon) findet man auch in der Atmosphäre. Sie wird durch Wolken sichtbar gemacht, welche sich im oberen Teil der Konvektionszellen durch adiabate Abkühlung der aufsteigenden feuchten Luft bilden. Die Abb. 11.8 zeigt auf einem Satellitenbild die verschiedensten Arten der atmosphärischen Konvektion: längsförmige Konvektionsrollen (Wolkenstraßen), sowie offene und geschlossene Zellen. Die diese Wolkenmuster hervorrufende Konvektionsströmung ist in Abb. 11.11 schematisch dargestellt und in Abb. 11.12 in einer Satellitenaufnahme gezeigt.

Obwohl die Muster in Abb. 11.8 und 11.11 ähnlich aussehen wie in Laborströmungen (Abschn. 2 des Kap. 8 ▸ Konvektive Wärme- und Stoffübertragung), so bestehen doch einige prinzipielle Unterschiede. Dies betrifft sowohl die Dimensionen als auch die physikalischen Entstehungsmechanismen. Die atmosphärische Konvektion ist meist auf eine 1–2 km hohe Schicht oberhalb der Erdoberfläche begrenzt. Die in den Abb. 11.8 und 11.9 zu erkennenden Konvektionsformen haben

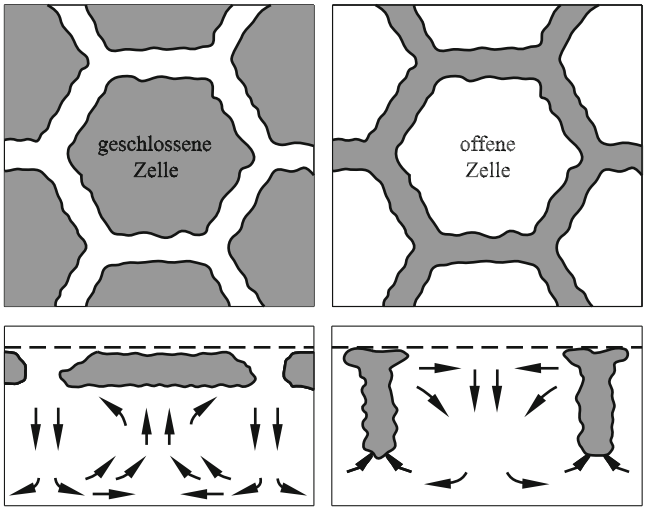


Abb. 11.11 Aufsichten und Querschnitte durch geschlossene und offene Konvektionszellen. Grau: Wolken, Pfeile: Zirkulation

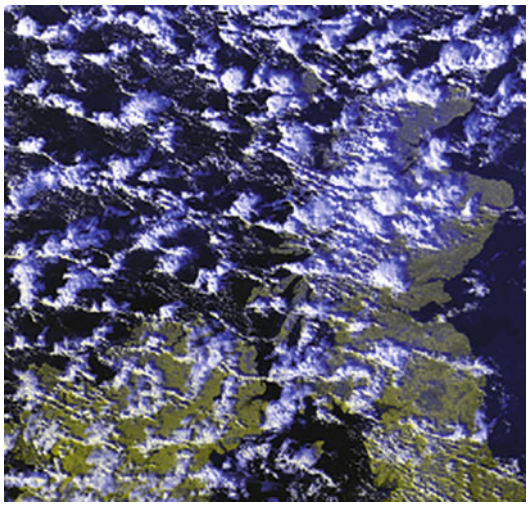


Abb. 11.12
Satellitenaufnahme von offenen Konvektionszellen. (Quelle: NOAA)

folgende horizontale Wellenlängen: Wolkenstraßen 3–15 km, Zellen 10–30 km. Das Verhältnis Höhe zu Breite beträgt somit zwischen 1 : 3 bis 1 : 10 bei linearen Konvektionsmustern und etwa 1 : 10–1 : 20 bei Zellen. Im Labor beträgt dieses Verhältnis etwa 1 : 3.

Als Ursache für die kleinen Aspektverhältnisse in der atmosphärischen Konvektion werden verschiedene Erklärungen gegeben wie sie z. B. in den Übersichtsartikeln von Atkinson und Zhang (1996) über Zellen und Etling und Brown (1993) über Rollen erläutert sind. Besonders das Freiwerden latenter Wärme bei der Wolkenbildung scheint hierbei eine Rolle zu spielen, ein Effekt, der in Laborfluiden nicht auftritt. Weitere Aspekte der thermischen Konvektion in der Atmosphäre findet man in der Monographie von Emanuel (1994).

2.3 Schwerewellen

Im vorigen Kapitel wurde das Entstehen thermischer Konvektion in einer instabil geschichteten Atmosphäre behandelt. Diese entstand durch Erwärmung der Luft von der Erdoberfläche her. Häufig tritt aber der Fall auf, dass die Atmosphäre sich in Bodennähe durch langwellige Ausstrahlung auskühlt (z. B. in der Nacht), so dass die Lufttemperatur mit der Höhe zunimmt. Eine solche Atmosphäre nennt man stabil geschichtet.

Bei der Lösung der Gl. (11.45) für eine stabile Schichtung (zweiter Fall) hatte sich eine Schwingung ergeben:

$$Z(t) = Z_{\mathrm{a}} \cdot \cos(N \cdot t), \tag{11.47}$$

mit der Brunt-Väisälä-Frequenz N entsprechend Gl. (11.46). Die Schwingungsdauer eines vertikal ausgelenkten Luftpaketes beträgt $\tau = 2 \cdot \pi / N$. Einige Zahlenbeispiele:

$\frac{\partial T}{\partial z}\left[\frac{K}{100\,\mathrm{m}}\right]$	$\frac{\partial \theta}{\partial z}\left[\frac{K}{100\,\mathrm{m}}\right]$	$N[\mathrm{s}^{-1}]$	$\tau[\mathrm{s}]$
- 0.65	0.35	0.011	570
0	1.0	0.018	350
+ 1.0	2.0	0.026	240

Eine stabil geschichtete Atmosphäre ist ein schwingungsfähiges Kontinuum und ermöglicht damit die Ausbreitung von Wellen, deren Rückstellkraft die Schwerkraft ist. Diese Wellen werden deshalb auch als *Schwerewellen* bezeichnet. Die Herleitung der Wellengleichung sei hier nur kurz beschrieben. Als Grundlage dient die Boussinesq-Approximation der Bewegungsgleichungen, wie sie in Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik als Gleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. 85) angegeben ist. Nach der üblichen Linearisierung erhält man die Form der Störungsgleichungen (Kap. 8 ▸ Konvektive Wärme- und Stoffübertragung, Gl. 18).

Betrachtet man zur Vereinfachung eine ruhende Atmosphäre, so erhält man nach Zusammenfassen dieser Gleichungen schließlich eine Differentialgleichung für die Vertikalgeschwindigkeit w:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + N^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{11.48}$$

Zur Lösung dieser Gleichung dient ein Wellenansatz der Form:

$$w(x, z, t) = w_0 \cdot \cos(a_x \cdot x + a_z \cdot z - \omega \cdot t). \tag{11.49}$$

Hierbei sind entsprechend der Abb. 11.13 a_x und a_z die horizontalen und vertikalen Komponenten ($a_x = 2 \cdot \pi / \lambda_x$, $a_z = 2 \cdot \pi / \lambda_z$) des Wellenzahlvektors $\boldsymbol{a}$ und ω die Eigenfrequenz der Welle. Nach Einsetzen des Wellenansatzes Gl. (11.49) in die Wellengleichung (11.48) erhält man als Frequenzbedingung:

$$\omega = N \cdot \frac{a_x}{a} = N \cdot \cos(\alpha). \tag{11.50}$$

Die Schwingungsfrequenz der Schwerewellen kann also höchstens die Brunt-Väisälä-Frequenz N erreichen (für $\alpha = 0$, d. h. eine rein horizontale Wellenausbreitung).

Die Phasengeschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung c ergibt sich wegen $\boldsymbol{a}^2 \cdot \boldsymbol{c}^2 = a^2 \cdot c^2 = \omega^2$ zu:

$$c = \pm \frac{N}{a} \cdot \cos(\alpha) \tag{11.51}$$

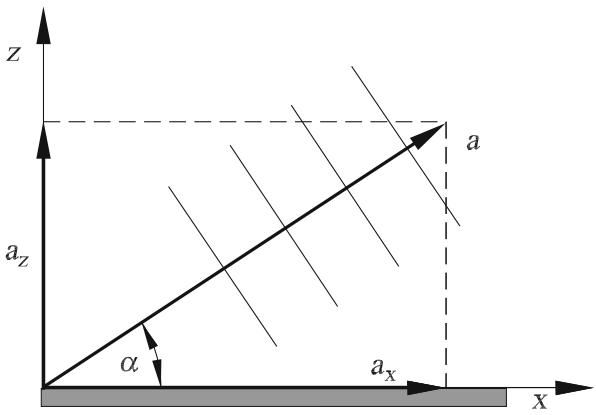


Abb. 11.13 Der Wellenzahlvektor $\boldsymbol{a}$ bei internen Schwerewellen. Senkrecht zu $\boldsymbol{a}$ sind Schwingungsebenen skizziert

oder für den Fall einer sich horizontal ausbreitenden Welle ($\alpha = 0, a = a_x$):

$$c = \pm\frac{N}{a} = \pm\frac{\lambda \cdot N}{2 \cdot \pi}.$$

Einige Zahlenbeispiele: Setzt man $\partial T/\partial z = 0$ ($\partial\theta/\partial z = 1\ K/100\,\mathrm{m}$), d. h. $N = 0.018\,\mathrm{s}^{-1}$, so ergeben sich:

$$\lambda = 1\,\mathrm{km} \rightarrow c \approx 3\,\mathrm{m/s},$$
$$\lambda = 3\,\mathrm{km} \rightarrow c \approx 10\,\mathrm{m/s}.$$

Die Phasengeschwindigkeit der Schwerewellen liegt also in der Größenordnung der in der Atmosphäre vorkommenden Windgeschwindigkeiten. Sind die Richtungen von Wind- und Phasengeschwindigkeit entgegengesetzt, kann es zu stationären Schwerewellen kommen. Dies ist der Fall, wenn zwischen Windgeschwindigkeit U, Wellenlänge λ und Brunt-Väisälä-Frequenz N folgende Beziehung erfüllt ist:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot U. \tag{11.52}$$

Stationäre Wellen findet man besonders im Lee von Bergen, welche die anströmende Luft an ihrer Vorderseite zum Aufsteigen zwingen und so für eine kontinuierliche vertikale Anregung der Schwerewellen sorgen. Die dabei entstehenden Wellen werden auch *Leewellen* genannt.

Bei entsprechender Luftfeuchtigkeit kommt es in den Aufwindgebieten der Welle zur adiabaten Abkühlung und dadurch zur Wolkenbildung. Somit machen sich Leewellen (und auch allgemein Schwerewellen) durch eine periodische Wolkenanordnung quer zur Windrichtung bemerkbar (Abb. 11.14). Dies ist häufig auf Satellitenbildern der Art von Abb. 11.15 zu sehen.

Da die freie Atmosphäre praktisch immer stabil geschichtet ist, gehören Schwerewellen zu den mehr oder weniger ständig vorkommenden Bewegungsformen

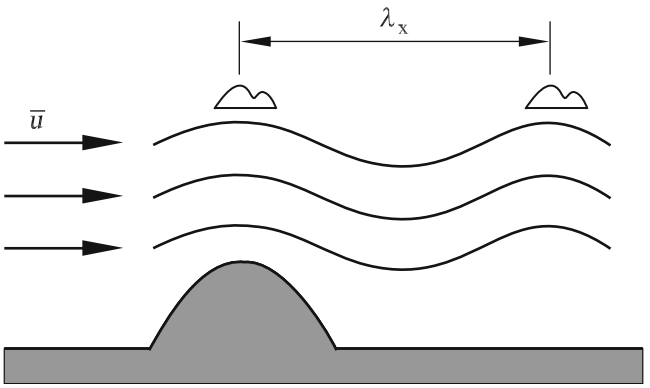


Abb. 11.14 Schematische Darstellung von Leewellen und deren Sichtbarmachung durch Wolkenbildung

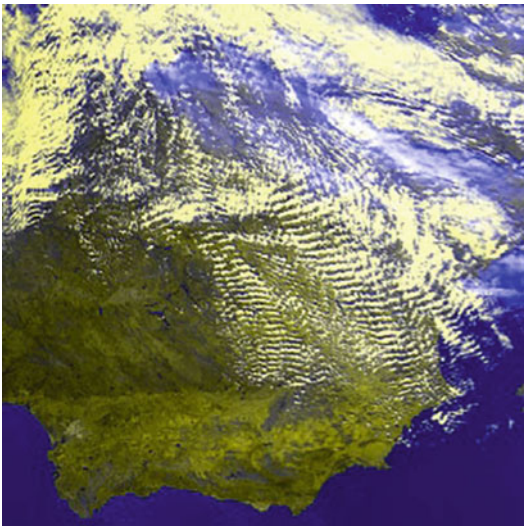


Abb. 11.15 Satellitenaufnahme von Schwerewellen, die bänderförmige Wolkenformationen (Bildmitte) verursachen. (Quelle: NOAA)

in der Atmosphäre. Weitere Ausführungen findet man in den Monographien von Nappo (2012) und Sutherland (2010) sowie im Übersichtsartikel von Wurtele et al. (1996).

2.4 Wirbel

Neben den bisher beschriebenen Bewegungsvorgängen wie Land-See-Wind, thermische Konvektion oder Schwerewellen, wird die atmosphärische Dynamik stark durch *Wirbel* der verschiedensten Größen geprägt. Dies reicht von den Tiefdruckgebieten mit einer horizontalen Ausdehnung von einigen Tausend Kilometern bis hin

zum kleinräumigen Staubteufel von 50 m Durchmesser. In der folgenden Tabelle sind Beispiele für verschiedene Wirbelphänomene aufgeführt, wobei die Angaben zu Durchmesser, Windgeschwindigkeit und Lebensdauer typische Werte darstellen:

Bezeichnung	Durchmesser [km]	Lebensdauer	Geschwindigkeit [m/s]	Drehrichtung
Tief	2000	4 d	20	zyklonal
Hurrikan	500	10 d	80	zyklonal
Orographischer Wirbel	50	1 d	5	zykl. u. antizykl.
Tornado	1	1 h	100	zykl. u. antizykl.
Staubteufel	0.1	1 min	10	zykl. u. antizykl.

Die oben angeführten Beispiele stellen Wirbel mit vertikaler Achse dar, wobei die Drehrichtung bei den großräumigen Phänomenen Tiefdruckgebiet und Hurrikan immer zyklonal, bei den kleinräumigen Phänomenen sowohl zyklonal als auch antizyklonal sein kann. Dieser Unterschied ist auf die Wirkung der Coriolis-Kraft zurückzuführen, wie am Kräftediagramm in Abb. 11.16 zu erkennen ist.

Im Idealfall eines rotationssymmetrischen Wirbels ergibt sich aus den Bewegungsgleichungen (11.6) unter Vernachlässigung von Reibungskräften folgendes Kräftegleichgewicht (Abb. 11.16):

$$\frac{v^2}{r} + f \cdot v = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}, \tag{11.53}$$

$$\text{Zentrifugalkraft} + \text{Coriolis} - \text{Kraft} = \text{Druckkraft}.$$

r ist der Abstand vom Wirbelzentrum.

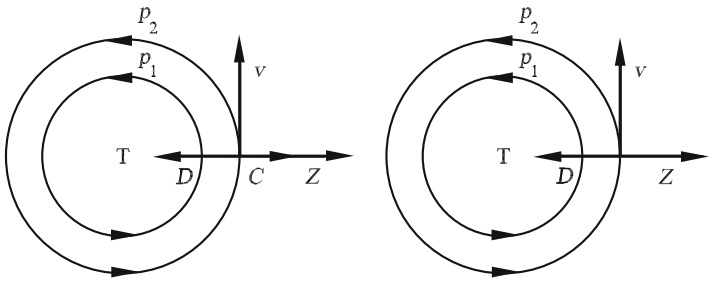


Abb. 11.16 Kräftegleichgewicht in rotationssymmetrischen Wirbeln. Im Zentrum der Wirbel herrscht jeweils tiefer Luftdruck (T). Dargestellt sind Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, Isobaren p, Coriolis-Kraft $\boldsymbol{C}$, Druckkraft $\boldsymbol{D}$, Zentrifugalkraft $\boldsymbol{Z}$. Links: Großräumiger Wirbel (Tiefdruckgebiet), rechts: Kleinräumiger Wirbel (z. B. Tornado)

Dabei wirkt die Druckkraft jeweils zum Wirbelzentrum hin und die Zentrifugalkraft vom Wirbelzentrum weg. Die Zentrifugalkraft hat im Fall einer großräumigen Zyklone (Abb. 11.16) die gleiche Richtung wie die Coriolis-Kraft, im Fall einer Antizyklone (Hochdruckgebiet, hier nicht dargestellt) die Richtung der Druckkraft.

Für die Abschätzung des Kräftegleichgewichtes seien 2 Beispiele angeführt:

	$\frac{v^2}{r}$	$f \cdot v$	$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}$	Einheit
Tiefdruckgebiet	1	3	5	$\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$
Tornado	5000	5	5000	$\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$

Während bei einem großräumigen Wirbel (Tiefdruckgebiet) die Coriolis-Kraft eine wichtige Rolle spielt, ist sie bei einem kleinräumigen Wirbel (Tornado) zu vernachlässigen. Dies ist in Abb. 11.16 rechts skizziert.

Die Ursachen für die Entstehung der aufgeführten Wirbelphänomene ist vielschichtig und soll kurz bei der Besprechung der einzelnen Beispiele erwähnt werden. Allen gemeinsam ist jedoch ein Wirbelverstärkungsmechanismus, der sich aus der Vorticitygleichung (11.16) ergibt. Diese lässt sich für die relative Vorticity ω unter Vernachlässigung der Breitenabhängigkeit des Coriolis-Parameters f schreiben als:

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -(f + \omega) \cdot \nabla_\mathrm{h} \cdot \boldsymbol{v}_\mathrm{h}. \tag{11.54}$$

Demnach tritt eine Wirbelverstärkung (oder Abschwächung) dann auf, wenn eine Konvergenz (oder Divergenz) im horizontalen Strömungsfeld vorhanden ist. Nehmen wir als Beispiel den Tornado der Abb. 11.17. Für diesen gilt, dass $|\omega| \gg f$ und somit:

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\omega \cdot \nabla_\mathrm{h} \cdot \boldsymbol{v}_\mathrm{h}. \tag{11.55}$$

Man beobachtet in diesen Wirbeln immer ein Einströmen in den Wirbelkern in Nähe des Erdbodens (Konvergenz), so dass $\nabla_\mathrm{h} \cdot \boldsymbol{v}_\mathrm{h} < 0$. Weist der anfänglich noch schwache Wirbel eine zyklonale Vorticity auf ($\omega > 0$), so wird diese wegen $\nabla_\mathrm{h} \cdot \boldsymbol{v}_\mathrm{h} < 0$ mit der Zeit zunehmen. Das ist in Abb. 11.17 skizziert. Im Falle einer antizyklonalen Anfangsdrehrichtung ($\omega < 0$) tritt der gleiche Effekt auf. Der Betrag der Rotation wird verstärkt, die Drehrichtung bleibt antizyklonal.

Es wird kurz auf einzelne Wirbelarten eingegangen:

2.4.1 Tiefdruckgebiet

Tiefdruckgebiete sind großräumige atmosphärische Wirbel mit relativ niedrigem Luftdruck im Wirbelkern (deshalb die Bezeichnung Tiefdruckgebiet oder kurz Tief). Der Wind weht entsprechend dem geostrophischen Gleichgewicht

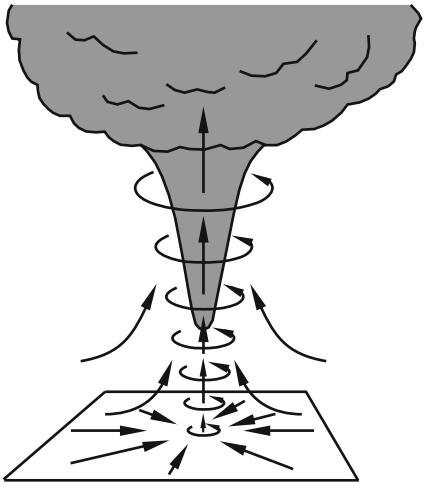


Abb. 11.17 Schematische Darstellung der Wirbelverstärkung durch horizontale Strömungskonvergenz. Die trichterförmige Ausbuchtung der Wolke entspricht etwa dem sichtbaren Teil eines *Tornados*. (rechtes Bild, Quelle: NOAA)

Abb. 11.18 Satellitenbild einer Zyklone (Tiefdruckgebiet), die durch eine spiralförmige Wolkenformation gekennzeichnet ist. (Quelle: EUMETSAT)

(siehe Abschn. 1.3) im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) um den Tiefkern, weshalb ein Tief auch als *Zyklone* bezeichnet wird. Wegen seiner großen räumlichen Ausdehnung kann man das Tief als Wirbel nur auf Satellitenfotos anhand der spiralförmigen Wolkenanordnung (siehe Abb. 11.18), oder im Bodendruckfeld auf einer Wetterkarte erkennen. Eine solche Wetterkarte, mit den das Tief kennzeichnenden Isobaren, ist in Abb. 11.26 dargestellt. Die Tiefdruckgebiete bestimmen mit ihren Wolken- und Regengebieten praktisch das Wetter in den mittleren Breiten beider Hemisphären und stellen daher die wichtigsten großräumigen Wirbel dar.

Die Entstehungsursache von Tiefdruckgebieten lässt sich durch eine besondere Art der Instabilität, der so genannten *baroklinen Instabilität* erklären. Zur Theorie

der baroklinen Instabilität finden sich ausführliche Darstellungen in den bereits erwähnten Monographien von Cushman-Roisin und Beckers (2011); Etling (2008); Pedlosky (1994); Pichler (1997) und Vallis (2006). An dieser Stelle sei lediglich die Grundidee aufgezeigt. Wie in Abschn. 1.3 erläutert, kann sich unter idealisierten Bedingungen ($Ro \to 0$) ein Gleichgewicht zwischen Druckkraft und Coriolis-Kraft einstellen. Dies führt zum geostrophischen Wind Gl. (11.11) und zur thermischen Windbeziehung Gl. (11.12). Letztere besagt, dass in einer baroklinen Atmosphäre ein horizontaler Temperaturgradient neben dem Druckgradienten zu einer Variation des geostrophischen Windes mit der Höhe führt. Es liegen also in diesem Fall warme Luftmassen neben kalten Luftmassen. Dieses Gleichgewicht ist aber nicht stabil, sondern führt bei Überschreiten eines kritischen horizontalen Temperaturgradienten zu einer vertikalen Umlagerung, d. h. die kalten Luftmassen schieben sich unter die warmen Luftmassen. Wegen des starken Einflusses der Erdrotation auf großräumige Bewegungen führt dies zur Bildung zyklonaler horizontaler Bewegungen, die schließlich in den Zyklonen münden.

2.4.2 Tropische Zyklone

Die *tropischen Zyklone* sind, wie der Name schon sagt, Tiefdruckgebiete in den tropischen Bereichen der Atmosphäre. Sie werden unter dem Namen *Hurrikan* im Bereich des Westatlantik (Karibik, USA) und unter *Taifun* im asiatischen Raum geführt. Ein Satellitenfoto eines solchen Hurrikan ist bereits im Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik als Abb. 10 vorgestellt worden. Hinter dem eher harmlosen Begriff *tropische Zyklone* verbirgt sich einer der kräftigsten Windsysteme der Atmosphäre, weshalb diese auch als tropische Wirbelstürme bezeichnet werden. Die hohen Windgeschwindigkeiten (bis zu 300 km/h), verbunden mit den dadurch angeregten Meereswellen, führen regelmäßig zu großen Zerstörungen, wenn ein solcher Sturm auf Land trifft. So verursachte der Hurrikan Katrina im Jahr 2005 die bisher größte Naturkatastrophe (Abb. 11.19).

Abb. 11.19 Satellitenbild des Hurrikans Katrina (2005) im Golf von Mexiko. (Quelle: NOAA)

Die Ursache der Entstehung der tropischen Wirbelstürme kann hier nur angedeutet werden. Sie bilden sich über den warmen tropischen Ozeanen, wo sich die Luft mit Wasserdampf anreichert. In der hoch reichenden thermischen Konvektion dieser Gebiete (Gewitterwolken bis 15 km Höhe) kondensiert der Wasserdampf und setzt damit latente Wärmeenergie frei. In Verbindung mit der Erdrotation führt dies schließlich zur Ausbildung einer Zyklone, die sich auf ihrer Wanderung westwärts über dem feuchten, warmen Ozean verstärkt, bis schließlich ein Wirbelsturm daraus erwächst. Weitere Informationen zur Struktur und Vorkommen von tropischen Zyklonen sowie zu deren Entstehung findet man z. B. in den Monographien von Elsner und Kara (1999) und Emanuel (2005) oder in einem Video über Naturkatastrophen (Discovery Channel 1997), das die Zerstörungskraft tropischer Wirbelstürme eindrucksvoll dokumentiert.

2.4.3 Orographische Wirbel

Die *Kármánsche Wirbelstraße* in Abschn. 6 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten zeigt, dass sich hinter angeströmten Körpern Wirbel bilden können. Solche Körper werden in der Atmosphäre durch orographische Hindernisse (Hügel, Berge, Gebirge) realisiert. Von den verschiedensten Arten der orographisch bedingten Wirbel wird auf diese *Kármánsche Wirbelstraße* in der Atmosphäre eingegangen. In der Atmosphäre treten solche Wirbelstraßen im Lee von großen Inseln auf, wie in Abb. 11.8 am Beispiel von Jan Mayen zu erkennen ist. Die einzelnen zyklonalen und antizyklonalen Wirbel haben dabei einen Durchmesser von 10–30 km, die Gesamtlänge der Wirbelstraße kann bis zu 400 km betragen.

Da Inseln recht flache Hindernisse sind (Höhe : Breite $\approx$ 1 : 10), wird die Luft gezwungen, um das Hindernis zu strömen. Dies geschieht durch eine Temperaturinversion unterhalb der Gipfelhöhe, die aufgrund der Archimedischen Auftriebskräfte wie eine Art Deckel auf die untere Atmosphäre wirkt.

2.4.4 Tornado und Staubteufel

Tornado ist die in den USA übliche Bezeichnung für extrem starke, schlauchförmige Wirbel, die im Zusammenhang von großen Gewitterwolken entstehen (Abb. 11.17). Ihr Durchmesser beträgt im Gegensatz zu den tropischen Wirbelstürmen nur wenige hundert Meter. Die auftretenden Windgeschwindigkeiten bis zu 400 km/h und der im Wirbelkern herrschende starke Unterdruck (bis zu 100 hPa gegenüber der Umgebung) richten regelmäßig große Schäden an. Im Video ist diese Zerstörungskraft eindrucksvoll dokumentiert (z. B. Video des Discovery Channel 1997).

Der Rotationssinn des Tornados kann sowohl zyklonal als auch antizyklonal sein. Es überwiegt bei sehr starken Tornados aber der zyklonale Drehsinn, da die Mutterwolke aufgrund der großräumigen Windverhältnisse meist bereits zyklonale Rotation besitzt. Die Verstärkung dieser Anfangsrotation zum Tornado ist recht komplex und noch nicht voll verstanden. Als Teil des Vorgangs kann aber wieder der Rotationsverstärkungsmechanismus Gl. (11.55) herangezogen werden. Starke Auf- und Abwinde (bis zu 40 m/s) in der Gewitterwolke führen aus Kontinuitätsgründen zu starken horizontalen divergenten und konvergenten Strömungen, die

entsprechend Gl. (11.55) zur Verstärkung der Vorticity führen. Dies ist schematisch in Abb. 11.17 dargestellt.

Auch in Europa treten Tornados auf, jedoch sind sie hier meist schwächer ausgeprägt und werden bei uns als *Tromben* oder *Windhosen* (über dem Meer als Wasserhose) bezeichnet. Umfangreiches Material zum Auftreten von Tornados und zur Ursache deren Entstehung findet sich in Church et al. 1993.

Der *Staubteufel* ist ebenfalls ein schlauchförmiger Wirbel mit vertikaler Achse, der jedoch nicht an das Vorhandensein einer Wolke geknüpft ist. Vielmehr tritt er in Zusammenhang mit thermischer Konvektion auf und ist somit ein Schönwetterphänomen. Wegen seiner geringen Ausdehnung von etwa 10–100 m in der Horizontalen und 100–500 m in der Vertikalen, sowie seiner mäßigen Windgeschwindigkeiten von 10 m/s wird er auch gelegentlich als kleiner Bruder des Tornados bezeichnet. Der Begriff Staubteufel rührt daher, dass er loses Bodenmaterial aufwirbelt und in seinem Wirbelkern in die Höhe transportiert. Dadurch kann der Wirbel überhaupt erst sichtbar gemacht werden.

Der Entstehungsmechanismus für Wirbel vom Typ der Staubteufel ist noch nicht vollständig geklärt. Der Haupteffekt ist sicher wieder der Wirbelverstärkungsmechanismus Gl. (11.55). In der Nähe des erwärmten Erdbodens steigt warme Luft in Form von Thermikschläuchen in die Höhe und erzwingt damit ein horizontales Nachströmen von Luft. Wenn eine gewisse Anfangsrotation vorhanden ist, z. B. durch ein Hindernis, führt die Windkonvergenz im Bereich des Aufwindschlauches gemäß Gl. (11.55) zur Rotationsverstärkung.

2.5 Globale atmosphärische Zirkulation

In den vorangegangenen Kapiteln wurden verschiedene Einzelphänomene atmosphärischer Strömungen vorgestellt. Zur Abrundung dieser Ausführungen soll kurz skizziert werden, wie sich die Atmosphäre im globalen Maßstab verhält. Dabei sind es im Besonderen zwei Effekte, welche die großräumige Dynamik beeinflussen, die Erdrotation und die Sonnenstrahlung. Letztere bewirkt wegen der Kugelgestalt der Erde, dass die Atmosphäre in Äquatornähe mehr Strahlungsenergie erhält als in den polaren Bereichen. Dies führt dazu, dass die Lufttemperatur in den äquatornahen Gebieten höher ist als in den Gebieten der höheren Breiten.

In Abschn. 2.1 werden die thermischen Zirkulationen behandelt. Ein horizontaler Temperaturgradient bewirkt eine Vertikalzirkulation, wobei die Luft in Bodennähe von kälteren zu wärmeren Gebieten strömt. Demzufolge muss sich auch eine solche Zirkulation zwischen den Polargebieten und dem Äquator einstellen. Dies ist tatsächlich der Fall, wenn auch in einem eingeschränkten Bereich zwischen dem Äquator und etwa 30° nördlicher und südlicher Breite. Diese Zirkulation wird nach dem englischen Meteorologen G. Hadley als *Hadley-Zirkulation* bezeichnet (Abb. 11.20).

Diese großräumige thermische Zirkulation findet auf der rotierenden Erde statt, weshalb der Einfluss der Coriolis-Kraft berücksichtigt werden muss. Hier wird in Abschn. 1.3 der Zusammenhang mit dem geostrophischen Gleichgewicht

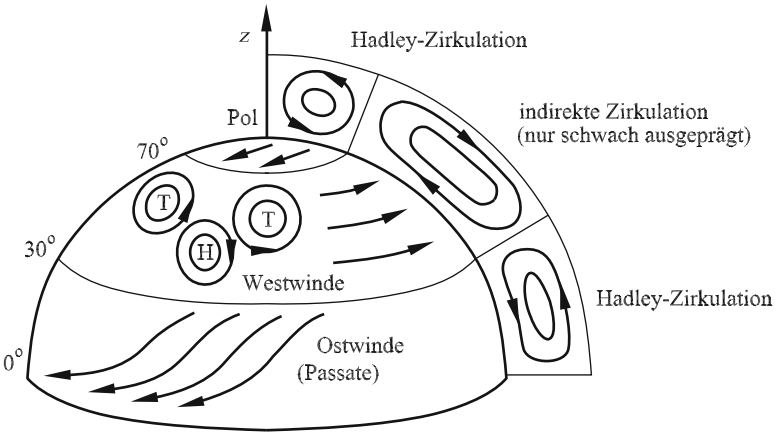


Abb. 11.20 Schematische Darstellung der globalen atmosphärischen Zirkulation

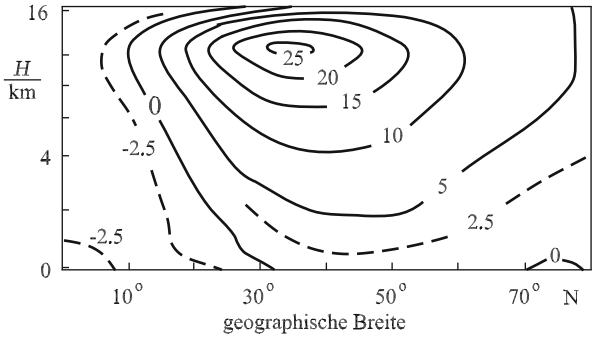


Abb. 11.21 Mittlere zonale Windgeschwindigkeit in m/s in Abhängigkeit von der geographischen Breite und der Höhe. Positive Werte: Westwinde; negative Werte: Ostwinde

festgestellt. Ein horizontaler Temperaturgradient führt zu einer Höhenänderung des geostrophischen Windes. Dabei wehte der Wind so, dass die warme Luft rechts zur Strömungsrichtung liegt (thermische Windbeziehung, Gl. (11.13)). Im Falle des großräumigen Temperaturgradienten zwischen Äquator und Pol bedeutet dies, dass unter dem Einfluss der Erdrotation sich eine Westwindzone, d. h. eine mehr oder weniger Breitenkreis-parallele Strömung nach Osten ausbilden muss. Dies wird tatsächlich beobachtet, wie anhand des zonalen Mittels der horizontalen Windgeschwindigkeit in Abb. 11.21 ersichtlich ist. Man erkennt auch die Ausbildung eines Windmaximums in etwa 10 km Höhe, welches als *Strahlstrom* oder im englischen Sprachgebrauch *Jet Stream* bezeichnet wird. Hier können die Windgeschwindigkeiten 100–300 km/h betragen, eine Tatsache, die in der Luftfahrt ausgenutzt wird.

In den Bereichen zwischen dem Äquator und etwa 30° Breite beobachtet man aufgrund der bodennahen Luftdruckgegensätze (äquatoriale Tiefdruckrinne – Subtropenhoch) entsprechend der geostrophischen Windbeziehung Gl. (11.11) Ostwinde. Diese bilden zusammen mit dem unteren Teil der *Hadley-Zirkulation* die

Passatwinde (Abb. 11.20), die als beständigste Windsysteme der Atmosphäre gelten und eine große Rolle bei Seefahrern früherer Zeiten spielten.

In den mittleren Breiten ist die großräumige atmosphärische Dynamik durch die Bildung und den Zerfall von Tiefdruckgebieten (Zyklonen) sowie Hochdruckgebieten (Antizyklonen) geprägt. Wie in Abschn. 2.5 bereits beschrieben, entstehen die Tiefdruckgebiete durch die *barokline Instabilität* der Grundströmung in der Westwindzone. Diese setzt das Überschreiten eines kritischen horizontalen Temperaturgradienten voraus, wie es häufig in den mittleren Breiten der Fall ist. Diese Zyklone bestimmen mit ihren Wolken und Niederschlagsgebieten praktisch das Wettergeschehen in unseren Breiten.

Etwas vereinfachend kann man feststellen, dass die globale atmosphärische Zirkulation einen Temperaturausgleich zwischen polaren und äquatorialen Gebieten der Atmosphäre herstellt. Wegen der Kugelgestalt der Erde und der damit ungleichen Verteilung der solaren Einstrahlung kann aber dieser Temperaturausgleich nicht vollständig stattfinden. Die globalen Luftströmungen bewirken aber, dass der Temperaturunterschied zwischen niederen und hohen Breiten wesentlich moderater ausfällt als dies aufgrund der reinen Strahlungsbilanz der Fall wäre.

Die oben gemachten Ausführungen lassen sich in einem einfachen Schema der globalen atmosphärischen Zirkulation zusammenfassen, wie es in Abb. 11.20 dargestellt ist. Ausführliche Beschreibungen der globalen Zirkulation findet man z. B. in den Monographien von Grotjahn 1993 sowie von Peixoto, Oort (1992) und Satoh (2012).

3 Strömungen im Ozean

In Abschn. 1 wurden verschiedene Aspekte behandelt, die den Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean gemeinsam sind. Dies waren z. B. die geostrophische Strömung (Abschn. 1.3), Rossby-Wellen (Abschn. 1.4) und Ekman-Schicht (Abschn. 1.5). Diese Strömungsformen sollen daher im Folgenden nicht weiter behandelt werden. Obwohl die grundlegende Strömungsmechanik für beide Medien die Gleiche ist, gibt es aber einige Unterschiede, welche spezielle Strömungsverhältnisse im Ozean verursachen. Ein Hauptunterschied liegt darin begründet, dass die Luft praktisch keinen seitlichen Rändern unterliegt, sie kann ohne weiteres um den Globus herumströmen. Die Weltozeane sind aber durch die Landmassen in ihrer lateralen Bewegungsmöglichkeit eingeengt. Dies hat zur Folge, dass die großräumige ozeanische Zirkulation sich in großen antizyklonalen Wirbeln in den jeweiligen Becken (z. B. Nordatlantik) anordnet (Abb. 11.22).

Ein weiterer Unterschied ist die freie, bewegliche Meeresoberfläche, welche den oberen Rand der Ozeane bildet. Dadurch kann die darüber liegende Atmosphäre über die Windschubspannung eine Kraft auf die Wasseroberfläche ausüben und so als Hauptantrieb für die Meeresströmungen wirken. Hinsichtlich der Vertikalstruktur ist zu bemerken, dass die Wasserdichte ρ nicht nur durch Druck p und Temperatur T bestimmt wird wie in der Atmosphäre, sondern darüber hinaus der Salzgehalt c des Wassers einen großen Einfluss auf die Wasserdichte hat.

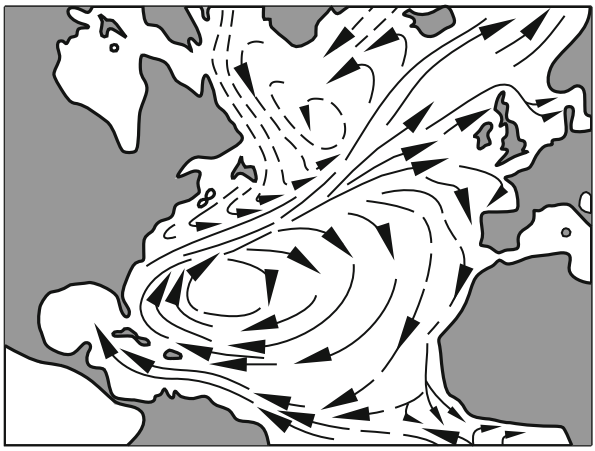


Abb. 11.22 Beobachtete mittlere oberflächennahe Strömungsverhältnisse im Atlantischen Ozean. Durchgezogene Linien: Warme Meeresströmung, gestrichelt: Kalte Meeresströmung

Im Folgenden wird nur ein kurzer Einblick in die Ozeanströmungen gegeben. Von den zahlreichen Monographien zur Ozeanographie seien hier lediglich diejenigen von Huang (2009), Pedlosky (1996) sowie Olbers, Willebrand und Eden (2012) aufgeführt, in denen vorrangig der dynamische Aspekt der Meeresströmungen behandelt wird.

3.1 Windgetriebene Strömungen

In Abschn. 1.6 über die bodennahe atmosphärische Grenzschicht (Prandtl-Schicht) wird erläutert, dass der Wind auf die Erdoberfläche eine Tangentialkraft ausübt, welche auf die Flächeneinheit bezogen als Tangentialspannung oder Schubspannung bezeichnet wird. Aus Messungen hat sich ergeben, dass die Schubspannung (siehe Gl. (11.37)), in Richtung des bodennahen Windes wirkt und vom Betrag her dem Quadrat der Windgeschwindigkeit proportional ist:

$$\tau = \rho \cdot c_{\mathrm{w}} \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \boldsymbol{v}. \tag{11.56}$$

Der Koeffizienten c_{w} ist der *Widerstandsbeiwert*. Ein typischer Wert ist etwa $c_{\mathrm{w}} \approx 1.5 \cdot 10^{-3}$. Die Bodenschubspannung Gl. (11.56) wirkt auch auf die Meeresoberfläche und da letztere beweglich ist, wird eine oberflächennahe Meeresströmung erzeugt. Im einfachen Fall horizontal homogener Verhältnisse ergibt sich eine Ekman-Spirale entsprechend Gl. (11.35) und (11.36) (siehe Abschn. 1.5), wobei die Strömung an der Meeresoberfläche um 45° nach rechts von der Richtung der Bodenschubspannung τ_w bzw. des Bodenwindes $\boldsymbol{v}$ zeigte. Im realen Ozean ist dieser Winkel allerdings wesentlich geringer. Er liegt bei etwa 20°. Verlässt man diese lokale Betrachtungsweise und fragt, wie die oberflächennahen Meeresströmungen in ihrer räumlichen Verteilung beschaffen sind, so muss gemäß Gl. (11.35), (11.36) und (11.56) die großräumige Windverteilung als Antrieb berücksichtigt werden.

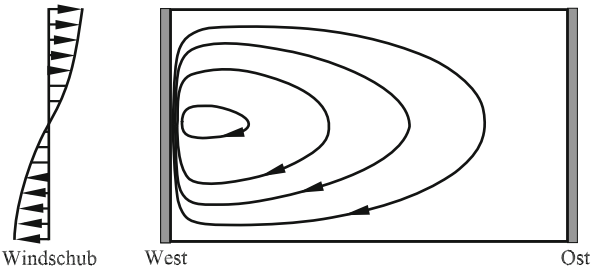


Abb. 11.23 Schematische Darstellung des zonalen Windschubs und der daraus in einem Ozeanbecken entstehenden Oberflächenströmung

Betrachtet man den großräumigen mittleren Zustand von Atmosphäre und Ozean, so wird in Abschn. 2.5 dargelegt, dass etwa zwischen den Äquatorregionen und 30° N/S die Passatwinde aus östlichen Richtungen vorherrschen, während zwischen 30° und etwa 70° die Zyklonen mit vorwiegend westlichen Winden dominieren. Somit wirkt vereinfacht dargestellt, in den niederen geographischen Breiten eine Windschubspannung in westliche Richtung und in höheren Breiten in östlicher Richtung. Dies ist in Abb. 11.23 dargestellt. Entsprechend werden sich Meeresströmungen von Ost nach West bzw. in umgekehrter Richtung entwickeln.

Wie bereits in der Einführung bemerkt, sind die Ozeane durch die in Nord-Süd Richtung verlaufenden Kontinente in ihrer zonalen Erstreckung behindert. Einer Ostküste werden demnach in niederen Breiten immer Wassermassen zugeführt und in höheren Breiten entzogen. Aus Kontinuitätsgründen muss sich daher an Ostküsten eine Strömung von Süd nach Nord einstellen. An der Westküste ist dies genau umgekehrt. Im Idealfall bewirkt die Windschubspannung somit in den jeweiligen Ozeanbecken eine geschlossene antizyklonale Zirkulation, wie in Abb. 11.23 schematisch dargestellt ist.

Auffallend ist, dass sich die Stromlinien im Westen des Beckens (also an einer Ostküste) stärker drängen als im Osten. Somit findet man am westlichen Beckenrand eine stärkere Meeresströmung nach Norden als sie am östlichen Rand nach Süden zeigt. Die genauere theoretische Erklärung für dieses zunächst ungewöhnlich erscheinende Ergebnis findet man z. B. in den erwähnten Monographien von Pedlosky (1996) sowie Olbers; Willebrand und Eden (2012). Vereinfacht dargestellt, befindet sich die oberflächennahe Meeresströmung im Gleichgewicht zwischen Reibungskraft und Coriolis-Kraft. Es ist entsprechend Gl. (11.6) die Coriolis-Kraft das Produkt von Coriolis-Parameter f und Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$. Der Coriolis-Parameter ändert sich aber mit der geographischen Breite. Für Wassermassen, welche mit einer Strömung von Süd nach Nord transportiert werden, nimmt die Coriolis-Kraft nach Norden hin zu. Im Gleichgewicht muss auch die Reibungskraft zunehmen. Da letztere proportional zur Geschwindigkeitsscherung ist, muss der zonale Gradient der Meridionalgeschwindigkeit $(\partial v/\partial x)$ zunehmen. Im Fall einer Strömung von Nord nach Süd ist dies genau umgekehrt. Im Endergebnis findet man also im westlichen Teil einer windgetriebenen Ozeanzirkulation eine starke Geschwindigkeitsscherung, im östlichen Teil eine geringe Scherung, wie in Abb. 11.23 zu ersehen ist. Diese theoretische Erklärung der idealisierten Ozeanzirkulation findet sich aber auch im realen Ozean wieder, wie anhand des Nordatlantiks in

Abb. 11.22 dargestellt ist. Die starke Meeresströmung an der Ostküste der USA ist unter dem Namen *Golfstrom* bekannt (siehe auch Abb. 11 in Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik).

Da die großräumigen ozeanischen Wirbel eine große meridionale Erstreckung haben, umfassen sie Wassermassen unterschiedlicher Temperaturen – warm im Süden – kalt im Norden. Die durch den Wind angetriebenen Meeresströmungen transportieren somit warmes Wasser im westlichen Bereich nach Norden und kälteres Wasser im östlichen Teil nach Süden, wie in Abb. 11.22 zu erkennen ist. Dies hat überaus große Auswirkungen auf das Klimasystem unserer Erde. Vergleicht man einmal die Lufttemperaturen im Januar entlang des 60. Breitengrades, so betragen diese z. B. in Irland $+6°\,\mathrm{C}$, im Bereich von Labrador aber $-10°\,\mathrm{C}$. Das milde Winterklima Westeuropas verdanken wir also der warmen Meeresströmung des *Golfstromes*.

3.2 Wasserwellen

Wie die Atmosphäre, ist auch der Ozean ein schwingungsfähiges Medium in dem die verschiedensten Arten von Wellen vorkommen (*J. Pedlosky* 2003). Auf der großräumigen Skala sind in Abschn. 1.4 bereits die *Rossby-Wellen* behandelt worden, die sich auf Grund der Breitenkreisabhängigkeit des Coriolis-Parameters einstellen (β-Effekt). Die dort aufgestellte Dispersionsbeziehung Gl. (11.19) $c = \overline{u} - \beta/a^2$ gilt demzufolge sowohl für die Atmosphäre als auch für den Ozean. Auf die Rossby Wellen soll daher hier nicht weiter eingegangen werden.

Für den Fall einer stabil geschichteten Atmosphäre sind in Abschn. 2.4 die *Schwerewellen* beschrieben worden. Nun sind die Ozeane ähnlich wie die Atmosphäre in weiten Bereichen ebenfalls stabil geschichtet, so dass die Wirkung der Auftriebskräfte zur Ausbildung von internen Schwerewellen führt. Die formale Behandlung dieser Wellen erfolgt für den Ozean ebenfalls mit der bereits für atmosphärische Schwerewellen aufgestellten Gl. (11.48). Lediglich in der *Brunt-Väisälä-Frequenz* N (Gl. (11.46)) muss im Ozean der vertikale Dichtegradient eingesetzt werden, der außer durch Druck und Temperatur noch durch den Salzgehalt bestimmt wird. Die Dispersionsbeziehung für ozeanische Schwerewellen ist somit identisch zu Gl. (11.51). Für den Wert der Brunt-Väisälä Frequenz ergibt sich für den Ozean typischerweise $N \approx 0.5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$ und somit eine Schwingungsdauer von etwa 30 Minuten.

Weder Rossby-Wellen noch interne Schwerewellen sind üblicherweise dem normalen Beobachter der Ozeane zugänglich. Die Wellen auf der Meeresoberfläche, eine der geläufigsten Bewegungsformen des Ozeans überhaupt, sind aber jedem bekannt. Auf diese *Oberflächenwellen* soll im Folgenden näher eingegangen werden.

Die Herleitung einer Dispersionsbeziehung für lineare Oberflächenwellen sei hier kurz angedeutet. Die Wassermasse wird als inkompressibel und rotationsfrei angenommen, d. h. es gilt $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ und $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$. Die Wellen können somit durch eine Potentialströmung beschrieben werden, der die Beziehungen $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ und $\nabla^2\phi = \Delta\phi = 0$ für das Geschwindigkeitspotential ϕ zu Grunde liegen.

Im Unterschied zur klassischen Potentialtheorie (siehe Abschn. 5 des Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit) besteht der Oberrand des Fluids aus einer beweglichen Oberfläche, deren Höhe variabel ist, d. h. $\eta(x, y, z, t)$. Für diese wird z. B. im vereinfachten zweidimensionalen Fall ein Wellenansatz der Form

$$\eta(x, t) = \eta_0 \cdot \cos(a \cdot (x - c \cdot t))$$

gemacht (Wellenzahl $a = 2 \cdot \pi/\lambda$, Phasengeschwindigkeit c). Mit den Randbedingungen

$$w(\eta) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}, \qquad w(z = -h) = 0$$

und der Tiefe des Meeresbodens h ergibt sich aus den linearisierten reibungsfreien Bewegungsgleichungen (11.6) unter Vernachlässigung der Coriolis-Kraft als Beziehung für die Phasengeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{\frac{g}{a} \cdot \tanh(a \cdot h)}. \tag{11.57}$$

Die Phasengeschwindigkeit der Wasserwellen hängt offensichtlich von der Wellenlänge ($\lambda = 2 \cdot \pi/a$) sowie der Wassertiefe h ab. Je nach den Werten von λ und h lassen sich die folgenden vereinfachten Grenzfälle $h/\lambda > 0.5$ und $h/\lambda \leq 0.05$ angeben.

Für

$$h/\lambda > 0.5 \rightarrow \tanh(a \cdot h) \approx 1$$

ergibt sich aus Gl. (11.57):

$$c = \sqrt{\frac{g}{a}} = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}}. \tag{11.58}$$

Wegen der Bedingung $h/\lambda \geq 1$ werden diese Wellen *kurze Wellen* oder auch *Tiefwasserwellen* genannt. Gemeint ist dabei nicht, dass die Wassertiefe h an sich groß ist, sondern lediglich diese größer als die Wellenlänge λ sein muss. Die Tiefwasserwellen verhalten sich dispersiv. Entsprechend Gl. (11.58) laufen lange Wellen schneller als kurze. Dies führt zum Beispiel dazu, dass man aus dem Auftreten von Dünung am Strand auf die Windanregung von Wasserwellen durch einen Sturm schließen kann, der sich noch außerhalb der Landgebiete befindet. Einige Zahlenbeispiele für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Tiefwasserwellen:

$$\lambda = 10\,\mathrm{m} \rightarrow c \approx 4\,\mathrm{m/s},$$
$$\lambda = 100\,\mathrm{m} \rightarrow c \approx 12\,\mathrm{m/s}.$$

Für

$$h/\lambda \leq 0.05 \rightarrow \tanh(a \cdot h) \approx a \cdot h$$

ergibt sich aus Gl. (11.57):

$$c = \sqrt{g \cdot h}. \tag{11.59}$$

Diese Wellen werden wegen $h/\lambda \ll 1$ als *lange Wellen* oder *Flachwasserwellen* bezeichnet. Im Gegensatz zu den Tiefwasserwellen sind diese nicht dispersiv, die Phasengeschwindigkeit hängt lediglich von der Wassertiefe ab. Beispiele:

$$\begin{aligned} h &= 10\,\mathrm{m} \quad\;\; , \lambda = 200\,\mathrm{m} \rightarrow c \approx 10\,\mathrm{m/s}, \\ h &= 1000\,\mathrm{m}\ , \lambda = 20\,\mathrm{km} \rightarrow c \approx 200\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

Im freien Ozean (große Wassertiefen) beschreibt die Beziehung Gl. (11.59) die Phasengeschwindigkeit für sehr lange Wellen, die etwa durch Seebeben verursacht werden (Tsunamis).

Neben der Phasengeschwindigkeit Gl. (11.57) liefert die Lösung der Potentialgleichung auch das Geschwindigkeitsfeld im Wasser, welches durch die Oberflächenwellen induziert wird. Die genauen analytischen Lösungen findet man z. B. in J. Lighthill 1987. An dieser Stelle sei lediglich die Orbitalbewegungen der Wasserpartikel skizziert (Abb. 11.24), die sich aus den Geschwindigkeitsfeldern ergeben.

Die oben beschriebenen Wasserwellen ergeben sich für den idealisierten Fall einer reibungsfreien Flüssigkeit. Lässt man insbesondere als weitere Kraft die Oberflächenspannung zu, so dominiert diese im Fall sehr kurzer Wellen (etwa $\lambda < 0.2\,\mathrm{m}$) gegenüber der Schwerkraft. Diese, als kleine Rippel auf der Wasseroberfläche sichtbaren Wellen nennt man auch Kapillarwellen.

Dem Beobachter stellt sich die reale Meeresoberfläche allerdings selten in Form einer harmonischen Welle mit einer festen Wellenlänge dar. Vielmehr beobachtet man die Überlagerung vieler Wellen unterschiedlicher Amplitude, Wellenlänge und

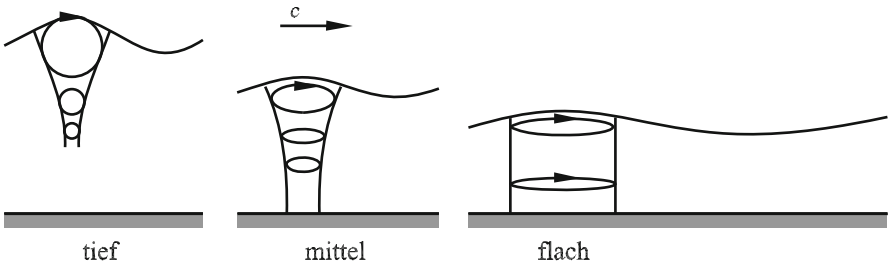


Abb. 11.24 Wellen an der Meeresoberfläche und resultierende Orbitalbewegungen von Wasserpartikeln für verschiedene Wassertiefen, Phasengeschwindigkeit c

Abb. 11.25 Wasserwellen an der Meeresoberfläche. (Quelle: F. Krügler)

Phase (Abb. 11.25). Auf dieses so genannte *Seegangsspektrum* soll hier nicht näher eingegangen werden. Es wird auf die weiterführende Literatur über Wasserwellen (z. B. Lighthill 1987; Young 1999) hingewiesen.

4 Anwendungen der Gesetzmäßigkeiten für Strömungen in der Atmosphäre und im Ozean

Neben den beschriebenen strömungsmechanischen Phänomenen in der Atmosphäre und im Ozean hat in jüngster Zeit die Problematik der Wettervorhersage, der anthropogenen Klimaänderung und des Ozonabbaus (Ozonloch) an Bedeutung gewonnen. Um diesem Rechnung zu tragen, ist neben den eigentlichen strömungsmechanischen Themen diesen Langzeit-Problemen ein kurzes Kapitel gewidmet.

4.1 Wettervorhersage

Auch Nichtfachleute auf dem Gebiet der Strömungsmechanik werden mit atmosphärischen Strömungen praktisch täglich über die Wetterberichte in den Medien konfrontiert. Im Vordergrund der Wettervorhersage steht die zeitliche Entwicklung der Lufttemperatur und des Luftdrucks sowie von Wolken und Niederschlag. Als strömungsmechanische Komponente tritt die Vorhersage von Windstärke und Windrichtung hinzu.

Die Wettervorhersage hat sich in den letzten 100 Jahren von einer eher empirischen Vorgehensweise hin zur Anwendung mathematisch-physikalischer Methoden entwickelt, welche auf den dynamischen und thermodynamischen Gesetzen der Strömungsmechanik beruhen. Als Grundlage dienen dabei die Gleichungen wie sie bereits in Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik aufgestellt worden sind. Diese Gleichungen lauten in einer zur Beschreibung der Strömungen in Atmosphäre und Ozean üblichen Form wie folgt:

lokale zeitl. Änderung	Advektion	Kräfte/Quellen	Diffusion	
$\rho \cdot \partial \boldsymbol{v}/\partial t$	$+\rho \cdot \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$	$= \boldsymbol{f}_{\mathrm{i}}$	$+ \quad K_\mu \cdot \nabla^2 \boldsymbol{v},$	(11.60)
$\partial \rho/\partial t$	$+\boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho$	$= Q_\rho$	,	(11.61)
$\partial T/\partial t$	$+\boldsymbol{v} \cdot \nabla T$	$= Q_T$	$+ \quad K_T \cdot \nabla^2 T,$	(11.62)
$\partial q_{\mathrm{i}}/\partial t$	$+\boldsymbol{v} \cdot \nabla q_{\mathrm{i}}$	$= Q_{q_{\mathrm{i}}}$	$+ \quad K_q \cdot \nabla^2 q_{\mathrm{i}},$	(11.63)
$\partial c_{\mathrm{n}}/\partial t$	$+\boldsymbol{v} \cdot \nabla c_{\mathrm{n}}$	$= Q_{c_{\mathrm{n}}}$	$+ \quad K_c \cdot \nabla^2 c_{\mathrm{n}},$	(11.64)

mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{f}_{\mathrm{i}} = -\rho \cdot f \cdot \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v} - \nabla p - \rho \cdot \nabla \phi$ in der *Bewegungsgleichung* (11.60), der Dichte ρ und $Q_\rho = -\rho \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{v}$ für ein kompressibles Medium in der *Kontinuitätsgleichung* (11.61), der Temperatur T und Wärmequellen und -senken Q_T (z. B. adiabate Kompression ($Q = (1/(\rho \cdot c_p)) \cdot \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$), Divergenz von lang- und kurzwelligen Strahlungsströmen, Phasenumwandlung von Wasser (latente Wärme)) in der *Gleichung für die innere Energie* Gl. (11.62), den Phasen Wasserdampf q_1, Flüssigwasser q_2 und Eis q_3 und den Phasenumwandlungen Q_q (z. B. Kondensation, Verdunstung, Gefrieren) in der *Bilanzgleichung für die Wasserphasen* q_{i} Gl. (11.63) und den Gasen z. B. $c_1 = \mathrm{CO}_2$, $c_2 = \mathrm{NO}$, $c_3 = \mathrm{O}_3$ usw., dem Salzgehalt c im Ozean und den Quellen und Senken sowie chemische Umwandlungen von Spurenstoffen Q_c in der *Bilanzgleichung für Inhaltsstoffe* c_{n} ($\mathrm{n} = 1, 2, 3, \cdots$) Gl. (11.64). Im Diffusionsterm der Gleichungen bedeuten K_μ, K_T, K_q, K_c die turbulenten Diffusionskoeffizienten für die jeweilige Strömungseigenschaft. Die thermodynamischen Variablen Druck p, Dichte ρ und Temperatur T sind noch über Zustandsgleichungen verknüpft. Für die Atmosphäre gilt $p = R \cdot \rho \cdot T$ und im Ozean $\rho = \rho(p, T, c)$ mit dem Salzgehalt c.

Neben der Bewegungsgleichung (11.60), der Kontinuitätsgleichung (11.61) und der Energiegleichung (11.62) treten noch Transportgleichungen für Wasserdampf und Flüssigwasser (Wolken- und Regentropfen) Gl. (11.63) sowie für atmosphärische Spurenstoffe Gl. (11.64) hinzu. Aus der Struktur der Gleichungen ist ersichtlich, dass atmosphärische Strömungen Luftbeimengungen sowohl durch den großräumigen Wind (Advektion) als auch durch kleinräumige Turbulenz (Diffusion) verbreiten.

Mit den Gleichungen (11.60)–(11.64) lässt sich prinzipiell die zeitliche Entwicklung der Variablen Wind, Temperatur und Niederschlag im Raum bei Kenntnis der Anfangswerte vorhersagen. Die Anfangswerte müssen in der Praxis dazu aus zeitgleichen, weltweiten Messungen der atmosphärischen Variablen gewonnen

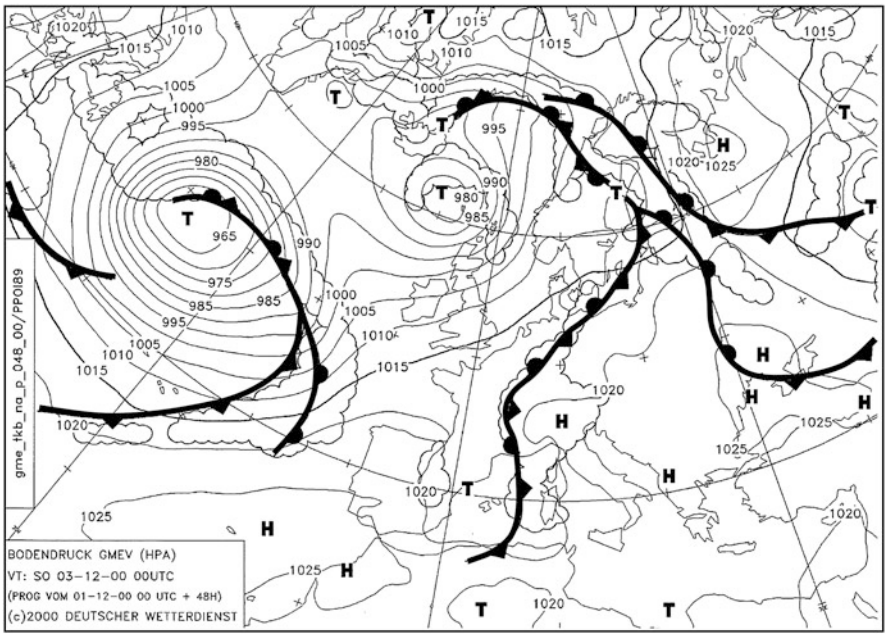


Abb. 11.26 Beispiel für eine 48-stündige Bodendruckvorhersage für den Bereich Atlantik-Mitteleuropa

werden. Die Lösung der Gleichungen kann wegen ihrer Nichtlinearität allerdings nicht auf analytischem Wege gewonnen werden. Statt dessen kommen numerische Lösungsverfahren zur Anwendung, wie sie auch in anderen Bereichen der Strömungsmechanik üblich sind. In der Atmosphärenwissenschaft hat sich hierfür ein Spezialgebiet unter dem Begriff *numerische Wettervorhersage* etabliert, in welchem die Gleichungen (11.60)–(11.64) mittels Methoden der numerischen Mathematik gelöst werden.

Tatsächlich basiert die heutige Wettervorhersage auf den Ergebnissen der numerischen Lösung der strömungsmechanischen Gleichungen (11.60)–(11.64). Als Beispiel ist die vorausberechnete Entwicklung des Luftdruckfeldes am Erdboden in Abb. 11.26 dargestellt. Die Beschreibung der Grundlagen der Wettervorhersage und Beispiele für die praktische Durchführung sind in den Monographien von Balzer et al. (1998) und Warner (2010) zu finden.

4.2 Treibhauseffekt und Klimavorhersage

Die Gleichungen (11.60)–(11.64) für das System Atmosphäre und Ozean lassen sich im Prinzip auch über längere Zeiträume in die Zukunft integrieren sowie dies für deren Anwendung auf die Wettervorhersage über wenige Tage hinweg der Fall ist. Wegen der Nichtlinearität und des bekannten chaotischen Verhaltens

des Gleichungssystems sind Vorhersagen über längere Zeiträume nicht mehr exakt. Die Ergebnisse der numerischen Integration können dann nur noch als räumliche bzw. zeitliche Mittel für die verschiedenen Variablen (z. B. mittlere Lufttemperatur im Januar) interpretiert werden. Auf der Beobachtungsseite entspricht dies den mittleren Verhältnissen der Atmosphäre, welche man als *Klima* bezeichnet.

Die strömungsmechanischen Gleichungen (11.60)–(11.64) eignen sich somit für die Vorhersage des Klimas auf der Erde. In den jetzt zu betrachtenden Zeiträumen (Monate, Jahre, Jahrzehnte) dominieren die thermodynamischen Effekte in der Energiegleichung (11.62), besonders die Divergenzen kurz- und langwelliger Strahlungsflüsse. Letztere sind stark von der räumlichen und zeitlichen Verteilung von strahlungswirksamen Luftbeimengungen abhängig (z. B. Wasserdampf, Kohlendioxid). Die Transportgleichungen für diese Substanzen (Gl. (11.63) und (11.64)) gewinnen daher bei der Klimavorhersage an Bedeutung. Als Beispiel hierfür sei der so genannte *Treibhauseffekt* kurz erläutert, der in der Diskussion über eine künftige Klimaänderung eine große Rolle spielt.

In Abschn. 2.5 über die globale atmosphärische Zirkulation wurde ausgeführt, dass die Hauptursache der großräumigen Bewegungen in der unterschiedlichen Erwärmung der Erdoberfläche durch die kurzwellige solare Einstrahlung in verschiedenen geographischen Breiten zu sehen ist. Diese Luftströmungen bestimmen zusammen mit der Temperatur- und Wasserdampfverteilung das Klima auf unserer Erde. Die mittlere Temperatur der Erdoberfläche T_0 bestimmt sich im Fall ohne Atmosphäre aus dem Gleichgewicht zwischen solarer Einstrahlung S_o und langwelliger Schwarzkörperstrahlung $\sigma \cdot T_0^4$:

$$\frac{S_o}{4} \cdot (1 - \alpha) = \sigma \cdot T_0^4. \tag{11.65}$$

Hierbei ist $S_o = 1360\,\mathrm{W/m^2}$ die Solarkonstante, α die Albedo der Erde (Anteil der zurückgestrahlten Sonnenstrahlung) und $\sigma = 5.67 \cdot 10^8\,\mathrm{W/m^2/K^4}$ die Stefan-Boltzmann-Konstante.

Setzt man für die mittlere Albedo der Erde $\alpha = 0.3$, so erhält man aus Gl. (11.65) $T_0 \approx 255\,\mathrm{K}$, entsprechend $-18°\,\mathrm{C}$. Die beobachtete mittlere Lufttemperatur in Bodennähe beträgt aber etwa $+15°\,\mathrm{C}$ oder 288K. Dies kommt daher, dass die langwellige Strahlung nicht nur von Festkörpern (wie der Erdoberfläche) sondern auch von bestimmten Gasen ausgeht. Von den in der Erdatmosphäre vorhandenen Gasen sind besonders der Wasserdampf H_2O, das Kohlendioxid CO_2 und das Ozon O_3 als Absorber und Emittenten der langwelligen Strahlung bekannt. Diese Gase strahlen entsprechend ihrer Temperatur sowohl in Richtung Weltraum als auch in Gegenrichtung, d. h. zur Erdoberfläche. Dieser Anteil der langwelligen Strahlung wird auch als *Gegenstrahlung* bezeichnet. Sie vermindert dadurch die effektive langwellige Ausstrahlung der Erdoberfläche, so dass statt Gl. (11.65) gilt:

$$\frac{S_o}{4} \cdot (1 - \alpha) = \sigma \cdot T_0^4 - \lambda_g. \tag{11.66}$$

Mit λ_g ist die langwellige Gegenstrahlung der Atmosphäre symbolisiert. Im Endeffekt addiert sich diese Gegenstrahlung zur solaren Einstrahlung, so dass sich für Gl. (11.66) eine höhere Temperatur T_0 ergeben muss, als nach Gl. (11.65). Diese Wirkung der atmosphärischen Gegenstrahlung auf die globale Luftmitteltemperatur, die etwa +33° C ausmacht, nennt man auch den *Treibhauseffekt*. Tatsächlich ermöglichen somit die in der Atmosphäre vorhandenen Gase mit ihrer Strahlungswirkung erst ein für das Leben förderliches Klima.

Die anthropogene Änderung des Klimas kann in erster Linie über die Strahlung als Antrieb für die Energieumsetzungen im System Atmosphäre-Ozean-Erdkörper beschrieben werden. Werden zusätzliche Mengen der treibhauswirksamen Gase (z. B. CO_2, Methan) in die Atmosphäre gebracht und wird dort die langwellige atmosphärische Gegenstrahlung verstärkt (λ_g in Gl. (11.66)), wird entsprechend dem einfachen Strahlungsgleichgewicht Gl. (11.65) die mittlere globale bodennahe Temperatur T_0 ansteigen. Dieser Effekt der Treibhausgase wird teilweise kompensiert durch die Strahlungswirkung der Aerosole (kleine Tröpfchen und Partikel, z. B. Mineralstaub oder Vulkanasche, von wenigen μm Durchmesser). Diese reflektieren einen Teil der kurzwelligen solaren Strahlung, so dass quasi die Albedo α in Gl. (11.65) erhöht wird. Dadurch wird die bodennahe Lufttemperatur T_0 etwas reduziert. Trotz der abkühlenden Wirkung der Aerosole wird heute von einer Zunahme der globalen Lufttemperatur T_0 um etwa 1°–3° C in den nächsten 50 Jahren ausgegangen.

Zwei Aspekte sollen in diesem Kapitel herausgestellt werden, die Rolle der Atmosphäre als Transportmedium von Spurengasen und Aerosolen und die Abschätzung des anthropogenen Treibhauseffektes durch numerische Simulationsmodelle.

Betrachtet man als Beispiel das Treibhausgas CO_2, so wurde durch Verbrennung fossiler Brennstoffe seit dem Beginn der Industrialisierung zusätzlich (zum natürlich vorhandenen CO_2) Kohlendioxid in die Atmosphäre emittiert. Zunächst wird CO_2 von den bodennahen Quellen in die höheren Luftschichten gebracht und dort mit den großräumigen Luftströmungen mehr oder weniger gleichmäßig über die gesamte Atmosphäre verteilt (Abb. 11.27). Die formale Beschreibung von Transport und Diffusion von CO_2 (und anderen Treibhausgasen) in der Atmosphäre erfolgt z. B. durch Gl. (11.64). Die globale atmosphärische Zirkulation (siehe Abschn. 2.5) bewirkt also eine Durchmischung der Atmosphäre mit CO_2 und anderen freigesetzten strahlungswirksamen Spurengasen, welche zum Treibhauseffekt beitragen.

Als Beispiel für natürliche Einbringung von Aerosolen in die Atmosphäre seien Vulkanausbrüche genannt. Eines der größten Ereignisse in diesem Jahrhundert fand am 15. Juli 1991 beim Ausbruch des Mt. Pinatubo statt. Dieser, in den Philippinen (15.14° N, 120.35° O) gelegene, Vulkan schleuderte Schwefelaerosole bis in die untere Stratosphäre in Höhen zwischen 20 und 25 km. Dort breiteten sie sich mit den atmosphärischen Strömungen rasch um den Globus aus und waren einige Monate später über die gesamte Nordhemisphäre und sogar in Gebieten südlich des Äquators verteilt. Die Ausbreitung der Vulkanaerosole wurde mit einem globalen Transportmodell berechnet, das die Gleichungen (11.60)–(11.64) verwendete (Timmreck et al. 1999). Die berechnete Aerosolkonzentration in einer Höhe von etwa 20 km ist für den Zeitpunkt 15.11.91, also fünf Monate nach

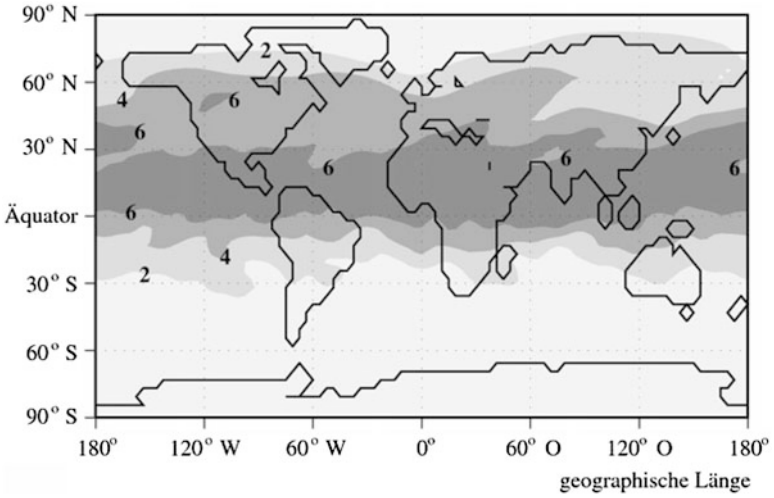


Abb. 11.27 Berechnete globale Konzentrationsverteilung von Aerosol (in $\mu g/m^3$) in 20 km Höhe für den 15. November 1991, 5 Monate nach dem Ausbruch des Vulkans Mt. Pinatubo

dem Vulkanausbruch, in Abb. 11.27 dargestellt. Entsprechend der zuvor erwähnten Strahlungseigenschaften der Aerosole (Reflexion der Solarstrahlung) kam es tatsächlich in den 1–2 Jahren nach dem Vulkanausbruch zur Erniedrigung der bodennahen Lufttemperatur in der Nordhemisphäre um etwa 0.5° C.

Über die Auswirkungen des Treibhauseffektes auf die globalen Strömungen in der Atmosphäre und auch im Ozean können die Gleichungen (11.60)–(11.64) der geophysikalischen Strömungsmechanik Auskunft geben. In der Energiegleichung treten als Wärmequellen unter anderem die Divergenzen der kurzwelligen und langwelligen Strahlungsströme auf, deren Effekt wiederum von Konzentration und räumlicher Verteilung der Spurengase und Aerosole abhängen. Bei Kenntnis der letzteren lassen sich Aussagen über die globale Temperaturverteilung und somit über die durch Temperaturgradienten verursachten Luftströmungen machen.

Wie in Abschn. 4.1 zur Wettervorhersage bereits ausgeführt wurde, können die Gleichungen für das System Atmosphäre-Ozean nur auf numerischem Wege gelöst werden. Die Prognose zukünftiger Klimaänderungen, bedingt durch den anthropogenen Treibhauseffekt, kann daher konsequenterweise nur über eine Diskretisierung der Gleichungen (11.60)–(11.64) und anschließender Lösung des Anfangs- und Randwertproblems mittels numerischer Verfahren erfolgen.

Als Beispiel für die Ergebnisse solcher Klimamodelle ist die zeitliche Änderung der global gemittelten bodennahen Lufttemperatur auf Grund der anthropogenen Zunahme von Treibhausgasen und Aerosolen in Abb. 11.28 dargestellt. Mit den gekoppelten Modellen von Atmosphäre und Ozean des Max-Planck-Instituts für Meteorologie in Hamburg wurden zwei Szenarien durchgerechnet (Roeckner et al. (1999)). In einem Fall **G** wurde nur der natürliche und anthropogene Eintrag von Treibhausgasen berücksichtigt. In einem zweiten Fall **G+A** wurde zusätzlich

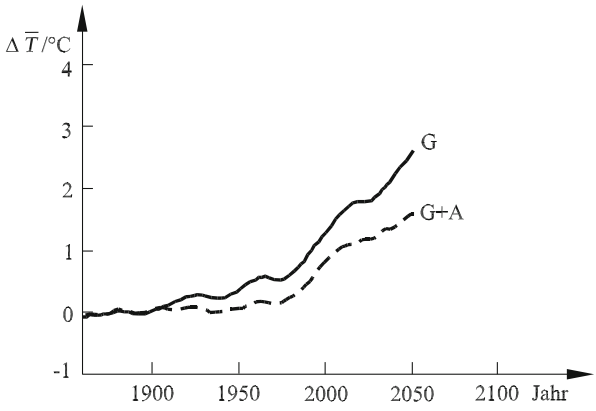


Abb. 11.28 Mit einem Klimamodell berechnete zeitliche Änderung der global gemittelten bodennahen Lufttemperatur gegenüber einer Atmosphäre ohne anthropogene Belastung mit Treibhausgasen und Aerosolen. Simulation **G** nur Treibhausgase, Simulation **G+A** Treibhausgase und Aerosole

die Strahlungswirkung der natürlichen und anthropogenen Aerosole berechnet. Die Ergebnisse sind als Differenz der Lufttemperatur zu einer Klimasimulation unter konstant gehaltenen Konzentrationen von Treibhausgasen und Aerosolen in Abb. 11.28 dargestellt. Man erkennt einen anthropogen bedingten Anstieg der globalen Lufttemperatur um etwa 2.6° C in den nächsten 50 Jahren für den Fall des reinen Treibhauseffektes. Dieser Temperaturanstieg reduziert sich bei Berücksichtigung der anthropogenen Emissionen von Aerosolen (meist Schwefelverbindungen) auf 1.6° C. Die heute aktuellen Klimamodelle umfassen aber nicht nur die Vorgänge in der Atmosphäre und im Ozean sondern berücksichtigen auch den Einfluss der Eisgebiete (Kryosphäre), der Landoberflächen (Lithosphäre) und der Pflanzenwelt (Biosphäre) auf die Entwicklung des globalen und lokalen Klimas. Darüber hinaus sind Prognosen der zukünftigen Entwicklung der Treibhausgas-Emissionen notwendig, um den Strahlungsantrieb für langfristige Klimasimulationen zu erhalten. Man spricht daher heute auch von Erdsystem-Modellierung als einer Erweiterung der Klimamodellierung. Diese geht weit über die reinen strömungsmechanischen Aspekte der Vorgänge in der Atmosphäre und im Ozean hinaus, ist jedoch zur Beschreibung des komplexen Klimasystems notwendig. Der aktuelle Stand der Erdsystem-Modellierung ist im umfangreichen Bericht *Climate Change 2013 - The Physical Science Basis* des Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC) dargelegt. Dieser Bericht und seine stark verkürzte Zusammenfassung unter dem Titel *Climate Change 2014, Synthesis Report - Summary for Policymakers* sind auf der Homepage des IPCC unter www.ipcc.ch frei verfügbar. In der Kurzfassung sind unter anderem auch Prognosen der künftigen Entwicklung der globalen Lufttemperatur, ähnlich wie in Abb. 11.28, sowie Darstellungen der regionalen Entwicklung des Klimas in den nächsten Jahrzehnten zu finden.

Aus den äußerst zahlreichen Publikationen zur Klimaproblematik seien lediglich zu den Grundlagen von Klima und Klimaänderungen die Monographie von Houghton 2015 und der Bericht des *Intergovernmental Panel on Climate Change* (IPCC) 2014 genannt. In Letzterem sind auch Ergebnisse von Rechnungen mit Klimamodellen veröffentlicht. Die Prinzipien der Modellierung der

verschiedenen Teile des Klimasystems (Atmosphäre, Ozean, Biosphäre usw.) sind in Trenberth (2010); Neelin (2011) und Stocker (2011) dargestellt.

4.3 Ozonloch

Neben dem *Treibhauseffekt* spielt das *Ozonloch* bei der globalen Klimaveränderung eine Rolle. Dabei handelt es sich um ein Phänomen in der *Stratosphäre* über dem Nord- und Südpol. Dort tritt die Situation ein, dass beim Übergang vom Winter in das Frühjahr ein deutlicher Rückgang der Konzentration des Gases Ozon (O_3) in Höhenbereichen zwischen 20 und 30 km stattfindet. Es handelt sich dabei nicht um ein Loch im Sinne eines völligen Verschwindens von Ozon, jedoch fällt der Rückgang über dem Südpol von typischerweise 400 DU (*Dobson-Einheiten*, ein Maß für den Gesamtozongehalt einer Luftsäule) im Jahr 1979 auf 180 DU zu 1992 sehr deutlich aus. Mit Ozonloch wird dabei das mehr oder weniger kreisförmige Gebiet mit stark verminderter Ozonkonzentration um den Südpol bezeichnet (Abb. 11.29).

Im Bereich der unteren und mittleren Stratosphäre befindet sich zwischen 15 und 30 km Höhe eine Schicht mit maximaler Ozonkonzentration. Wegen der Absorptionsfähigkeit des Ozon für kurzwellige Solarstrahlung (ultra-violett (UV)-Strahlung) schützt diese Ozonschicht das Leben auf der Erde vor den schädlichen UV-Strahlen. Das Ozon O_3 bildet sich dabei aus dem molekularen O_2 und atomaren Sauerstoff O über die Absorption ultravioletter Solarstrahlung mit Wellenlängen kleiner 242 nm.

Das Ozon wiederum wird durch kurzwellige solare Strahlung von Wellenlängen kleiner 1200 nm zerstört und in molekularen und atomaren Sauerstoff aufgespalten.

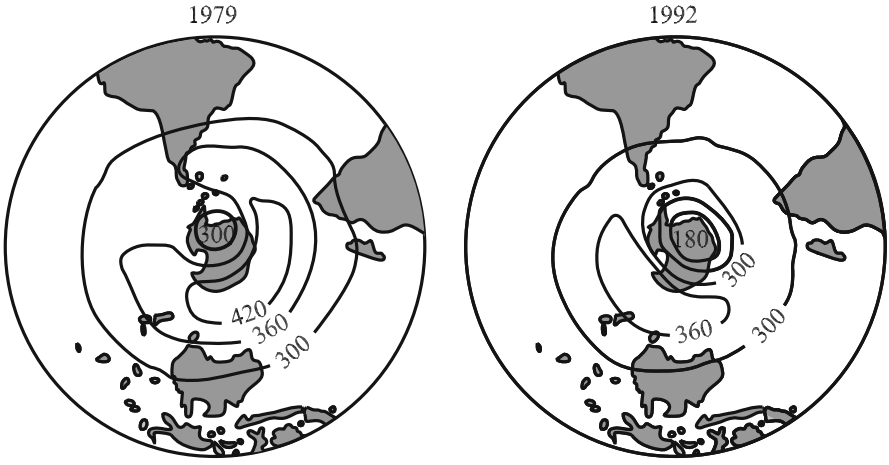


Abb. 11.29 Gesamtozongehalt der Atmosphäre in Dobson-Einheiten über der Südhemisphäre im Oktober 1979 und 1992

Insgesamt bilden diese Reaktionen ein photochemisches Gleichgewicht und stellen in der Summe also keinen Verlustmechanismus für Ozon dar. Dieser geschieht erst durch eine weitere katalytische Abbaureaktion:

$$X + O_3 \rightarrow O + O_2, \tag{11.67}$$

$$OX + O \rightarrow X + O_2. \tag{11.68}$$

Der Katalysator X (z. B. Chlor, Wasserstoff, Stickoxid) wird bei dieser Reaktion wieder frei und kann weiteres Ozon zerstören.

Der Abbau von Ozon in der polaren Stratosphäre ist auf solche katalytischen Reaktionen zurückzuführen. Hierbei scheinen besonders solche Stoffe eine Rolle zu spielen, die zum Teil anthropogen verursacht sind, z. B. Stickoxide (NO, NO_2), Wasserstoff-Radikale (OH, HO_2), Chlor Cl oder die Fluor-Chlor-Kohlenwasserstoffe (FCKW). In der Literatur findet man mehr als 30 verschiedene Reaktionsmechanismen, die zu einem Nettoabbau von Ozon in der Atmosphäre führen.

Der Bezug zu den vorangegangenen Kapiteln sind die Transportmechanismen, die die chemischen Substanzen in die mittlere Stratosphäre über der Antarktis bzw. den Nordpol transportieren. Mit den synoptischen Systemen (Tiefdruckgebieten) und über die Hadley-Zirkulation werden die Stoffe mehr oder weniger gleichmäßig über die Nordhemisphäre verteilt. Sie müssen dann noch die Barriere der Tropopause überwinden, welche den Vertikalaustausch stark behindert. Durch hochreichende thermische Konvektion in den Tropen sowie durch Fronten der Tiefdruckgebiete gelangt an einzelnen Stellen troposphärische Luft in die Stratosphäre (Abb. 11.30). Letztere zeichnet sich in ihrer Strömungseigenschaft durch mehr oder weniger breitenkreisparallele (zonale) Windsysteme aus, die eine Stoffverteilung in Ost-West-Richtung ermöglichen. Damit die anthropogenen Spurenstoffe aber in die polare Stratosphäre gelangen, ist eine Meridionalzirkulation notwendig. Eine solche existiert tatsächlich und wird nach ihren Entdeckern als *Brewer-Dobson-Zirkulation* bezeichnet. Das Schema der meridionalen Zirkulation in der Troposphäre und Stratosphäre ist in Abb. 11.30 dargestellt. Die Umlaufzeit dieser Zirkulation, also der Transport von Troposphärenluft zu den polaren Bereichen der Stratosphäre beträgt einige Monate. Es können also nur solche chemischen Stoffe zum Ozonabbau führen, die über eine lange Lebensdauer verfügen. Gerade die FCKW gehören mit Verweilzeiten von mehreren Jahren zu den Kandidaten. Obwohl der Ozonabbau ein rein foto-chemischer Vorgang ist, benötigt man zur Erklärung des Ozonlochs in der antarktischen Stratosphäre somit die atmosphärischen Transportwege.

Im Zusammenhang mit dem Ozonloch kommt noch ein weiterer strömungsmechanischer Effekt ins Spiel, auf den hier kurz eingegangen wird. Bei den Vorgängen zum Ozonabbau spielt die Lufttemperatur ebenfalls eine wichtige Rolle, besonders im Zusammenhang mit Reaktionen über den Wasserstoff. Eine möglichst niedrige Temperatur (z. B. $-90°$ C) begünstigt die Reaktionszeit verschiedener Prozesse, die in der Ozonchemie eine Rolle spielen. Die stratosphärische Luft

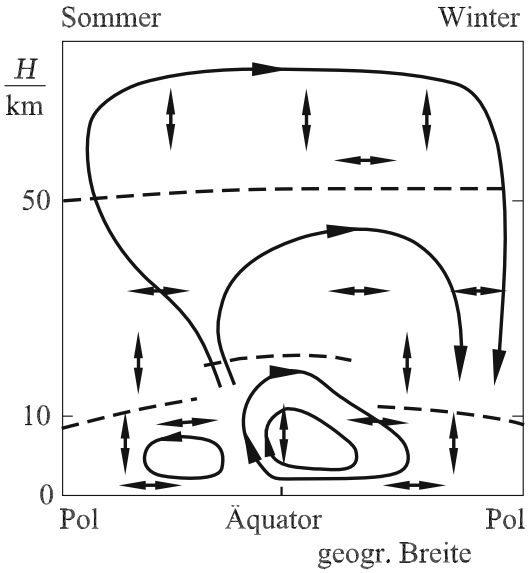


Abb. 11.30 Schematische Darstellung der meridionalen Zirkulationen in Troposphäre (∼0–10 km) und Stratosphäre (∼10–50 km) sowie der Haupttransportwege (dicke Pfeile) von atmosphärischen Spurenstoffen

über dem Südpol muss demzufolge Gelegenheit zur Abkühlung haben. Dies wird dadurch gewährleistet, dass diese nicht mit relativ warmer Luft aus den mittleren Breiten vermischt wird. Dies wird tatsächlich durch den sehr beständigen polaren zyklonalen Wirbel verhindert, der sich in den Wintermonaten über der Antarktis bildet. Dieser Wirbel ist gekennzeichnet durch hohe Werte potentieller Vorticity (siehe Abschn. 1.4). Neuere theoretische und numerische Studien haben ergeben, dass ein solcher Wirbel praktisch keine Einmischung von Luftmassen von außen (hier aus mittleren Breiten) zulässt. Man spricht von einer *Potentiellen-Vorticity-Barriere*. Diese Eigenschaft des Polarwirbels erklärt übrigens auch, warum das Ozonloch über dem Nordpol weniger deutlich in Erscheinung tritt als über dem Südpol. Der nordhemisphärische Polarwirbel ist variabler und dort vermischt sich Polarluft leichter mit Luft aus den mittleren Breiten.

Insgesamt kann man feststellen, dass der Ozonabbau in der polaren Stratosphäre ein foto-chemischer Prozess ist, der durch anthropogene Spurenstoffe verursacht wird. Ohne die verschiedenen Transportvorgänge in der Atmosphäre, von der kleinräumigen turbulenten Diffusion über hochreichende thermische Konvektion bis zur stratosphärischen Brewer-Dobson Zirkulation, welche die Stoffe erst zu ihrem Reaktionsort bringen und dem polaren stratosphärischen Wirbel, der im Winter diese Stoffe praktisch einschließt, würde der Ozonabbau erst gar nicht möglich gemacht.

Weitere Ausführungen zum Ozonloch findet man z. B. in den Monographien von Fabian (1992); Graedel und Crutzen (1994); Labitzke (1999) oder im Review Artikel von Solomon (1999).

Weiterführende Literatur

Atkinson, B.W.: Meso-scale Atmospheric Circulations. Academic, London (1981)
Atkinson, B.W., Zhang, J.W.: Mesoscale shallow convection in the atmosphere. Rev. Geophys. **34**, 403–432 (1996)
Balzer, K., Enke, W., Wehry, W.: Wettervorhersage: Mensch und Computer – Daten und Modelle. Springer, Berlin/Heidelberg (1998)
Brunt, D.: The period of simple vertical oscillations in the atmosphere. Q. J. R. Meteorol. Soc. **53**, 30–32 (1927)
Church, C., Burgess, D., Doswell, C., Davies-Jones, R.: The Tornado: Its Structure, Dynamics, Prediction and Hazards. Geophysical Monograph, Bd. 79. American Geophysical Union, Washington, DC (1993)
Cushman Roisin, B., Beckers, J.M.: Introduction to Geophysical Fluid Dynamics. Academic, London (2011)
Discovery Channel, (Hrsg.): Naturkatastrophen: Tornados, Hurricanes, Flut. VCL, München (1997)
Ekman, V.W.: On the Influence of the earth on ocean currents. Ark. Math. Astr. Fys. **2**(11), 1–52 (1905)
Elsner, J.B., Kara, A.B.: Hurricanes of the North Atlantic. Oxford University Press, Oxford (1999)
Emanuel, K.A.: Atmospheric Convection. Oxford University Press, Oxford (1994)
Emanuel, K.A.: Divine Wind. The History and Science of Hurricanes. Oxford University Press, Oxford (2005)
Ertel, H.: Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz. Meteorologische Zeitschrift **59**, 277–281 (1942)
Etling, D.: Theoretische Meteorologie. Springer, Berlin (2008)
Etling, D., Brown, R.A.: Vortices in the planetary boundary layer: a review. Bound. Layer Meteorol. **65**, 215–248 (1993)
Fabian, P.: Atmosphäre und Umwelt. Springer, Berlin/Heidelberg (1992)
Garratt, J.R.: The Atmospheric Boundary Layer. Cambridge University Press, Cambridge (1992)
Graedel, T.E., Crutzen, P.J.: Chemie der Atmosphäre. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1994)
Grotjahn, R.: Global Atmospheric Ciculations: Observations and Theory. Oxford University Press, Oxford (1993)
Häckel, H.: Meteorologie. Eugen Ulmer, Stuttgart (1999)
Houghton, J.: Global Change, 5th edn. Cambridge University Press, Cambridge (2015)
Huang, R.X.: Ocean Circulation. Cambridge University Press, Cambridge (2009)
IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change). (ed.): Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Cambridge University Press, Cambridge (2014)
Kaimal, J.C., Finnigan, J.J.: Atmospheric Boundary Layer Flows. Oxford University Press, Oxford (1994)
Kraus, H.: Die Atmosphäre der Erde. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (2000)
Kraus, H.: Grundlagen der Grenzschicht-Meteorologie. Springer, Berlin (2008)
Kraus, E.B., Businger, J.: Atmosphere-Ocean Interaction. Oxford University Press, Oxford (1994)
Labitzke, K.: Die Stratosphäre. Springer, Berlin/Heidelberg (1999)
Lighthill, J.: Waves in Fluids. Cambridge University Press, Cambridge (1987)
Markowsky, P., Richardson, Y.: Mesoscale Meteorology in Midlatitudes. John Wiley and Sons, Chichester (2010)
Monin, A.S., Obukhov, A.M.: Fundamental laws of turbulent exchange in the near-surface layer of the atmosphere. Trudy Geophys. Inst. Acad. Nauk SSSR **24**, 163–187 (1954)
Nappo, C.: An Introdution to Atmospheric Gravity Waves. Academic, London (2012)
Neelin, J.D.: Climate Change and Climate Modeling. Cambridge University Press, Cambridge (2011)
Olbers, D., Willebrand, J., Eden, C.: Ocean Dynamics. Springer, Berlin (2012)

Pedlosky, J.: Geophysical Fluid Dynamics. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1994)
Pedlosky, J.: Ocean Circulation Theory. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1996)
Pedlosky, J.: Waves in the Ocean and Atmosphere. Springer, Berlin (2003)
Peixoto, J.P., Oort, A.H.: Physics of Climate. American Institute of Physics, New York (1992)
Pichler, H.: Dynamik der Atmosphäre. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1997)
Roeckner, E., Bengtsson, L., Feichter, J., Lelieveld, J., Rodhe, H.: Transient climate change simulations with a coupled atmosphere-ocean GCM including the tropospheric sulfur cycle. J. Clim. **12**, 3004–3032 (1999)
Satoh, M.: Atmospheric Circulation Dynamics and General Circulation Models. Springer, Berlin (2012)
Scorer, R.S.: Cloud Investigation by Satellite. Ellis Horwood, Ltd., Chichester (1986)
Simpson, J.E.: Sea Breeze and Local Winds. Cambridge University Press, Cambridge (1994)
Simpson, J.E.: Gravity Currents in the Environment and the Laboratory. Cambridge University Press, Cambridge (1997)
Solomon, S.: Stratospheric ozone depletion: a review of concepts and history. Rev. Geophys. **37**, 275–316 (1999)
Sutherland, B.R.: Internal Gravity Waves. Cambridge University Press, Cambridge (2010)
Stocker, T.: Introduction to Climate Modelling. Springer, Berlin (2011)
Timmreck, C., Graf, H.-F., Feichter, J.: Simulation of Mt. Pinatubo volcanic aerosol with the Hamburg climate model ECHAM 4. Theor. Appl. Climatol. **62**, 85–108 (1999)
Trenberth, K.E. (ed.): Climate System Modelling. Cambridge University Press, Cambridge (2010)
Vallis, G.K.: Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge (2006)
Väisälä, V.: Über die Wirkung der Windschwankungen auf die Pilotbeobachtungen. Soc. Sci. Fennica, Commentationes Phys.-Math. II **19**, 37 (1925)
Warner, T.T.: Numerical Weather and Climate Prediction. Cambridge University Press, Cambridge (2010)
Whiteman, C.D.: Mountain Meteorology. Oxford University Press, Oxford (2000)
Wurtele, M.G., Sharman, R.D., Datta, A.: Atmospheric lee waves. Ann. Rev. Fluid Mech. **28**, 129–176 (1996)
Young, I.R.: Wind-Generated Ocean Waves. Elsevier, Amsterdam (1999)

Mikroströmungen

12

Peter Ehrhard

Zusammenfassung

Das Kapitel Mikroströmungen behandelt Strömungen durch sehr kleine Kanäle und um sehr kleine Objekte und ist Teil des Lehrbuches und Nachschlagewerkes H. Oertel jr. Prandtl-Führer durch die Strömungslehre. Nach einigen exemplarischen Anwendungen der Mikroströmungen, werden für Gase und Flüssigkeiten separat die Grenzen der kontinuumsmechanischen Behandlung diskutiert. Molekulare und Kontinuums-Modelle werden zusammen mit den adäquaten Randbedingungen für Mikroströmungen erläutert.

Weitergehend werden aus einer Ähnlichkeitsdiskussion die Konsequenzen der Verkleinerung abgeleitet und spezielle Effekte wie die Elektrokinetik, die (dynamische) Benetzung und dünne Filme abgehandelt. Schließlich wird der Stand der Literatur zum Druckverlust, zur laminar-turbulenten Transition und zum Wärmeübergang in Mikrorohren dargestellt.

1 Grundlagen der Mikroströmungen

Strömungs- und Transportprozesse in *Mikrokanälen* oder um *Mikroobjekte* werden durch den Fortschritt der Fertigungstechnologien für technische Anwendungen relevant. Moderne Fertigungsverfahren erlauben kleinste Strukturen von deutlich unter einem Millimeter in verschiedenem Material wie Silizium, Glas, Metall oder Kunststoff herzustellen. Damit entstehen Mikrokanäle oder Mikroobjekte, in und um welche Strömungs- und Transportprozesse ablaufen, um komplexe Funktionen auf kleinstem Raum zu realisieren. Es zeigt sich, abhängig vom Fluid, dass die kontinuumsmechanische Behandlung von Strömungen in und um sehr kleine Geometrien in vielen Fällen nicht ohne weiteres möglich ist. Gegebenenfalls werden Korrekturen der kontinuumsmechanischen Gleichungen oder gar molekulare

P. Ehrhard (✉)
Bio- u. Chemieingenieurwesen, Technische Universität Dortmund, Dortmund, Deutschland
E-Mail: Peter.Ehrhard@bci.tu-dortmund.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5_12

Methoden notwendig, um die Physik der Strömung auf solch kleinen Längenskalen korrekt wiederzugeben.

Der Begriff Mikroströmung kann einerseits ganz formal aus der Weite d des Mikrokanals oder der Abmessung d des Mikroobjekts im Bereich $1 < d < 1000\,\mu\mathrm{m}$ definiert werden. Andererseits kann auf solchen Längenskalen, je nach Fluid, durchaus eine Strömung vorliegen, die durch ein Kontinuumsmodell beschrieben werden kann. Der Begriff Mikroströmung erscheint danach dann gerechtfertigt, wenn die Grenzen der kontinuumsmechanischen Behandlung tangiert werden, oder wenn Effekte bedeutsam werden, die in makroskopischen Strömungen eine untergeordnete Rolle spielen. Es ist dieser, physikalisch begründete Begriff der Mikroströmung, der in diesem Kapitel diskutiert wird.

1.1 Anwendungen von Mikroströmungen

Neben den im Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik beschriebenen, bereits realisierten Beispielen eines Druckkopfes für einen Tintenstrahldrucker oder eines Mikrowärmetauschers, werden zwei in die Zukunft weisende Anwendungen von Mikroströmungen diskutiert. Die Diskusion der Beispiele erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit, sie soll vielmehr die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten von Mikroströmungen verdeutlichen.

In der physikalischen, biologischen und chemischen Analytik hat sich die Vision entwickelt, in nicht zu ferner Zukunft ein vollständiges Analyselabor (siehe Abb. 12.1) miniaturisiert auf einem Chip aufzubauen (siehe Manz und Becker 1999). Dieses Konzept wird als *lab on a chip* oder *micro-total-analysis system* (μTAS) bezeichnet. Die Vorteile der Miniaturisierung sind hierbei vielfältig. Es werden nur kleine Probenvolumina benötigt. Das günstige Verhältnis von Fluidoberfläche und Fluidvolumen erlaubt effiziente Wärme- und Stoffübertragung, katalytische Reaktionen und Detektions- und Trennverfahren. Es können mechanische, optische und elektrische Komponenten integriert werden und eine kostengünstige Massenfertigung solcher Chips in biologisch und chemisch verträglichen Materialien erlaubt den Einweggebrauch. Alle diese Vorzüge lassen erwarten, dass die Analytik, bei guter Empfindlichkeit und Reproduzierbarkeit, deutlich kostengünstiger und bei Bedarf in hohem Maße parallel ablaufen kann. Ein solches miniaturisiertes Analyselabor benötigt die Integration einer Reihe von Bausteinen, welche etwa die Fluidaufbereitung, den Fluidtransport, die Vermischung von Fluiden, biologische und chemische Reaktionen sowie Trenn- und Detektionsverfahren bereitstellen. Ein großer Teil dieser Funktionen ist eng mit den Strömungs- und Transportprozessen in den entsprechenden Bausteinen verknüpft.

Die Kombination von elektronischen und mechanischen Komponenten in Systemen von deutlich unter einem Millimeter Abmessung (so genannte *micro-electro-mechanical systems*, MEMS) eröffnet auch in der Strömungsmesstechnik neue Möglichkeiten (siehe Löfdahl und Gad-el-Hak 2006). Dies bezieht sich zum Einen auf Sensoren für die Strömungsgeschwindigkeit. Die Miniaturisierung von Sensoren, basierend auf dem thermischen Prinzip (z. B. Hitzdrahtsonden), für eine oder

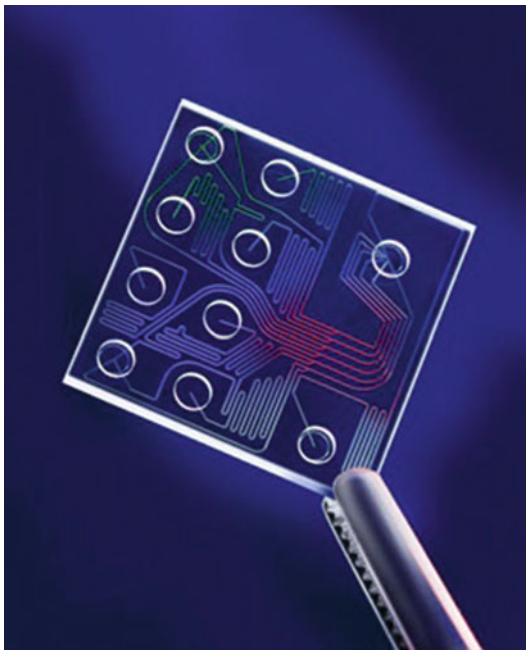


Abb. 12.1 Mikrochip eines Analyselabors

mehrere Komponenten der Geschwindigkeit oder weitergehend die Anwendung vieler solcher Sensoren in Arrays, bietet neue Möglichkeiten der Messung turbulenter Strömungen. Hier ist, neben der besseren zeitlichen Auflösung kleiner Sensoren und ihrer kostengünstigen Fertigung, eine grundlegende Verbesserung der Qualität der Daten zu erwarten, weil die Messung an vielen Orten bei feiner räumlicher Auflösung möglich wird. Zum Zweiten wird die indirekte oder direkte Messung der Schubspannung, bei ähnlich guter räumlicher und zeitlicher Auflösung möglich. Die indirekte Messung der Schubspannung ist über ähnliche thermische Verfahren wie bei der Geschwindigkeit möglich. Die direkte Messung der Schubspannung, durch elastisch in die Wand eingebettete Einsätze, wird mit hoher räumlicher Auflösung überhaupt erst durch die neuen Mikrofertigungstechniken machbar. Zum Dritten wird die Einbettung von kleinen, meist kapazitiven, Drucksensoren in die Wand möglich. Auch hier verspricht die Miniaturisierung hohe zeitliche und vor allem räumliche Auflösung. Es sind die kleinsten Strukturen in turbulenten Strömungen, deren messtechnische Auflösung mit Hilfe von Mikro-Sensor-Arrays denkbar wird. Demgemäß sind, zumindest bei moderater Reynolds-Zahl, Sensorflächen anzustreben, die von der Abmessung der Kolmogorov-Länge sind.

Die räumliche Erfassung kohärenter Strukturen, etwa in wandnahen turbulenten Grenzschichten, kann weitergehend als Ausgangspunkt für deren lokale Kontrolle und Unterdrückung dienen. Hierzu sind zusätzlich Arrays miniaturisierter Aktoren erforderlich, welche lokal und zeitlich korrekt die erforderliche Reaktion an der Wand einbringen. Solche Aktoren können gleichfalls als MEMS auf Basis

unterschiedlicher Prinzipien gefertigt und kostengünstig als Arrays in die Wand eingebettet werden. Die Perspektiven der lokalen Turbulenzkontrolle gehen qualitativ über die globalen Methoden wie die flächige Absaugung hinaus und ermöglichen eine aktive Turbulenzkontrolle.

1.2 Fluidmodelle

Die kontinuumsmechanische Beschreibung der Bewegung von Fluiden stellt die Grundlage der klassischen Strömungsmechanik dar, wie sie in den vorangegangenen Kapiteln beschrieben wird. Hierbei wird der detaillierte Charakter der Fluide, als ein Kollektiv von Molekülen, ignoriert und stattdessen werden gemittelte Strömungsgrößen verwendet (siehe Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik). Die einzelnen Moleküle besitzen eine regellose statistische Bewegung, die Brownsche Molekularbewegung, die gegebenenfalls von einer Translationsbewegung überlagert wird. Mittelt man die Bewegung über ein Volumenelement mit vielen Molekülen, so bleibt lediglich die Translation erhalten. Sie bestimmt den kontinuumsmechanischen Geschwindigkeitsvektor. Die Brownsche Molekularbewegung vieler Moleküle, deren Amplitude im Übrigen mit der Temperatur verknüpft ist, ist statistisch unabhängig und verschwindet durch die Mittelung. Die Kontinuumsmechanik beschreibt somit die zeitliche und räumliche Änderung der über ein Volumenelement gemittelten Strömungsgrößen wie Dichte, Geschwindigkeit, Druck, Temperatur. Ein solche Darstellung ist nur sinnvoll, wenn die Mittelung über eine ausreichende Anzahl von Molekülen erfolgen kann. In anderen Worten, der Durchmesser des Mittelungsvolumens muss viel größer sein als der mittlere Abstand der Moleküle. Gleichzeitig muss der Durchmesser des Mittelungsvolumens klein gegenüber den Abmessungen des Strömungsgebiets bleiben. Es wird also deutlich, dass die Kontinuumsmechanik an Grenzen stößt, wenn etwa die Anzahl der Moleküle pro Mittelungsvolumen sehr klein wird (verdünnte Gase) oder wenn die Abmessung des Strömungsgebiets und damit das Mittelungsvolumen sehr klein werden (Mikroströmungen).

Eine weitere Annahme liegt der Kontinuumsmechanik in der Regel zugrunde. Eine lineare Beziehung zwischen den Spannungen und den Scherraten erhält man für Newtonsche Fluide im thermodynamischen Gleichgewicht. Diese Annahme erlaubt im Übrigen auch eine lineare Beziehung zwischen den Wärmeströmen und den Temperaturgradienten (Fouriersches Fluid) oder zwischen den Stoffströmen und den Konzentrationsgradienten (Ficksches Gesetz). Auf der molekularen Ebene ist ein thermodynamisches Gleichgewicht gegeben, wenn genügend Wechselwirkungen zwischen den Molekülen pro Zeitintervall stattfinden. Dieses Zeitintervall muss gleichzeitig klein gegenüber der Zeitskala der Strömung bleiben. Befindet sich ein Fluid weit vom thermodynamischen Gleichgewicht, werden Unstetigkeiten der Strömungsgrößen innerhalb des Fluids möglich. An Wänden ist ebenfalls das thermodynamischen Gleichgewicht dafür verantwortlich, dass keine Unstetigkeiten von Geschwindigkeit (Haftbedingung) oder Temperatur auftreten können. Hierfür sind ebenfalls genügend Wechselwirkungen zwischen den Fluid- und den Wandmo-

lekülen erforderlich. Ist das thermodynamische Gleichgewicht an der Wand nicht gegeben, werden dort Unstetigkeiten der Geschwindigkeit (Gleitbedingung) und der Temperatur möglich. Das Versagen der kontinuumsmechanischen Behandlung unter bestimmten Bedingungen macht es erforderlich das Spektrum der Fluidmodelle zu erweitern.

Eine Übersicht über die Grundgleichungen und Fluidmodelle ist in Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik in den Abb. 5 und 7 gegeben. Die Kontinuumsmodelle können, abhängig vom Reibungseinfluss, in die Euler-Gleichungen, die Navier-Stokes-Gleichungen für Newtonsche Fluide und die Burnett-Gleichungen unterteilt werden. Die Burnett-Gleichungen resultieren aus einer Näherungslösung der Boltzmann-Gleichung durch Einführung einer Entwicklung für sehr kleine Knudsen-Zahlen Kn (Chapman-Enskog-Entwicklung). Sie gelten damit auch in der Umgebung des thermodynamischen Gleichgewichts. Formal haben die Burnett-Gleichungen das Aussehen der kompressiblen Impulsgleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. 13–15). Die Normal- und Schubspannungen beinhalten jedoch nichtlineare Terme der Geschwindigkeitsgradienten sowie eine inhärente Kopplung mit der Energiegleichung (siehe Chapman und Cowling 1970). Für sehr kleine Werte Kn gehen die Burnett-Gleichungen in die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. 18) über. Dem stehen die molekularen Modelle gegenüber, welche deterministische oder statistische Methoden anwenden. Die molekulardynamische Simulation (MDS) stellt ein deterministisches Verfahren auf Basis des Newtonschen Gesetzes dar, während die Monte-Carlo-Simulation (MCS) auf der Basis der Boltzmann-Gleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. 64) statistischer Natur ist (siehe Oertel 1994, 2005).

Generell sind die Kontinuumsmodelle den molekularen Modellen vorzuziehen, sofern der Bereich der Knudsen-Zahlen es erlaubt. Dies liegt daran, dass der mathematische und numerische Aufwand bei der Behandlung der partiellen Differentialgleichungen der Kontinuumsmodelle deutlich geringer ist als der entsprechende Aufwand für die molekularen Modelle. Die molekulardynamische Simulation und die Monte-Carlo-Simulation erfordern die Beschreibung der Wechselwirkung und Bewegung einer bestimmten Anzahl ausgewählter Moleküle. Die Boltzmann-Gleichung stellt eine Integrodifferentialgleichung dar, deren numerische Lösung aufgrund des Stoßintegrals schwierig ist. Molekulardynamische Simulationen für technisch relevante Mikroströmungen bleiben, allein wegen der erforderlichen Anzahl der Modellpartikel, sehr aufwendig. Ein wichtiges Anliegen bleibt es deshalb, die Grenzen der Gültigkeit der Fluidmodelle möglichst genau zu erfassen, um dem Problem angepasste Entscheidungen für die Fluidmodelle treffen zu können.

Gase und Flüssigkeiten unterscheiden sich wesentlich durch den mittleren Abstand ihrer Moleküle. Bei Gasen ist die Bindung zu Nachbarmolekülen gering und der große Molekülabstand erlaubt eine freie Bewegung der Moleküle, unterbrochen durch Stöße mit anderen Molekülen. Bei Gasen ist deshalb die mittlere freie Weglänge ein wichtiger Parameter. Die theoretische Behandlung von Gasen im Rahmen der kinetischen Gastheorie ist relativ weit entwickelt.

In Flüssigkeiten hingegen ist der Abstand der Moleküle deutlich kleiner, so dass die Moleküle in ständiger Wechselwirkung mit den Nachbarmolekülen stehen. Dies macht die molekulare Behandlung von Flüssigkeiten schwierig. Da die Gültigkeit der Kontinuumsmodelle wesentlich von den molekularen Gegebenheiten bestimmt ist, werden die entsprechenden Kriterien in den folgenden Abschnitten separat für Gase und Flüssigkeiten diskutiert.

1.3 Mikroströmung von Gasen

Die mittlere freie Weglänge in einem Gas ist verknüpft mit der Häufigkeit von Stößen und damit auch mit der Frage, ob im Gas ein thermodynamisches Gleichgewicht erreicht wird (siehe Schaaf und Chambré 1961). Für ein ideales Gas mit sphärischen Molekülen hängt die mittlere freie Weglänge gemäß

$$\bar{\lambda} = \frac{k_\mathrm{B} \times T}{\sqrt{2} \times \pi \times p \times \sigma^2} \tag{12.1}$$

mit den Zustandsgrößen Druck p und Temperatur T zusammen. k_B ist die Boltzmann-Konstante ($k_\mathrm{B} = 1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$) und σ der Streuquerschnitt, der bei elastischen Kugeln dem Moleküldurchmesser gleich kommt. Das thermodynamische Gleichgewicht wird erreicht, wenn die mittlere freie Weglänge $\bar{\lambda}$ deutlich kleiner als die Längenskala L der Strömung bleibt. Die Längenskala der Strömung ist etwa durch eine Kanalweite d gegeben. Allgemein ist es die Längenskala, über welche Gradienten der makroskopischen Strömungsgrößen wie Druck, Dichte, Geschwindigkeit oder Temperatur vorliegen. Aus dem Geschwindigkeitsprofil $u(z)$ z. B. in einer ebenen Scherströmung, ergibt sich die Längenskala

$$L \sim \frac{u}{|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}|}. \tag{12.2}$$

Den Quotient aus mittlerer freier Weglänge und Längenskala der Strömung bezeichnet man als Knudsen-Zahl:

$$Kn = \frac{\bar{\lambda}}{L}. \tag{12.3}$$

Für $Kn \ll 1$ ist offensichtlich ein thermodynamisches Gleichgewicht sichergestellt. Die mittlere freie Weglänge und damit die Knudsen-Zahl charakterisieren auch die Anzahl der Moleküle pro Mittelungsvolumen, welche für eine kontinuumsmechanische Beschreibung zur Verfügung stehen. Eine große Anzahl von Molekülen pro Mittelungsvolumen kann durch eine kleine mittlere freie Weglänge, d. h. durch $Kn \ll 1$, sichergestellt werden. Die Knudsen-Zahl erlaubt somit eine

Gasströmung bezüglich des thermodynamischen Gleichgewichts und bezüglich der Kontinuumsannahme zu charakterisieren.

Die Definition der Knudsen-Zahl macht deutlich, dass Abweichungen von $Kn \ll 1$ sowohl für große mittlere freie Weglängen als auch für kleine Längenskalen der Strömung auftreten können. Große $\bar{\lambda}$ treten bei Strömungen verdünnter Gase auf, kleine L finden wir in Mikrokanälen. Die Strömung verdünnter Gase und die Gasströmung in und um kleine Geometrien sind deshalb ähnlich bezüglich der Knudsen-Zahl. Man kann deshalb die etablierte Literatur zur Strömung verdünnter Gase nutzen, um die Gasströmung in und um kleine Geometrien zu charakterisieren. Anhand der Knudsen-Zahl ergeben sich die in der folgenden Tabelle aufgeführten Bereiche (siehe Oertel 1994, 2005; Gad-el-Hak 1999).

$Kn \to 0$ ($Re \to \infty$)	Euler-Gleichungen
$Kn \leq 10^{-2}$	Navier-Stokes-Gleichungen mit Haftbedingung
$10^{-2} < Kn \leq 10^{-1}$	Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitbedingung
$10^{-1} < Kn \leq 10$	Übergangsbereich
$10 < Kn$	freie molekulare Strömung

Für Knudsen-Zahlen $Kn \leq 10^{-2}$ können die kontinuumsmechanischen Gleichungen und Randbedingungen verwendet werden. Die Erhöhung der Knudsen-Zahl macht eine Korrektur der kinematischen und thermischen Randbedingungen notwendig. Es treten Unstetigkeiten der Geschwindigkeit und der Temperatur an der Wand auf. Für $10^{-1} < Kn \leq 10$ wird der Übergangsbereich erreicht. Hier können für kleine Knudsen-Zahlen noch die Burnett-Gleichungen verwendet werden, ansonsten eignet sich die Monte-Carlo-Simulation. Der Bereich $Kn > 10$ ist schließlich durch die freie molekulare Strömung gekennzeichnet, die mit der Boltzmann-Gleichung beschrieben wird.

Abschließend werden an einem konkreten Beispiel die Bereiche der Knudsen-Zahl verdeutlicht. Bei Luft unter Normalbedingungen (288 K, 1 bar), erhält man eine mittlere freie Weglänge von $\bar{\lambda} = 65\,\text{nm}$. Eine Strömung im Mikrokanal von $L = 1\,\mu\text{m}$ Weite, hat dann die Knudsen-Zahl $Kn = 0.065$ zur Folge. Dies ist bereits eine Strömung, bei der die Gleitbedingung des Gases an der Wand zu berücksichtigen ist. Im gleichen Kanal bei einem Druck von 0.1 bar ergibt sich $\bar{\lambda} = 650\,\text{nm}$ und wegen $Kn = 0.65$ erhält man eine Strömung, die nicht mehr mit Kontinuumsmodellen beschrieben werden kann.

Man kann zusammenfassend feststellen, dass für Gase mit wachsender Knudsen-Zahl zunächst das thermodynamische Gleichgewicht zwischen Gas- und Wand-Molekülen verloren geht. Es kommt zum Gleiten des Gases an der Wand. Weiter erhöhte Knudsen-Zahl führt zum Verlust des thermodynamischen Gleichgewichts innerhalb des Gases. Das Gas verhält sich nicht mehr wie ein Newtonsches Fluid und die Navier-Stokes-Gleichungen können nicht mehr angewendet werden. Sehr große Knudsen-Zahlen schließlich führen in einen Bereich, in dem die Kontinuumsmodelle gänzlich versagen und das Gas als Ansammlung von Molekülen behandelt werden muss.

1.4 Mikroströmung von Flüssigkeiten

Während für Gase mit der kinetischen Gastheorie ein etabliertes Modell zur Verfügung steht, welches die Grenzen der kontinuumsmechanischen Behandlung zu charakterisieren erlaubt, sind die Grenzen der kontinuumsmechanischen Behandlung von Flüssigkeiten deutlich schwieriger zu fassen. Das Konzept der mittleren freien Weglänge und die Knudsen-Zahl sind für Flüssigkeiten nicht hilfreich. Da die Moleküle einer Flüssigkeit in ständiger Wechselwirkung mit den Nachbarmolekülen stehen, kommt als molekulares Modell vorzugsweise die molekulardynamische Simulation (MDS) in Frage. Daneben können Experimente herangezogen werden, um die Grenzen der kontinuumsmechanischen Behandlung von Flüssigkeiten zu charakterisieren.

Aus Experimenten mit extrem dünnen Flüssigkeitsfilmen zwischen molekular glatten Platten (siehe Chan und Horn 1985; Gee et al. 1990) geht hervor, dass erst bei Filmdicken unter etwa 10 Molekülllagen (∼5 nm) die Flüssigkeit nicht mehr als Kontinuum aufgefasst werden kann. Man beobachtet dann nichtglatte Veränderungen der Normal- und Schubspannungen. Dies ist ein Hinweise darauf, dass die Anzahl der Molekülllagen Einfluss auf das Verhalten der Flüssigkeit nimmt. Weiterhin zeigen diese Experimente bereits für Flüssigkeitsfilme unter 100 Molekülllagen (∼50 nm) Änderungen der Viskosität. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Flüssigkeit kein Newtonsches Verhalten mehr aufweist. Ähnliche Hinweise finden wir auch in den molekulardynamischen Simulationen von Loose und Hess 1989. Dabei wird eine Scherschicht von etwa 10 Molekülllagen idealisierter, kugelförmiger Moleküle betrachtet. Für Scherraten

$$\dot{\gamma} \geq 1.4 \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma^2 \times m}} \tag{12.4}$$

erhält man sprunghaftes Verhalten der Strömungsgrößen über die Scherschicht, während für kleine Scherraten ein kontinuierliches Verhalten beobachtet wird. Die Scherrate eines ebenen Problems ist gemäß $\dot{\gamma} = \mathrm{d}u/\mathrm{d}z$ mit dem Gradienten der Geschwindigkeit verknüpft. ε ist die Bindungsenergie, m die Masse und σ der Durchmesser der Moleküle. Für Wassermoleküle bei Normalbedingungen erhält man eine Bindungsenergie von $\varepsilon \sim 3.5 \times 10^{-21}$ J, eine Molekülmasse von $m \sim 3 \cdot 10^{-26}$ kg und einen Moleküldurchmesser von $\sigma \sim 3 \cdot 10^{-10}$ m. Die Abschätzung gemäß Gl. (12.4) ergibt deshalb $\dot{\gamma} \geq 1.6 \cdot 10^{12}\ \mathrm{s}^{-1}$. Das Wassermolekül ist jedoch ein nichtsphärisches komplexes Molekül, für welches das einfache Modell von Loose und Hess 1989 nicht ohne weiteres anwendbar ist. Trotzdem kann es zur Abschätzung der Größenordnung dienen. Zwar erscheinen die Scherraten für einfache Moleküle mit kleiner Molekülmasse und kleinem Moleküldurchmesser extrem groß. Komplexe, schwere und große Moleküle liefern aber gemäß Gl. (12.4) kleinere kritische Scherraten, welche in technischen Systemen durchaus erreicht werden können.

Neben der Frage nach dem kontinuumsmechanischen Verhalten und dem thermodynamischen Gleichgewicht der Flüssigkeit, stellt sich analog zu den Gasen

die Frage, ob an der Wand ($z = 0$) Unstetigkeiten der Geschwindigkeit oder der Temperatur auftreten können. Hierfür ist es hilfreich das Navier-Gleitgesetz in der Form

$$u(z = 0) - u_w = L_R \times \dot{\gamma}(z = 0) \tag{12.5}$$

zu formulieren. In Gl. (12.5) ist der Sprung der wandtangentialen Geschwindigkeit proportional zur Scherrate. Die Proportionalitätskonstante L_R hat die Dimension einer Länge und wird als Gleitlänge bezeichnet. Eine verschwindende Gleitlänge ($L_R \to 0$) führt zur Haftbedingung. In der Literatur findet man widersprüchliche Aussagen aus Experimenten zum Gleiten der Flüssigkeit an extrem glatten Wänden. Gleitlängen von nur $L_R \leq 20\,\text{nm}$ finden Craig et al. 2001 in wässrigen Newtonschen Flüssigkeiten, wobei eine Abhängigkeit der Gleitlänge von der Scherrate und der Viskosität beobachtet wird. Gleitlängen bis $L_R \sim 1\,\mu\text{m}$ finden Tretheway und Meinhart 2002 an wasserdurchströmten hydrophoben Kanalwänden, während für hydrophile Wände kein nennenswertes Gleiten beobachtet wird. Joseph und Tabeling 2005 finden für Wasser an hydrophilen und hydrophoben Kanalwänden Gleitlängen von $L_R < 100\,\text{nm}$, wobei die Messgenauigkeit im gleichen Bereich mit $\pm 100\,\text{nm}$ angegeben wird. Li und Yoda 2010 lösen mit einer neuartigen Partikelmesstechnik die tangentiale Geschwindigkeit in der wandnahen Fluidschicht von 400 nm Dicke auf. Sie verwenden hydrophiles und hydrophob beschichtetes Glas als Wandmaterial und wässrige Lösungen unterschiedlicher Ionenstärke und pH-Werte als Fluid. Durch Korrektur der inhomogenen Partikelverteilung an der Wand werden hochgenaue Ergebnisse abgeleitet. Die Gleitlänge bleibt hierbei stets kleiner als 23 nm und damit innerhalb der Messunsicherheit. Wenn auch die Werte streuen, bleibt festzuhalten, dass keine belastbaren Belege für nennenswertes Gleiten der Flüssigkeit an der Wand vorliegen. Die experimentellen Befunde können durch molekulardynamische Simulationen, zumindest für moderate Scherraten, gestützt werden. In einer isothermen Couette-Scherströmung finden Thompson und Troian 1997 für einfache sphärische Flüssigkeitsmoleküle für $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_k$ eine konstante Gleitlänge von $L_R \leq 17 \times \sigma$. Für Wasser sind somit Gleitlängen bis $L_R \sim 5\,\text{nm}$ zu erwarten. Der Wert hängt im Einzelnen von der Wechselwirkung und Kompatibilität der Wand- und Flüssigkeitsmoleküle ab. Für $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_k$ wird somit das Navier-Gleitgesetz bestätigt. Die kritische Scherrate $\dot{\gamma}_k$ liegt im Bereich

$$\dot{\gamma}_k = 0.025 \ldots 0.4 \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma^2 \times m}}, \tag{12.6}$$

wobei wiederum eine Abhängigkeit von der Wechselwirkung und Kompatibilität von Wand- und Flüssigkeitsmolekülen auftritt. Für Wassermoleküle führt dies mit den oben diskutierten Einschränkungen zu Scherraten von $\dot{\gamma}_k = 0.3 \ldots 4.5 \cdot 10^{11}\,\text{s}^{-1}$. Solch große Scherraten sind in technischen Systemen kaum zu erwarten. Auch hier ist darauf hinzuweisen, dass schwere und große Flüssigkeitsmoleküle kleinere kritische Scherraten $\dot{\gamma}$ erwarten lassen. Für $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_k$ wächst die Gleitlänge deutlich

an, was auf freies Gleiten der Moleküle schließen lässt. In diesem Bereich ist die Navier-Gleitbedingung nicht mehr gültig.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass einfache Flüssigkeiten für moderate Scherraten geringes Gleiten aufweisen können. Entsprechend dem Navier-Gleitmodell entspricht dies Gleitlängen von wenigen Nanometern. In diesem Bereich entspricht ihr rheologisches Verhalten einem Newtonschen Fluid. Wird eine sehr große kritische Scherrate überschritten, kann eine Entkopplung von Wand- und Flüssigkeitsgeschwindigkeit auftreten. Die Kontinuums-Annahme bleibt gültig, solange mindestens 10 Moleküllagen vorliegen und solange nicht zu hohe Scherraten erreicht werden. Für Flüssigkeitsfilme mit weniger als 100 Moleküllagen können graduelle Abweichungen vom Newtonschen Verhalten auftreten.

2 Molekulare Modelle

2.1 Grundlagen molekularer Modelle

Im Hinblick auf die noch zu beschreibenden Berechnungsverfahren, die eine direkte numerische *Simulation der Verteilungsfunktion* f durchführen, werden die gaskinetischen Gleichungen der einzelnen Partikelstöße behandelt. In verdünnten Gasen finden im wesentlichen Zusammenstöße je zweier Moleküle statt. Für die gaskinetische Betrachtung reicht es daher im Allgemeinen aus, ausschließlich Zweierkollisionen zu berücksichtigen. Die Beschreibung des Prozesses besteht in der Berechnung der Geschwindigkeitsvektoren $\boldsymbol{c}_1'$ und $\boldsymbol{c}_2'$ und der inneren Energien $\varepsilon_{\mathrm{i},1}'$ und $\varepsilon_{\mathrm{i},2}'$ nach dem Stoß der beiden einzelnen Partikel.

Der einfachste Fall eines Partikelstoßes ist der elastische Stoß. Hier werden zwischen den Molekülen nur translatorische Energien ausgetauscht, ein Austausch zwischen translatorischer Energie und den inneren Energien der Moleküle erfolgt nicht. Man kann daher diesen Stoß mit den klassischen Erhaltungsgleichungen der Mechanik behandeln.

In Abb. 12.2 sowie in den folgenden Gleichungen bezeichnen die Indizes 1 und 2 die beiden Stoßpartner. Variablen nach dem Partikelstoß werden mit einem Strich gekennzeichnet. Es gilt die Massenerhaltung

$$m_1 + m_2 = m_1' + m_2'. \tag{12.7}$$

Die Impulserhaltung ergibt

$$m_1 \times \boldsymbol{c}_1 + m_2 \times \boldsymbol{c}_2 = m_1 \times \boldsymbol{c}_1' + m_2 \times \boldsymbol{c}_2' = (m_1 + m_2) \times \boldsymbol{c}_{\mathrm{m}}, \tag{12.8}$$

mit der Schwerpunktgeschwindigkeit $\boldsymbol{c}_{\mathrm{m}}$. Die Energieerhaltung schreibt sich gemäß

$$m_1 \times c_1^2 + m_2 \times c_2^2 = m_1 \times c_1'^2 + m_2 \times c_2'^2. \tag{12.9}$$

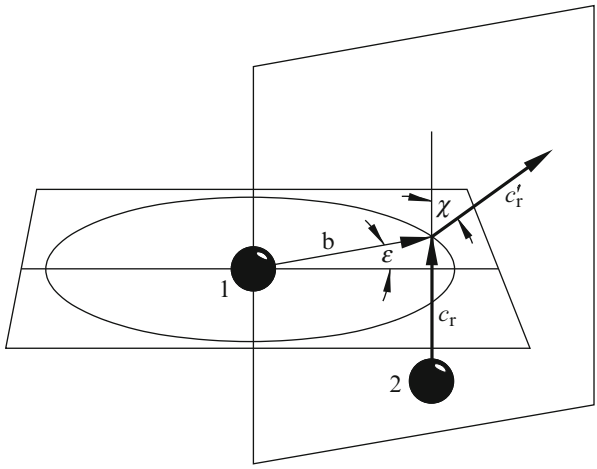


Abb. 12.2 Geometrie der Zweierkollisionen im Massenschwerpunktssystem

Definiert man die Relativgeschwindigkeiten

$$\boldsymbol{c}_\mathrm{r} = \boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{c}_2 \quad \text{und} \qquad \boldsymbol{c}'_\mathrm{r} = \boldsymbol{c}'_1 - \boldsymbol{c}'_2,$$

so folgt aus der Impuls- und Energieerhaltung

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}_1 &= \boldsymbol{c}_\mathrm{m} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \times \boldsymbol{c}_\mathrm{r}, \\
\boldsymbol{c}_2 &= \boldsymbol{c}_\mathrm{m} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \times \boldsymbol{c}_\mathrm{r}, \\
\boldsymbol{c}'_1 &= \boldsymbol{c}_\mathrm{m} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \times \boldsymbol{c}'_\mathrm{r}, \\
\boldsymbol{c}'_2 &= \boldsymbol{c}_\mathrm{m} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \times \boldsymbol{c}'_\mathrm{r}.
\end{aligned}$$

Führt man diese Beziehungen in die Erhaltungsgleichungen ein, ergeben sich mit der reduzierten Masse

$$m_\mathrm{r} = \frac{m_1 \times m_2}{m_1 + m_2}$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned}
m_1 \times \boldsymbol{c}_1^2 + m_2 \times \boldsymbol{c}_2^2 &= (m_1 + m_2) \times \boldsymbol{c}_\mathrm{m}^2 + m_\mathrm{r} \times \boldsymbol{c}_\mathrm{r}^2, \\
m_1 \times \boldsymbol{c}_1'^2 + m_2 \times \boldsymbol{c}_2'^2 &= (m_1 + m_2) \times \boldsymbol{c}_\mathrm{m}^2 + m_\mathrm{r} \times \boldsymbol{c}_\mathrm{r}'^2,
\end{aligned}$$

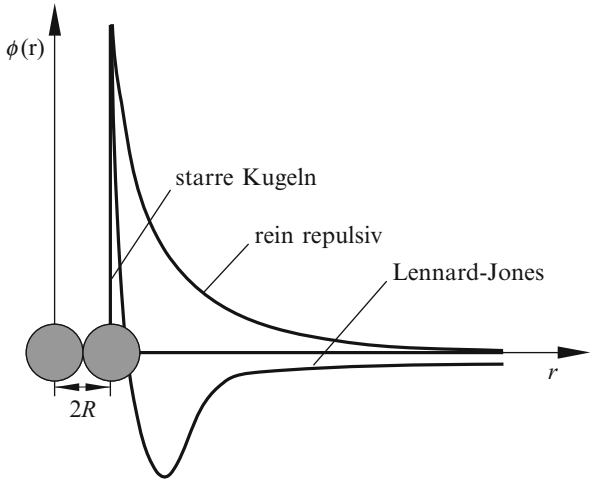


Abb. 12.3 Wechselwirkungspotentiale

aus denen sofort folgt, dass sich der Betrag der Relativgeschwindigkeit über die Kollision nicht ändert.

Die Richtung der Relativgeschwindigkeiten nach dem Stoß ist durch die zwei Stoßparameter χ und ε festgelegt. Man betrachtet dazu zwei Partikel und führt eine Stoßebene ein, die durch den Mittelpunkt von Partikel 1 geht und senkrecht auf dem Relativgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{c}_\mathrm{r}$ vor dem Stoß steht (siehe Abb. 12.2). Durch die Polarkoordinaten b und ε ist die Position des Auftreffpunktes von Partikel 2 auf Partikel 1 gekennzeichnet. Mit χ bezeichnet man den Ablenkwinkel, der in der Ebene liegt, die durch die Vektoren $\boldsymbol{c}_\mathrm{r}$ und $\boldsymbol{c}'_\mathrm{r}$ aufgespannt wird.

Die Beschreibung der Transporteigenschaften eines Gases, wie z. B. der Zähigkeit μ oder der Wärmeleitfähigkeit λ, wird entscheidend durch das verwendete Wechselwirkungspotential zwischen den Partikeln bestimmt. In Abb. 12.3 sind verschiedene Modelle der Wechselwirkungspotentiale dargestellt.

Das klassische Wechselwirkungspotential der Gaskinetik ist das der starren elastischen Kugeln, bei dem eine Wechselwirkung zwischen den Molekülen nur dann stattfindet, wenn sich diese berühren. Dieses Modell liefert als Temperaturabhängigkeit der dynamischen Zähigkeit und der Wärmeleitfähigkeit das Ergebnis

$$\mu(T) \sim T^{0.5} \quad \text{und} \qquad \lambda(T) \sim T^{0.5}.$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Gassorte. Weitere Wechselwirkungspotentiale sind das rein repulsive Wechselwirkungspotential und das Lennard-Jones-Potential. Das rein repulsive Wechselwirkungspotential berücksichtigt die elektrostatische Abstoßung der elektrisch gleichgeladenen Elektronenhüllen. Dabei ist die Wechselwirkungspotentialkraft gemäß $\boldsymbol{K} = -\nabla\boldsymbol{\Phi}$ definiert. Das Lennard-Jones-Potential berücksichtigt neben der elektrostatischen Abstoßung bei

kleinen Relativabständen r der stoßenden Partikel die anziehende Van-der-Waals-Multipolwechselwirkung, die aufgrund der Deformation der Elektronenhüllen der stoßenden Moleküle bzw. Atome bei größeren Relativabständen dominiert. Für unsere Anwendungen sind die Wechselwirkungsenergien so hoch ($> 1\ eV$), dass für die Beschreibung der Transportvorgänge das Modell der sogenannten *Variablen Harten Kugeln* (VHS), welches aus dem Harte-Kugel-Modell entwickelt wurde, eine gute Näherung darstellt. In dem Modell der Variablen Harten Kugeln wird der totale Streuquerschnitt als Funktion der relativen kinetischen Energie in der Form

$$\sigma_{\mathrm{T}} \sim \left(\frac{1}{2} \times m_{\mathrm{r}} \times c_{\mathrm{r}}^2\right)^{-\omega}$$

angesetzt. Der Exponent ω stellt eine gasspezifische Größe dar. Damit beschreibt das VHS-Modell für die Spezialfälle $\omega = 0$ das Starrkugelmodell und für $\omega = 0.5$ die sogenannten Maxwell-Moleküle. Die Kollisionswahrscheinlichkeit der Maxwell-Moleküle ist unabhängig von der Relativgeschwindigkeit der Moleküle. Im folgenden Kapitel wird ausschließlich von diesem vereinfachten Wechselwirkungsmodell Gebrauch gemacht. Für Luft wird typischerweise ($\omega = 0.25$) verwendet.

2.2 Monte-Carlo-Simulation

Verfolgt wird konkret der zeitliche Verlauf der Bewegung und der elastischen bzw. inelastischen Kollisionen von einigen hunderttausend Gas-Modellpartikeln in einem vorgegebenen Simulationsgebiet.

Den Zugang zur gaskinetischen Simulation liefert die mit $x^* = x/L$, $\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{c}/\bar{c}$, $f^* \times \mathrm{d}c_{\mathrm{i}}^* = f \times \mathrm{d}c_{\mathrm{i}}/n$, $b^* \times \mathrm{d}b^* = b \times \mathrm{d}b/(\sqrt{2} \times \pi \times d^2)$ und $t^* = t/(L/\bar{c})$ dimensionslos gemachte Boltzmann-Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \boldsymbol{c}^* \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}^*}\right) f^* = \frac{1}{Kn} \times \iiint (f'^* \times f_1'^* - f^* \times f_1^*) \times c_{\mathrm{rel}}^* \times b^* \times \mathrm{d}b^* \times \mathrm{d}\varepsilon \times \mathrm{d}c_1^*, \tag{12.10}$$

die in Abschn. 4 des Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik eingeführt wurde. Die dimensionslose Boltzmann-Gleichung liefert identische Lösungen für Probleme mit der gleichen Knudsen-Zahl

$$Kn = \frac{\bar{\lambda}}{L} = \frac{1}{n \times \frac{\overline{\sigma \times c_{\mathrm{r}}}}{\bar{c}} \times L},$$

das heißt bei vorgegebener charakteristischer Länge L muss das Produkt aus Streuquerschnitt und Teilchendichte $\sigma \cdot n$ konstant gehalten werden, um eine identische Lösung zu erhalten. Damit kann man die reale Zahl von Molekülen in einer Strömung durch einige zehntausend Modellpartikel mit künstlich vergrößertem Streuquerschnitt ersetzen (Satz von Derzko 1972). Für die lokale Mittlung der makroskopischen Größen müssen jedoch genügend Teilchen zur Verfügung stehen.

Von der Vielzahl der numerischen Simulationsmethoden werden die direkte Monte-Carlo-Simulationsmethode (DSMC) und die Molecular-Dynamics-Methode (MD) ausgewählt. Bei der DSMC-Methode werden die Teilchen freimolekular bewegt und die Kollisionspartner statistisch ausgewählt. Im Gegensatz dazu werden bei der MD-Methode die Trajektorien der Teilchen exakt in der Zeit verfolgt. Bei Gasen findet eine Kollision nur statt, wenn sich zwei Teilchen bis auf ihren Streuquerschnitt angenähert haben. Bei Flüssigkeiten liegt eine permanente Wechselwirkung mit den Nachbarteilchen vor. Wegen des relativ hohen Rechenaufwandes der MD-Methode empfiehlt sich für Gase die heuristische DSMC-Methode. Als ergänzende Literatur für das Kapitel Berechnungsverfahren wird der Übersichtsartikel von Moss und Bird 1984 empfohlen.

Die direkte Monte-Carlo-Simulationsmethode (DSMC) wurde von Bird 1976 entwickelt und stellt ein leistungsfähiges, heuristisches Verfahren zur Untersuchung verdünnter Gasströmungen dar. Der entscheidende Unterschied zur MD-Methode besteht in der entkoppelten statistischen Behandlung der Bewegung und Kollisionen der Modellpartikel.

Bei diesem Verfahren werden die real im Strömungsfeld vorhandenen Moleküle durch Modellpartikel ersetzt. Es werden mehrere hunderttausend Modellpartikel verwendet. Der Anfangszustand wird, wie bei der MD-Methode, zufällig festgelegt (Abb. 12.4) und ändert sich durch die Bewegung und Kollisionen der Partikel mit der

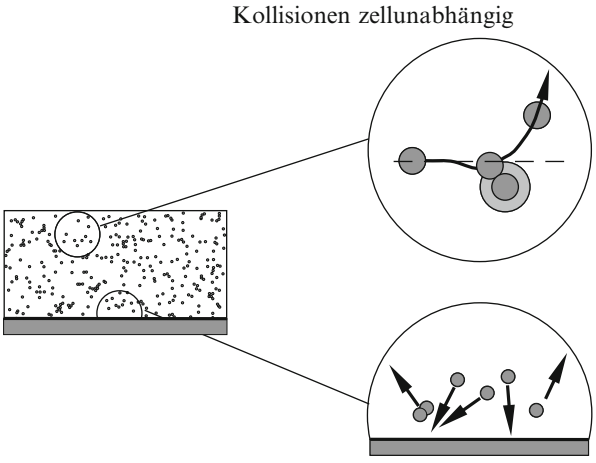


Abb. 12.4 Rechenablauf der DMSC-Methode

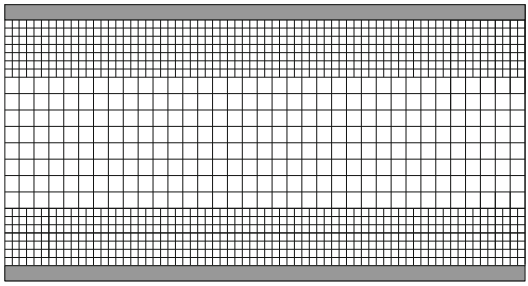


Abb. 12.5 Gitter für die Monte-Carlo-Simulation

Simulationszeit. Das Strömungsfeld wird zur Ermittlung makroskopischer Größen und zur Gewährleistung korrekter lokaler Kollisionsraten in Zellen unterteilt. Dieses Gitter kann entweder an den Körper angepasst oder rechteckig sein (Abb. 12.5).

Der zentrale Iterationsschritt der DSMC-Methode sieht folgendermaßen aus (siehe Abb. 12.4). Die Partikel werden entsprechend einem vorgegebenen Zeitschritt Δt_m bewegt. Partikel, die das Rechengebiet verlassen, werden entfernt und Kollisionen der Partikel mit der Oberfläche der Wand werden berechnet. Hier müssen die beschriebenen Wandwechselwirkungsmodelle an der Wandoberfläche berücksichtigt werden. An den Rändern des Strömungsfeldes werden aus Kontinuitätsgründen neue Partikel generiert. Es wird bestimmt, in welche Zelle jedes Partikel gehört. Umgekehrt wird nun für jede Zelle bestimmt, welche Partikel sich in ihr befinden. Für jede Zelle wird eine auf den Zeitschritt Δt_m abgestimmte Anzahl von Kollisionen durchgeführt. Die Positionen der Partikel bleiben dabei unverändert.

In der Art, wie die Anzahl der Kollisionen pro Zelle ermittelt und durchgeführt werden, unterscheiden sich die Verfahren von Bird 1976; Nanbu 1992 und Ivanov und Rogasinsky 1991.

Nach Bird 1976 ergibt sich die Anzahl, der Kollisionen pro Zelle über den Zeitschritt Δt_m zu

$$N_\mathrm{t} = \frac{1}{2} \times N_\mathrm{m} \times n \times \Delta t_\mathrm{m} \times \overline{\sigma \times c_\mathrm{r}}, \tag{12.11}$$

mit der Partikelzahl N_m pro Zelle, der Teilchendichte n, der Relativgeschwindigkeit c_r und dem Stoßquerschnitt σ der Stoßpartner.

Die Berechnung des Produktes $\overline{\sigma \times c_\mathrm{r}}$ ist sehr aufwendig, da alle möglichen Partikelkombinationen in einer Zelle zur Bildung des Mittelwertes herangezogen werden müssen. Bird 1976 führte deshalb einen Kollisionszeitzähler t_C ein, welcher nach jeder Kollision unter Verwendung des Stoßquerschnittes σ und der Relativgeschwindigkeit c_r der jeweiligen Stoßpartner um

$$\Delta t_\mathrm{C} = \frac{2}{N_\mathrm{r} \times n \times \sigma \times c_\mathrm{r}}$$

erhöht wird, bis dieser Zähler gleich der Simulationszeit ist. Dadurch wird im Mittel die nach Gl. (12.11) geforderte Kollisionszahl N_t im Zeitschritt Δt_m erreicht. Die

Kollisionspartner werden innerhalb der Zellen zufällig gewählt. Hieraus ergibt sich, dass eine Kollision zwischen zwei Partikeln umso wahrscheinlicher wird, je größer ihr Stoßquerschnitt und ihre Relativgeschwindigkeit wird.

Ist ein geeignetes Paar gefunden, so werden die sechs unbekannten Geschwindigkeitskomponenten der ausgewählten Stoßpartner berechnet. Dazu stehen die Impuls- und Energieerhaltungsgleichungen (12.8)–(12.9) zur Verfügung. Die Richtung des Relativgeschwindigkeitsvektors nach dem Stoß wird durch Zufallszahlen bestimmt, das Verfahren ist also im Gegensatz zur direkten Simulationsmethode nicht deterministisch.

Die Methode von Nanbu 1992 unterscheidet sich von der Birdschen Methode allein in der Behandlung des Kollisionsprozesses. Das rein phänomenologische Modell von Bird 1976 ersetzt Nanbu 1992 durch einen aus der Boltzmann-Gleichung abgeleiteten Kollisionsmechanismus. In diesem Verfahren ändert bei einer Kollision nur ein Teilchen seinen Zustand. Die Anzahl der Kollisionen über den Zeitschritt Δt_m ist

$$N_\mathrm{t} = N_\mathrm{m} \times n \times \Delta t_\mathrm{m} \times \overline{\sigma \times c_\mathrm{r}}.$$

Die Kollisionen finden mit einer Wahrscheinlichkeit

$$P_\mathrm{i} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{N_\mathrm{m}} \frac{n \times \Delta t_m}{N_\mathrm{m}} \times (\sigma \times c_\mathrm{r})_\mathrm{ij}$$

statt. Für jedes Partikel wird in einer Zelle die Wahrscheinlichkeit P_i berechnet, um dann mit einer Zufallszahl zu entscheiden, ob eine Kollision im Zeitintervall Δt_m stattfindet. Findet eine Kollision statt, wird für dieses Partikel ein Kollisionspartner ausgesucht.

Die Methode von Ivanov und Rogasinsky 1991 wird als *Majorant Frequency Scheme* bezeichnet. Im Unterschied zu Bird 1976 wird für jede Zelle eine obere Abschätzung der Kollisionszahl berechnet:

$$N_\mathrm{t,maj} = \frac{1}{2} \times N_\mathrm{m} \times n \times \Delta t_\mathrm{m} \times (\sigma \times c_\mathrm{r})_\mathrm{max}\,.$$

An die Stelle des Mittelwertes $\overline{\sigma \times c_\mathrm{r}}$ tritt der einfach zu bestimmende Maximalwert $(\sigma \times c_\mathrm{r})_\mathrm{max}$. Es werden nun für jede Zelle $N_\mathrm{t,maj}$ Kollisionspaare ermittelt. Die Kollisionen finden mit einer Wahrscheinlichkeit $\sigma \times c_\mathrm{r} / (\sigma \times c_\mathrm{r})_\mathrm{max}$ statt. Die Kollisionen die akzeptiert werden, bezeichnet man als reale Kollisionen, die verworfenen Kollisionen als fiktive Kollisionen. Für die realen Kollisionen werden die neuen Geschwindigkeiten wie beim Verfahren von Bird 1976 berechnet. Die Anzahl der realen Kollisionen ergibt den in Gl. (12.11) geforderten Wert.

Die Ivanovsche Methode bietet gegenüber der Birdschen Methode zwei Vorteile. Die Kollisionen lassen sich rechentechnisch effizienter berechnen. Damit kann die Rechenzeit erheblich reduziert werden. Man erhält statistisch bessere Ergebnisse für kleine Partikelzahlen, da im Verfahren von Bird 1976 unwahrscheinliche Kollisionen (mit kleinem $\sigma \times c_\mathrm{r}$) den Kollisionszeitzähler sehr weit vorrücken

lassen. Damit finden über einen großen Zeitraum keine Kollisionen mehr statt. Das Verfahren von Ivanov und Rogasinsky 1991 wurde mathematisch aus der Boltzmann-Gleichung hergeleitet. Ähnliche Methoden wurden inzwischen auch von anderen Autoren vorgestellt und werden in der Literatur als *No Time Counter Schemes* (NTC) bezeichnet.

Die Erhaltung des Drehimpulses ist bei den in diesem Abschnitt vorgestellten Verfahren nicht von vornherein sichergestellt. An Beispielen wurde jedoch nachgewiesen, dass der Drehimpuls erhalten bleibt, wenn genügend Partikel in einer Zelle vorhanden sind.

2.3 Molekulardynamische Simulation

Die *Molecular-Dynamics-Methode* (MD) ist dadurch gekennzeichnet, dass ausschließlich der Anfangszustand durch statistische Methoden festgelegt wird. Das weitere Vorgehen ist streng deterministisch, d. h. zu jedem späteren Zeitpunkt kann vom Zustand des Systems auf den Anfangszustand geschlossen werden. Zu Beginn Rechnung wird eine vorgegebene Anzahl Modellteilchen im Rechenraum unter der Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen positioniert. Jedem Partikel werden darauf die thermischen Geschwindigkeitskomponenten zugeordnet. Nach Überlagerung der makroskopischen Geschwindigkeit ist dann der Anfangszustand des Strömungsfeldes festgelegt. Diese Modellpartikel werden nun mit der zugeordneten Geschwindigkeit bewegt.

Molekulardynamische Simulationen sind bevorzugt dann einzusetzen, wenn eine andauernde nicht stoßförmige Wechselwirkung zwischen den Atomen bzw. Molekülen vorliegt. Dies ist in der Regel bei Flüssigkeiten und dichten Gasen der Fall. Eine Übersicht zu molekulardynamischen Simulationen ist bei Koplik und Banavar 1995 zu finden. Eine molekulardynamische Simulation berechnet explizit die Bewegung einer großen Zahl von Fluidmolekülen, welche gegebenenfalls in Wechselwirkung mit ihren Nachbarmolekülen bzw. einem Festkörper stehen. Es müssen demnach die Kräfte zwischen gleichen und unterschiedlichen Fluidmolekülen, sowie zwischen Fluid- und Festkörpermolekülen formuliert werden. Dies geschieht etwa mit Hilfe des Lennard-Jones-Potentials, welches die Wechselwirkung inerter, nicht ionisierter, nicht polarer, sphärischer Atome beschreibt. Nach Green 1960 erhalten wir, bei nicht zu kleinem Abstand r der Atome, für das Potential die Näherung:

$$\phi(r) \simeq -\frac{C_1}{r^6} + \frac{C_2}{r^{12}}. \tag{12.12}$$

Für große Abstände dominieren nach (12.12) anziehende Kräfte ($\phi \sim r^{-6}$), welche durch die gegenseitige Polarisierung der Elektronenhüllen zustande kommen (van-der-Waals-Kräfte). Für kleine Abstände werden abstoßende Kräfte bestimmend ($\phi \sim r^{-12}$), welche auf der Wechselwirkung der Elektronenhüllen beruhen. Die Konstanten C_1 und C_2 sind für viele Atome nach der Methode von Lennard-

Jones 1931 bestimmt worden. Die Wechselwirkung komplexer Fluidmoleküle, wie beispielsweise Dipolmoleküle oder Kettenmoleküle, kann durch die elastische Verbindung mehrerer Atome realisiert werden. Dies führt auf ähnliche komplexere Potentiale für ihre Wechselwirkungen.

Bei der Wechselwirkung zwischen Flüssigkeitsatomen und den Festkörperatomen der Wand ist zu berücksichtigen, dass die Festkörperatome in ein elastisches Gitter eingebunden sind. Durch Integration der elastischen Kräfte ergibt sich nach Abraham 1978 im einfachsten Fall ein Potential der Form:

$$\phi(r) \simeq -\frac{C_3}{r^4} + \frac{C_4}{r^{10}}. \tag{12.13}$$

Auch hier sind Modelle für realistische Moleküle in der Literatur zu finden. Die Ableitung $\partial\phi/\partial r$ des Potentials ist mit der Kraft auf die Moleküle verknüpft. In der Praxis beschränkt man sich darauf, nur die näheren Nachbarmoleküle zu berücksichtigen. Bei bekannter Kraft auf das Einzelmolekül kann mithilfe des Newtonschen Gesetzes die Molekülposition durch Zeitintegration aus der Beschleunigung numerisch ermittelt und verfolgt werden. Die Vorgabe kinematischer Randbedingungen entfällt. Auf molekularer Ebene ist die Wirkung fester Ränder auf das Fluid durch die Wechselwirkung der Festkörper- und Fluidmoleküle vollständig beschrieben. Thermische Randbedingungen werden durch die Vorgabe definierter Brownscher Molekularbewegung etwa der Festkörpermoleküle des Randes realisiert. Das kinematische und thermische Verhalten der Fluidmoleküle nahe der Rändern erlaubt umgekehrt Rückschlüsse auf die makroskopischen Randbedingungen.

Es gelingt, bei erheblichem numerischem Aufwand, die Bewegung der Fluidmoleküle, gegebenenfalls mit Übergängen zwischen flüssiger und gasförmiger Phase, sowie bei Wechselwirkung mit Festkörpern oder anderen Fluiden im Detail zu simulieren. Ist die Bewegung der Einzelmoleküle bekannt, wird das Verhalten makroskopischer Fluidportionen zugänglich. Die Bewegung des Kontinuums wird durch Mittelung über eine große Anzahl von Molekülen erhalten, wobei die Anzahl die räumliche Auflösung festlegt. Eine weitere Mittelung in der Zeit eliminiert die thermisch bedingte statistische Bewegung der Moleküle. Begrenzt durch die Rechenzeit solcher Simulationen sind Molekülzahlen von einigen hunderttausend Molekülen sowie eine zeitliche Begrenzung der Simulationen zwingend. Es werden Gebiete von der Abmessung einiger hundert Angström für einige Nanosekunden simuliert. Die molekulardynamischen Simulation eignet sich damit besonders, den Grenzbereich zwischen molekularen Vorgängen und der kontinuumsmechanischen Betrachtung zu studieren. Dies ist besonderes von Interesse an festen Wänden oder an (bewegten) Phasengrenzen.

3 Kontinuum-Modelle

Unter der Voraussetzung, dass die Kontinuumsannahme gültig ist, können die entsprechenden kontinuumsmechanischen Erhaltungsgleichungen als Grundlage dienen. Gegenüber konventionellen Strömungen sind auf kleinen Längenskalen

gegebenenfalls Modifikationen oder zusätzliche Effekte zu berücksichtigen, welche im Folgenden diskutiert werden.

3.1 Ähnlichkeits-Diskussion

Die Auswirkung kleiner Längenskalen kann formal mit Hilfe der Ähnlichkeitsgesetze beantwortet werden. Hierzu ist es sinnvoll, zunächst die Größenordnung der dimensionsbehafteten Größen abzuschätzen. Dabei wird der Vorgehensweise von Herwig 2002 gefolgt. Man unterscheidet bei den Mikroströmungen zwei typische Anwendungen, nämlich ein miniaturisiertes Analyselabor und einen Mikrowärmetauscher (siehe Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik, Abb. 12), wobei zunächst das miniaturisierte Analyselabor der Abb. 12.1 diskutiert wird. In der folgenden Tabelle sind die Abschätzungen für Makroströmungen und für Mikroströmungen gegeben.

		Makroströmung	Mikroströmung	Mikro-Makroströmung
Kanalweite	d	$\approx 10^{-2}$ m	$\approx 10^{-5}$ m	$\approx 10^{-3}$
Kanallänge	l	≈ 1 m	$\approx 10^{-2}$ m	$\approx 10^{-2}$
Geschwindigkeit	$\bar{u}$	≈ 1 m/s	$\approx 10^{-3}$ m/s bis 1 m/s	$\approx 10^{-3}$ bis 1

Kanäle oder Rohre in Makroströmungen haben typisch einige cm Kanalweite, während für Mikroströmungen einige $10\,\mu$m Kanalweite unterstellt werden. Entsprechend erwartet man für die Kanallänge in Makroströmungen einige m und in Mikroströmungen einige cm. Die mittleren Geschwindigkeiten in Makroströmungen liegen typisch bei einigen m/s, während in Mikroströmungen einige mm/s im miniaturisierten Analyselabor auftreten. Die Festlegung der Größen d, l und $\bar{u}$ kann durchaus um eine Zehnerpotenz verschoben werden. Dies ändert lediglich die Größenordnung, nicht aber die Tendenz der folgenden Aussagen. Basierend auf diesen abgeschätzten Größen d, l und $\bar{u}$ wird es möglich, andere Größen wie Druckabfall, Massen- und Volumenstrom, Kräfteverhältnisse und thermische Größen abzuschätzen. Dabei wird unterstellt, dass die Fluideigenschaften in der Makro- und in der Mikroströmung gleiche Größenordnung haben. Weiterhin ist es ausreichend, das Verhältnis der Größen in der Mikro- und Makroströmung in der folgenden Tabelle zu betrachten.

		Mikro-Makroströmung
Druckabfall	Δp	≈ 10 bis 10^4
Volumen-, Massenstrom	$\dot{m}, \dot{V}$	$\approx 10^{-9}$ bis 10^{-6}
Reynolds-Zahl, F_T/F_R	Re	$\approx 10^{-6}$ bis 10^{-3}
F_S/F_R	Re/Fr	$\approx 10^{-3}$ bis 10^{-6}
F_G/F_R	Re/We	$\approx 10^3$ bis 1

Der laminare Druckabfall in einem Kanal folgt der Abhängigkeit $\Delta p \sim \bar{u} \cdot l/d^2$. Demnach ist in Mikrokanälen ein höherer Druckabfall zu erwarten als in Makrokanälen. Die Volumen- und Massenströme in Kanälen verhalten sich gemäß $\dot{m}, \dot{V} \sim \bar{u} \cdot d^2$, so dass in Mikrokanälen deutlich kleinere Volumen- und Massenströme auftreten werden.

Zur Bewertung der maßgeblichen Kräfte in der Strömung erweisen sich Kennzahlen auf Basis von Kräfteverhältnissen als aussagekräftig. Die Reynolds-Zahl charakterisiert das Verhältnis von Trägheitskräften F_T und Reibungskräften F_R. Sie verhält sich gemäß $Re \sim \bar{u} \cdot d$ und wird in Mikrokanälen deutlich kleiner als in Makrokanälen sein. In der Regel dominieren deshalb die Reibungskräfte, und ein Übergang zu turbulenter Strömung ist wegen schwacher Trägheitskräfte nicht zu erwarten. Gleichzeitig erscheint es sinnvoll, die weiteren Kräfte mit der Reibungskraft zu vergleichen. Die Stokes-Zahl, welche das Verhältnis von Druckkräften F_D und Reibungskräften F_R angibt, ist demgemäß stets $Sto = F_\mathrm{D}/F_\mathrm{R} \approx 1$. Das Verhältnis aus Schwerkraft F_S und Reibungskraft F_R kann gemäß $Re/Fr \sim d^2/\bar{u}$ mit Hilfe der Reynolds-Zahl und der Froude-Zahl $Fr = F_\mathrm{T}/F_\mathrm{S}$ ausgedrückt werden. In Mikrokanälen werden sich die Schwerkraft, oder allgemein Volumenkräfte, deshalb deutlich schwächer als in Makrokanälen auswirken. Das Verhältnis aus Kapillarkräften F_G und Reibungskräften F_R kommt im Quotienten $Re/We \sim 1/\bar{u}$ zum Ausdruck. Hierin tritt die Weber-Zahl $We = F_\mathrm{T}/F_\mathrm{G}$ auf. In Mikrokanälen kann somit ein größerer Einfluss der Kapillarkräfte, oder allgemein der Grenzflächenkräfte, erwartet werden. Bei einphasiger Strömung sind nach anfänglicher Benetzung keine Fluid-Fluid-Grenzflächen präsent, so dass in diesem Fall keine Kapillarkräfte auftreten. Gleichwohl können an Fluid-Wand-Grenzflächen Kräfte auftreten, welche etwa durch elektrische Felder verursacht werden. Auch solche Grenzflächenkräfte folgen der Abhängigkeit $\sim Re/We$. Der starke Einfluss aller Grenzflächenkräfte hängt mit dem extrem großen Verhältnis von Oberfläche und Volumen in Mikrokanälen zusammen. Dies legt den Schluss nahe, dass auch Wärme- und Stoffübertragung in Mikrokanälen, weil sie durch die Übertragungsfläche bestimmt werden, sehr effizient möglich sind.

Nach Betrachtung der mechanischen Aspekte wird der Aspekt des Wärmetransports und der Wärmeübertragung näher beleuchtet. In der folgenden Tabelle sind die zugehörigen Verhältnisse von Mikro- und Makroströmung angegeben.

		Mikro-Makroströmung
Aufheizspanne	ΔT	$\approx (10^4)$ bis 10
Wärmeleitanteil	$\dot{q}_\mathrm{WL}/\dot{q}_\mathrm{K}$	$\approx (10^5)$ bis 10^2

Aufgrund der Analogie zwischen Wärme- und Stofftransport sind diese Überlegungen direkt auf den Stofftransport übertragbar. Man erwärmt hierzu die Kanalwand gegenüber dem Fluid und fragt, um welche Aufheizspanne ΔT sich das Fluid beim Durchlauf durch den Kanal erwärmt. Man findet hier die Abhängigkeit $\Delta T \sim l/(d \cdot \bar{u})$, womit gemäß der Tabelle eine deutlich höhere Aufheizspanne ΔT im Mikrokanal folgt. Eine solch große Aufheizspanne ist natürlich nicht sinnvoll, weil das Fluid in kürzester Zeit die Wandtemperatur annimmt und deshalb im

restlichen Teil des Kanals keine Wärmeübertragung erfolgt. Es ist deshalb geboten, in einem Mikrokanal zur Wärmeübertragung deutlich höhere Strömungsgeschwindigkeiten von einigen m/s zu wählen. Damit wird eine moderate Aufheizspanne erreicht, wie sie in einem Wärmetauscher sinnvoll ist. Leider erhöht die große Strömungsgeschwindigkeit den Druckabfall erheblich. Die Tendenz der Aussagen zur Trägheitskraft F_T und zur Schwerkraft F_S bleibt bei Verschiebung der Größenordnungen erhalten. Die Kapillar- bzw. Grenzflächenkräfte F_G werden hingegen bei dieser Parameterwahl eine schwächere Rolle spielen. Zur Charakterisierung des Wärmetransports bieten sich Quotienten aus Wärmeströmen an. Das Verhältnis aus diffusiv durch Wärmeleitung transportierter Wärme $\dot{q}_{WL}$ und konvektiv transportierter Wärme $\dot{q}_K$ verhält sich gemäß $\dot{q}_{WL}/\dot{q}_K \sim 1/(l \cdot \bar{u})$. Man kann deshalb davon ausgehen, dass die im Fluid durch Wärmeleitung axial transportierte Wärme in Mikrokanälen deutlich wichtiger ist als in Makrokanälen. Ähnliches gilt im Übrigen für die axiale Wärmeleitung in der Wand.

3.2 Modifikationen der Randbedingungen

Es wurde bereits in Abschn. 1.3 abgeleitet, dass insbesondere Gase bei wachsender Knudsen-Zahl an festen Wänden gleiten. Wir beschränken uns deshalb in diesem Abschnitt auf die Besonderheiten der Gasströmung durch einen Mikrokanal. Davon abgesehen zeigt Abschn. 1.4, dass auch Flüssigkeiten bei hohen Scherraten an Wänden gleiten. Zur Modellierung kann etwa das Gleitgesetz (12.5) verwendet werden. Die Gleitlänge bei Flüssigkeiten ist jedoch zum Ersten sehr klein und zum Zweiten sind bisher nur wenige gesicherte Informationen zum Gleiten von Flüssigkeiten in der Literatur verfügbar.

Für das isotherme Verhalten der Gasmoleküle an festen Wänden werden zunächst zwei idealisierte Grenzfälle diskutiert. Maxwell 1879 charakterisiert in der kinetischen Theorie verdünnter Gase das Verhalten sphärischer Gasmoleküle an molekular glatten Festkörpern. Hiernach erhält jedes Gasmolekül bei Kollision mit der Wand ($z = 0$) seinen tangentialen Impuls dadurch, dass eine spiegelsymmetrische Reflexion auftritt (siehe Abb. 12.6). Somit ändert sich lediglich der

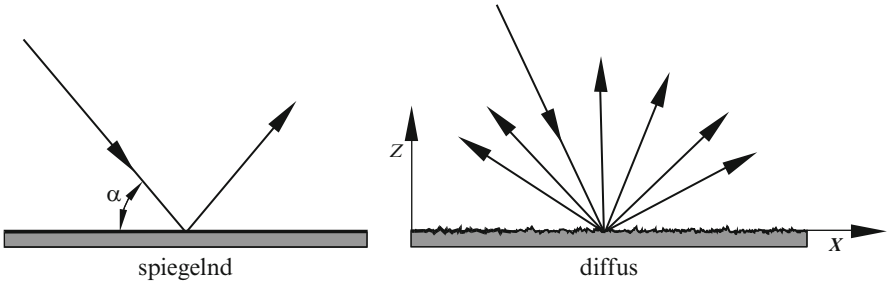


Abb. 12.6 Spiegelsymmetrische und diffuse Reflexion von Gasmolekülen

normale Impuls der Gasmoleküle. Der fehlende Austausch von tangentialem Impuls zwischen Gasmolekülen und Wand ist gleichbedeutend mit perfektem Gleiten der Gasmoleküle. Das Gas überträgt keine Schubspannung auf die Wand. Unterstellt man eine raue Wand, so ändert sich die Situation grundlegend. Durch die Rauigkeit erfolgt die Reflexion der Gasmoleküle statistisch verteilt in alle Richtungen. Im Mittel haben deshalb die Gasmoleküle nach der Reflexion keinen tangentialen Impuls mehr. Das Übertragen des tangentialen Impulses an die Wand entspricht einer endlichen Schubspannung. Eine Kräftebilanz führt auf das Gleitgesetz

$$u(z=0) - u_{\mathrm{w}} = \bar{\lambda} \times \frac{\partial u}{\partial z}(z=0), \tag{12.14}$$

mit der mittleren freien Weglänge $\bar{\lambda}$. Diese Reflexion wird als diffuse Reflexion bezeichnet, weil zwischen Einfallsrichtung und zufälliger Reflexionsrichtung keine Korrelation besteht.

Reale Wände sind dadurch gekennzeichnet, dass ein kleiner Teil der Gasmoleküle spiegelsymmetrisch und ein großer Teil diffus reflektiert wird. Um die Wand zu charakterisieren, führt man einen Kollisionskoeffizienten σ_{v} ein, der den Anteil der diffus reflektierten Moleküle an der Gesamtzahl der Reflexionen angibt. σ_{v} befindet sich für reale Wände im Bereich $\sigma_{\mathrm{v}} = 0.2-0.8$, wobei der Wert 0.2 für ausnehmend glatte Wände auftritt und der Wert 0.8 für technisch relevante raue Wände. Unter Verwendung von σ_{v} kann das Gleitgesetz gemäß

$$u(z=0) - u_{\mathrm{w}} = \frac{2-\sigma_{\mathrm{v}}}{\sigma_{\mathrm{v}}} \times \bar{\lambda} \times \frac{\partial u}{\partial z}(z=0), \tag{12.15}$$

verallgemeinert werden. Für $\sigma_{\mathrm{v}} \to 1$ geht (12.15) in (12.14) über und beschreibt die perfekt diffus reflektierende Wand. Der Grenzfall $\sigma_{\mathrm{v}} \to 0$ führt in (12.15) zur vollständigen Entkopplung von Gleitgeschwindigkeit und Scherrate, was letztlich perfektes Gleiten bedeutet.

Häufig sind die Verhältnisse nicht isotherm, so dass weitergehend der Einfluss der Fluidtemperatur T und der Wandtemperatur T_{w} berücksichtigt werden muss. Für $T \neq T_{\mathrm{w}}$ ist die Gleitbedingung (12.15) zu modifizieren, und eine Bedingung für den Temperatursprung tritt hinzu. Nach Schaaf und Chambré 1961 ergibt sich:

$$u(z{=}0) - u_{\mathrm{w}} = \frac{2-\sigma_{\mathrm{v}}}{\sigma_{\mathrm{v}}} \times \bar{\lambda} \times \frac{\partial u}{\partial z}(z{=}0) + \frac{3}{4} \times \frac{\mu}{\rho \times T(z{=}0)} \times \frac{\partial T}{\partial x}(z=0), \tag{12.16}$$

$$T(z=0) - T_{\mathrm{w}} = \frac{2-\sigma_{\mathrm{t}}}{\sigma_{\mathrm{t}}} \times \frac{2 \times \kappa}{\kappa+1} \times \frac{\bar{\lambda}}{Pr} \times \frac{\partial T}{\partial z}(z=0). \tag{12.17}$$

In (12.17) tritt, analog zu σ_{v}, der thermische Kollisionskoeffizient σ_{t}, das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\kappa = c_p/c_v$ sowie die Prandtl-Zahl $Pr = \nu/k$ auf. Dabei bezeichnet ν die kinematische Viskosität und k die Temperaturleitfähigkeit des Gases. Der zweite Term auf der rechten Seite der Gleitbedingung (12.16) wird

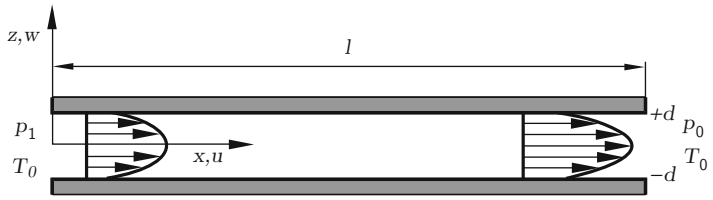


Abb. 12.7 Gasströmung durch einen Mikrospalt

als *thermisches Kriechen* bezeichnet. Hat ein Gas an der Wand, etwa infolge der Wandtemperatur $T_w(x)$, einen wandtangentialen Temperaturgradienten $\partial T/\partial x > 0$, so kommt es zu einer Geschwindigkeit $u > u_w$ in Wandnähe. Dieser Umstand wird in einer Knudsen-Pumpe ausgenutzt, welche zum Pumpen verdünnter Gase eingesetzt werden kann und ohne bewegliche Teile das Gas in einem Rohr von der kalten Zone in die warme Zone fördert.

Die Auswirkung der Gleitbedingung (12.15) wird anhand eines einfachen Beispiels diskutiert. Man wählt hierzu eine isotherme Gasströmung durch einen Mikrospalt, der in Abb. 12.7 skizziert ist. Der Spalt hat die Höhe $2 \cdot d$ und die Länge l. In der y-Richtung ist der Spalt nicht begrenzt, so dass der mathematischen Aufwand klein gehalten wird und die physikalischen Effekte erläutert werden können. Die Strömung wird durch die Druckdifferenz $p_1 - p_0 > 0$ angetrieben. Zur Vereinfachung wird eine stationäre, ebene und im wesentlichen parallele Strömung ($u \gg w$) vorausgesetzt. Diese Annahmen sind für einen schlanken Spalt ($d \ll l$) in guter Näherung erfüllt. Selbstredend ist auch die Annahme einer isothermen Strömung eine Näherung, indem die Dissipation vernachlässigt wird. Ausgangspunkt für die mathematische Beschreibung des Problems sind somit die Kontinuitätsgleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. 1) und die Navier-Stokes-Gleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. 18). Mit den eingeführten Näherungen erhält man

$$\frac{\partial(\rho \times u)}{\partial x} \simeq 0, \tag{12.18}$$

$$\rho \times u \times \frac{\partial u}{\partial x} \simeq -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \times \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{12.19}$$

Für den Fall einer schleichenden Strömung ($Re_d \ll 1$), die häufig in Mikrokanälen gegeben ist, entfällt in der Impulsgleichung (12.19) der konvektive Term, und man kann die Gleichung unter Einhaltung der Randbedingungen (12.15) bei $z = \pm d$ integrieren, mit dem Ergebnis:

$$u(x,z) = -\frac{d^2}{2 \times \mu} \times \frac{\partial p}{\partial x} \times \left[1 - \left(\frac{z}{d}\right)^2 + 4 \times Kn \times \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v}\right]. \tag{12.20}$$

Die ersten beiden Terme in Gl. (12.20) geben die wohlbekannte Poiseuille-Strömung zwischen zwei Platten wieder, der dritte Term ist für das Gleiten des

Gases verantwortlich. Die lokale Knudsen-Zahl $Kn(x) = \bar{\lambda}(x)/(2 \times d)$ in Gl. (12.20) hängt über die mittlere freie Weglänge $\bar{\lambda}$ vom Druck $p(x)$ ab. Für ein ideales Gas erhält man bei gegebener Temperatur T_0 den Zusammenhang:

$$Kn = \frac{\mu}{2 \times d} \times \sqrt{\frac{\pi \times R \times T_0}{2}} \times \frac{1}{p}, \tag{12.21}$$

mit der speziellen Gaskonstanten R. Weil der Druck längs des Spaltes kontinuierlich abfällt ($\partial p/\partial x < 0$), wird die Knudsen-Zahl längs des Spaltes entsprechend anwachsen. Gemäß Gl. (12.21) ergibt sich am Spalteintritt ($x = 0$) deshalb schwaches Gleiten, während am Spaltaustritt ($x = l$) stärkeres Gleiten vorliegt. Das Gleiten des Gases an der Wand nimmt also längs des Spaltes zu. Die entsprechenden Geschwindigkeitsprofile sind in Abb. 12.7 qualitativ eingetragen.

Die Auswirkungen der modifizierten Gleitrandbedingung auf die Gasströmung im Spalt kann man anhand von Experimenten bestätigen. Shih et al. 1995 haben Experimente mit Helium in einem Mikrospalt von $2 \cdot d = 1.2\,\mu\text{m}$ Höhe und $l = 4000\,\mu\text{m}$ Länge durchgeführt. Die Spaltweite im Experiment ist $\Delta y = 40\,\mu\text{m}$. Die Autoren variieren den Eintrittsdruck p_1, der Austritt erfolgt in die Atmosphäre und der Druck innerhalb des Mikrospalts wird mithilfe von in die Wand integrierten Sensoren gemessen. Die lokale Knudsen-Zahl variiert etwa bei einem Eintrittsdruck von $p_1 = 1.6 \cdot 10^5\,\text{Pa}$ im Bereich $0.1 \leq Kn \leq 0.16$. Die Abb. 12.8 zeigt exemplarisch Messungen des Massenstroms $\dot{m}$ als Funktion der Druckdifferenz $p_1 - p_0$. Der Massenstrom kann ebenfalls durch Integration aus der Lösung (12.20) gemäß

$$\dot{m} \simeq \rho \times \Delta y \times \int_{-d}^{d} u \times \mathrm{d}z, \tag{12.22}$$

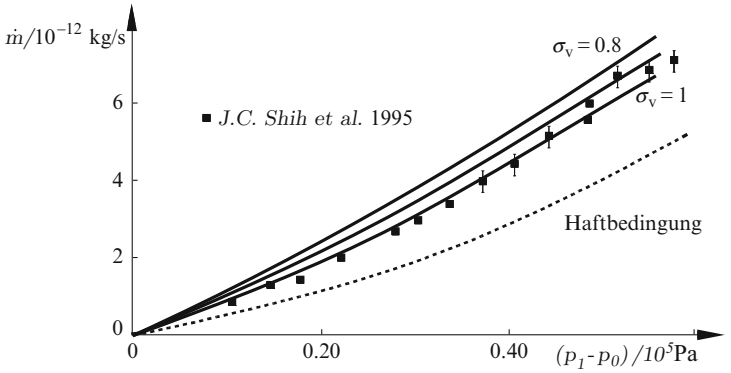


Abb. 12.8 Gasmassenstrom im Mikrospalt, Shih et al. 1995

mit $\Delta y = 40\,\mu\text{m}$, berechnet werden. In Abb. 12.8 sind zum Vergleich die Ergebnisse des theoretischen Modells bei Verwendung der Haftbedingung und bei Verwendung verschiedener Gleitbedingungen mit $\sigma_v = 0.8, 0.9$ und 1 eingetragen. Man erkennt zum einen, dass das Modell mit der Haftbedingung den Massenstrom deutlich unterschätzt. Zum anderen stimmen die Messdaten und das Modell mit Gleiten für $\sigma_v = 0.9$ und 1 gut überein. Ein Kollisionskoeffizient von $\sigma_v \simeq 1$ ist gleichbedeutend mit einer molekular rauen Wand, welche überwiegend diffuse Reflexion der Gasmoleküle bedingt. Diese experimentellen Befunde im gasdurchströmten Mikrospalt belegen, dass die Verwendung modifizierter Randbedingungen für Knudsen-Zahlen im Bereich $Kn \approx 0.1$ notwendig ist.

3.3 Elektrokinetische Effekte

Elektrokinetische Effekte sind durch die Wechselwirkung elektrischer Felder mit Ladungen innerhalb von Fluiden charakterisiert. Ladungen treten etwa in wässrigen Lösungen in Form freier Ionen auf. Auch Gase können unter bestimmten Bedingungen ionisiert vorliegen. Wir beschränken uns in der folgenden Diskussion auf Flüssigkeiten mit freien Ionen, wie sie etwa in einem miniaturisierten Analyselabor auftreten. Unter elektrokinetischen Effekten werden die Elektroosmose, die Elektrophorese, das Strömungspotential und das Sedimentationspotential verstanden. Während die Elektroosmose und die Elektrophorese die Auswirkung elektrischer Felder auf die Strömung und den Stofftransport beinhalten, stellen das Strömungspotential und das Sedimentationspotential die Umkehrung dieser Effekte dar. Sie beinhalten demnach die Auswirkungen der Strömung und des Stofftransports über den Ladungstransport auf das elektrische Feld. Im Folgenden werden die beiden ersten Effekten behandelt, in Teilen folgen wir dem Übersichtsartikel von Sharp et al. 2002 sowie dem Buch von Dongqing Li 2004.

3.3.1 Elektrische Doppelschicht

Liegt eine Flüssigkeit mit freien Ionen vor, so wird diese in ihrem Innern eine gleiche Zahl negativer und positiver Ionenladungen aufweisen. Sie ist demnach elektrisch neutral. Die Anwendung eines elektrischen Feldes führt nun infolge von Coulomb-Kräften zur Wanderung beider Ionensorten zur jeweils entgegengesetzt geladenen Elektrode. Dies hat im Allgemeinen keine Bewegung der Flüssigkeit zur Folge, weil die unterschiedlich geladenen Ionen in entgegengesetzte Richtungen wandern. In anderen Worten, im elektrisch neutralen Innern resultieren keine Kräfte auf die Flüssigkeit.

Die Situation an Grenzflächen (flüssig-fest, flüssig-flüssig, flüssig-gasförmig) unterscheidet sich grundlegend vom Innern der Flüssigkeit. Hier ist eine Wechselwirkung verschiedenartiger Moleküle bzw. Atome möglich, so dass die elektrische Neutralität im Allgemeinen nicht mehr gegeben ist. Es werden exemplarisch die Gegebenheiten an einer flüssig-fest-Grenzfläche betrachtet. Je nach chemischer Zusammensetzung von Wand und Flüssigkeit, kann es dort zur Adsorption von Ionen aus der Flüssigkeit oder zur Lösung von Molekülen bzw. Atomen aus

der Wand kommen (siehe Hunter 1981). Beides führt dazu, dass auf der Wand Oberflächenladungen entstehen, welche entgegengesetzt geladene Ionen aus der Flüssigkeit anziehen und gleichgeladene Ionen abstoßen. Es kommt demnach in der Flüssigkeit zu einer elektrisch nicht neutralen Schicht, der sogenannten elektrischen Doppelschicht. Es ist diese elektrische Doppelschicht innerhalb der elektrische Kräfte auf die Flüssigkeit wirken, wenn man ein elektrisches wandtangentiales Feld von außen anlegt. Anschaulich führt die Bewegung der überschüssigen Ionen durch viskose Effekte zur Bewegung der Flüssigkeit. Diese wandtangentiale Bewegung infolge eines elektrischen Feldes wird als Elektroosmose bezeichnet. Die Elektroosmose tritt natürlich sowohl in Mikrokanälen als auch in großen Kanälen auf. Während in Mikrokanälen die elektrischen Kräfte wichtig werden können, treten sie in großen Kanälen gegenüber den anderen Kräften meist in den Hintergrund. Dies hängt auch damit zusammen, dass die elektrische Doppelschicht sehr dünn ist.

Zur Modellierung der elektrischen Kräfte in den Navier-Stokes-Gleichungen benötigt man ein Modell für die Ladungsverteilung in der elektrischen Doppelschicht. Eine Übersicht der Modelle findet sich bei Hunter 1981. Das Gouy-Chapman-Stern-Modell geht von einer immobilen Schicht von Gegenionen unmittelbar an der Wand aus (Stern-Schicht). In Abb. 12.9 erkennt man in wandnormaler Richtung z weiter eine Scherschicht mit eingeschränkter Beweglichkeit und die frei bewegliche diffuse Schicht (Gouy-Chapman-Schicht), bevor das elektrisch neutrale Innere der Flüssigkeit erreicht ist. Konzeptionell sind die Stern-Schicht und die Scherschicht, d. h. die ersten beiden Schichten, der unbeweglichen Wand zuzuordnen.

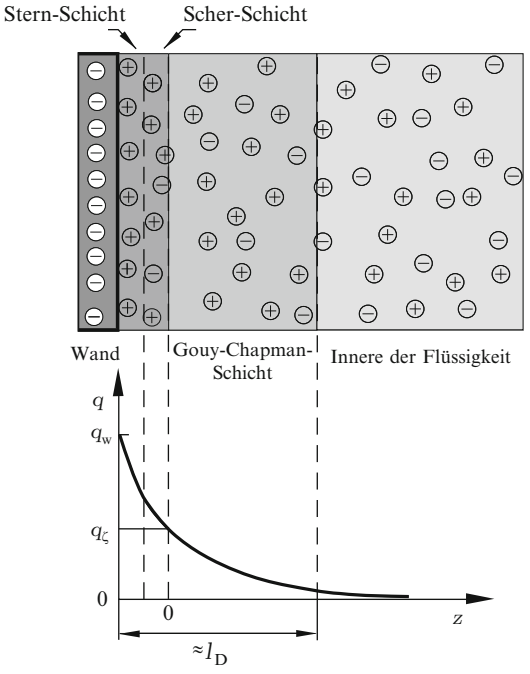


Abb. 12.9 Aufbau und Ladungsdichte der elektrischen Doppelschicht

Für alle folgenden Betrachtungen wird von einer ebenen Wand und einer Flüssigkeit mit konstanten Eigenschaften ausgegangen. Innerhalb der Gouy-Chapman-Schicht besteht ein Wechselspiel von elektrostatischen Kräften und diffuser Wärmebewegung. Die elektrische Ladungsdichte q kann demnach aus den Boltzmann-Verteilungen der verschiedenen Ionenspezies gemäß

$$q = e \times \sum_{\mathrm{i}} z_{\mathrm{i}} \times n_{\mathrm{i},\infty} \times \exp\left(\frac{-z_{\mathrm{i}} \times e \times \varphi}{k_{\mathrm{B}} \times T}\right) \tag{12.23}$$

summiert werden. Hierin ist e die Elementarladung, z_{i} die Valenzzahl und $n_{\mathrm{i},\infty}$ die Ionendichte der Spezies i im elektrisch neutralen Innern der Flüssigkeit. k_{B} ist die Boltzmann-Konstante, φ das elektrische Potential und T die Temperatur. Weiterhin besteht zwischen der elektrischen Ladungsdichte q und dem elektrischen Potential φ der Zusammenhang

$$\nabla\left(\varepsilon_{\mathrm{r}} \times \nabla\varphi\right) = -\frac{q}{\varepsilon_0}, \tag{12.24}$$

wobei ε_{r} die Dieelektrizitätszahl und ε_0 die elektrische Feldkonstante sind und das Produkt $\varepsilon_{\mathrm{r}} \times \varepsilon_0$ die Dieelektrizität der Flüssigkeit charakterisiert. Die Verknüpfung der Gl. (12.23) und (12.24) liefert eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung zur Bestimmung von φ. Ist die Energie der thermischen Bewegung viel größer als die der elektrostatischen Kräfte, d. h. für $|z_{\mathrm{i}} \times e \times \varphi| \ll |k_{\mathrm{B}} \times T|$, kann die Exponentialfunktion linearisiert werden und man erhält die sogenannte Debye-Hückel-Approximation (siehe Debye und Hückel 1923). Im Rahmen dieser Approximation ergibt sich die Lösung für die Ladungsdichte in der diffusen Gouy-Chapman-Schicht zu

$$q(z) \simeq \frac{q_\zeta}{l_{\mathrm{D}}} \times \exp\left(\frac{-z}{l_{\mathrm{D}}}\right). \tag{12.25}$$

In Gl. (12.25) ist q_ζ die scheinbare Wandladungsdichte, welche gemäß $q_\zeta = -\zeta \times \varepsilon_{\mathrm{r}} \times \varepsilon_0 / l_{\mathrm{D}}$ mit dem Zeta-Potential ζ, dem Potential an der Grenze zwischen Scherschicht und Gouy-Chapman-Schicht, verknüpft ist. l_{D} ist die sogenannte Debye-Länge, die ein Maß für die Dicke der elektrischen Doppelschicht darstellt. Es ist

$$l_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}} \times \varepsilon_0 \times k_{\mathrm{B}} \times T}{e^2 \times \sum_{\mathrm{i}} z_{\mathrm{i}}^2 \times n_{\mathrm{i},\infty}}}. \tag{12.26}$$

3.3.2 Elektroosmose

Eine elektroosmotische Strömung kann bei Kenntnis der elektrischen Ladungsdichten in den elektrischen Doppelschichten und im Innern der Flüssigkeit ($q = 0$) modelliert werden, indem in den Navier-Stokes-Gleichungen eine elektrische Volu-

menkraft berücksichtigt wird (siehe Hunter 1981). Man erhält dann das Gleichungssystem

$$\nabla \boldsymbol{v} = 0, \tag{12.27}$$

$$\rho \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \times \nabla)\, \boldsymbol{v} \right) = -\nabla p + \mu \times \Delta \boldsymbol{v} - q \times \nabla \varphi, \tag{12.28}$$

als Grundlage und es verbleibt das elektrische Potential φ zu bestimmen. Allgemein kann das elektrische Potential, wegen der zugrundeliegenden linearen Gleichungen, aus einer additiven Überlagerung des von außen angelegten Feldes und des in elektrischen Doppelschichten selbstinduzierten Feldes berechnet werden. Das selbstinduzierte elektrische Feld ist im Rahmen der Debye-Hückel-Approximation durch die Gl. (12.24) und (12.25) bekannt. Das von außen angelegte Feld ist, je nach Leitfähigkeit der Flüssigkeit, aus dem Gauß-Gesetz elektrostatisch oder aus dem Ohmschen Gesetz elektrodynamisch zu berechnen. Beide Gesetze führen in elektrisch neutralem Gebiet für konstante Stoffeigenschaften auf eine Laplace-Gleichung für das elektrische Potential φ. Als Randbedingungen sind etwa die Potentiale an Elektroden oder räumliche Ableitungen des Potentials zu verwenden. Eine weiterführende Diskussion dieser Aspekte findet sich bei Barz 2005.

Es wird exemplarisch die elektroosmotische Strömung in einem Mikrospalt diskutiert. In Abb. 12.10 ist dieser Mikrospalt der Höhe $2 \cdot d$ und der Länge l skizziert, in der y-Richtung ist der Spalt nicht begrenzt. Um eine einfache mathematische Behandlung zu erreichen, wird eine stationäre, ebene und ausgebildete Strömung angenommen, die durch eine Druckdifferenz $p_1 - p_0 > 0$ und ein homogenes äußeres elektrisches Feld mit $\partial\varphi/\partial x = konstant$ und $\partial\varphi/\partial z = 0$ angetrieben wird. Bei Berücksichtigung der elektrischen Doppelschichten an beiden Wänden ($z = \pm d$), erhält man unter den gegebenen Annahmen für die x-Komponente der Navier-Stokes-Gleichung:

$$0 \approx -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \times \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{q_\zeta}{l_\mathrm{D}} \times \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \left[\exp\left(-\frac{z+d}{l_\mathrm{D}} \right) + \exp\left(\frac{z-d}{l_\mathrm{D}} \right) \right]. \tag{12.29}$$

In Gl. (12.29) tritt nur das äußere Feld $\partial\varphi/\partial x$ auf, da die selbstinduzierten Felder lediglich Anteile in der z-Richtung aufweisen. Gl. (12.29) kann bei Einhaltung der Haftbedingung an den Wänden integriert werden, mit dem Ergebnis (siehe Burgreen und Nakache 1964):

$$\begin{aligned} u(z) = &-\frac{d^2}{2 \times \mu} \times \frac{\partial p}{\partial x} \times \left[1 - \left(\frac{z}{d} \right)^2 \right] \\ &- \frac{2 \times q_\zeta \times l_\mathrm{D}}{\mu} \times \exp\left(-\frac{d}{l_\mathrm{D}} \right) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \left[\cosh\left(\frac{d}{l_\mathrm{D}} \right) - \cosh\left(\frac{z}{l_\mathrm{D}} \right) \right]. \end{aligned} \tag{12.30}$$

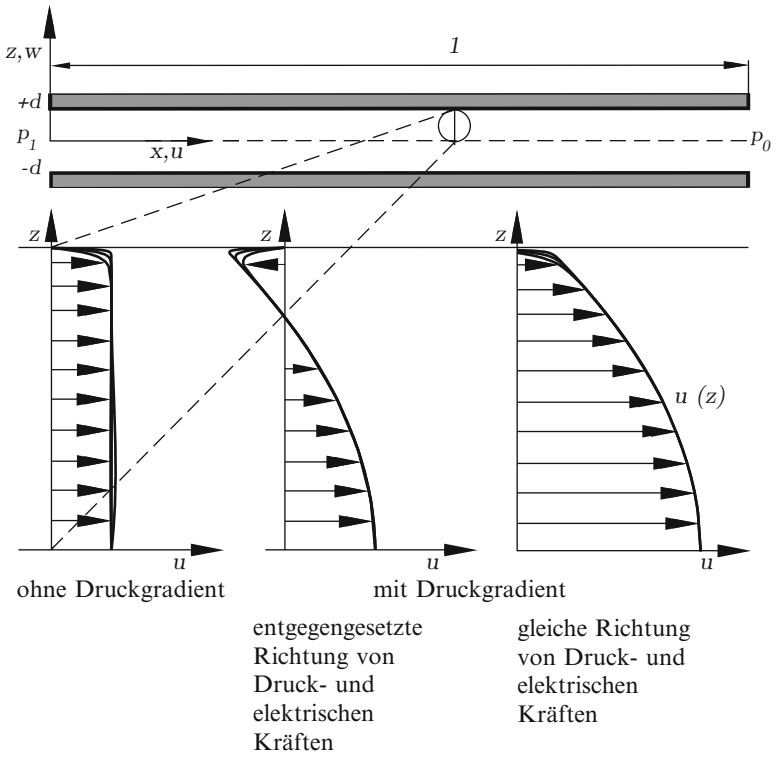


Abb. 12.10 Elektroosmotische Strömung im Mikrospalt

Der erste Term in Gl. (12.30) entspricht der Poiseuille-Strömung zwischen zwei Platten, der zweite Term gibt den elektroosmotischen Anteil wieder. In Abb. 12.10 findet man die Geschwindigkeitsprofile $u(z)$ nach (12.30) für verschiedene Druckgradienten $\partial p/\partial x$, verschiedene elektrische Felder $\partial\varphi/\partial x$ und verschiedene Werte von l_D. Wirkt kein Druckgradient ($\partial p/\partial x = 0$), so kommt es für $\partial\varphi/\partial x < 0$ zu einem pfropfenartigen Geschwindigkeitsprofil, mit steilem Anstieg der Geschwindigkeit innerhalb einer dünnen wandnahen Schicht (siehe Abb. 12.10). Dies hängt damit zusammen, dass die geladene Flüssigkeit in Wandnähe zur entgegengesetzt geladenen Elektrode am Kanalaustritt gezogen wird. Dies ist eine rein elektroosmotische Strömung. Wird die Strömung zusätzlich durch einen Druckgradienten $\partial p/\partial x < 0$ beaufschlagt, kommt es zu einer Überlagerung von druckgetriebener und elektroosmotischer Strömung. Für $\partial\varphi/\partial x > 0$ bewegt sich die Flüssigkeit in der elektrischen Doppelschicht nach links, entgegen der druckgetriebenen Strömung. Es ergibt sich ein Geschwindigkeitsprofil mit wandnaher Rückströmung. Im Innern der Flüssigkeit findet man ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil, wie es von der druckgetriebenen Poiseuille-Strömung herrührt. Für $\partial\varphi/\partial x < 0$ findet man die entgegengesetzte Wirkung der elektrischen Kräfte in Wandnähe. Die Dicke der wandnahen kinematischen Grenzschicht ist mit der Dicke der

elektrischen Doppelschicht l_D verknüpft. Die kinematische Grenzschicht ist bestimmt durch ein Gleichgewicht von viskosen und elektrischen Kräften. Die Profile für $l_D/d = 0.004$, 0.01 und 0.02 in Abb. 12.10 weichen nur innerhalb dieser kinematischen Grenzschicht voneinander ab. Die rotationssymmetrische Lösung für eine Kapillare mit kreisförmigem Querschnitt findet sich im Übrigen bei Rice und Whitehead 1965.

Die Debye-Länge l_D hängt entsprechend Gl. (12.26) unter anderem von den Ionendichten der beteiligten Spezies ab. In der obenstehenden Betrachtung ist vereinfachend l_D konstant angenommen. Ähnliches kann für das Zeta-Potential ζ und folglich für q_ζ festgestellt werden. Schließlich hängt die elektrische Leitfähigkeit einer Flüssigkeit empfindlich von den Ionendichten ab, wodurch die Berechnung des elektrischen Potentials φ über das Ohmsche Gesetz beeinflusst wird. Die Annahme konstanter Stoffeigenschaften stellt eine vernünftige Näherung dar, solange verdünnte Lösungen und damit homogene Konzentrationsfelder vorliegen. Dies koppelt das elektrische Feld einfach in die Strömungsgleichungen ein. Für eine vollständige Behandlung elektroosmotischer Strömungen ist jedoch die Berechnung der Konzentrationsfelder aller beteiligter Spezies notwendig, mit dem Ergebnis einer vollständigen Kopplung aller Gleichungen. Dies wird im Allgemeinen durch die zusätzliche Lösung entsprechender Transportgleichungen mit numerischen Methoden erfolgen.

Die Debye-Länge findet sich typisch im Bereich $l_D < 100\,\text{nm}$. Dadurch ist selbst in Mikrokanälen $l_D \ll d$ gegeben. Demgemäß bleibt eine eindimensionale Ladungsverteilung gegebenenfalls mit der Debye-Hückel-Approximation eine sinnvolle Näherung, solange keine Krümmung der Wand auf der Längenskala l_D vorliegt. Solch starke Krümmungen können nur an Ecken auftreten. Es bestehen somit die folgenden Optionen zur Behandlung der elektrischen Doppelschicht: (1) Die elektrische Doppelschicht wird numerisch aufgelöst und bzgl. der Ladungsverteilung werden keine vereinfachenden Annahmen getroffen. Durch die stark unterschiedlichen Längenskalen d und l_D kann dies zu erheblichem numerischem Aufwand führen. (2) Die Ladungsverteilung in der elektrischen Doppelschicht wird eindimensional gegebenenfalls mit der Debye-Hückel-Approximation angenommen und die wandnahe Lösung für die Strömung wird asymptotisch mit der Lösung im elektrisch neutralen Innern der Flüssigkeit verknüpft. Die Überlagerung beider Teillösungen liefert eine Näherungslösung für die Strömung im kompletten Gebiet (siehe Meisel und Ehrhard 2006). (3) Die Ausdehnung der elektrischen Doppelschicht wird ignoriert und an ihre Stelle tritt eine modifizierte Randbedingung für die tangentiale Geschwindigkeit an der Wand. Nach Probstein 1994 ist diese sogenannte Helmholtz-Smouluchowski-Randbedingung durch

$$u(z=0) = -\frac{\varepsilon_r \times \varepsilon_0 \times \zeta}{\mu} \times \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{12.31}$$

gegeben. Hierin ist x die wandtangentiale und z die wandnormale Koordinate. Die Wand befindet sich bei $z = 0$.

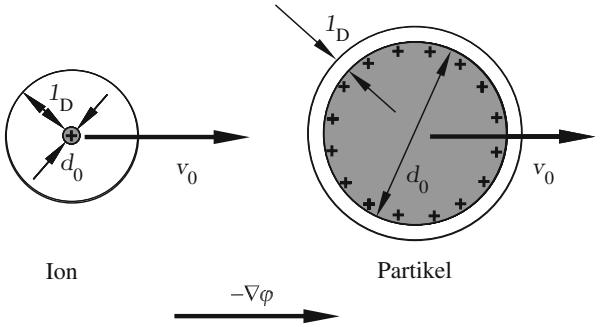


Abb. 12.11 Wirkung des elektrischen Feldes auf ein Ion bzw. Partikel in einer ruhenden Flüssigkeit

3.3.3 Elektrophorese

Liegen freie Ionen in einer ruhenden Flüssigkeit vor, so wird ein von außen angelegtes elektrisches Feld dazu führen, dass diese Ionen zur entgegengesetzt geladenen Elektrode wandern (siehe Abb. 12.11). Dieser Effekt wird als Elektrophorese bezeichnet. Betrachten man ein Partikel in ruhender Flüssigkeit, so ist die Situation ähnlich. Unabhängig davon, ob das Partikel ursprünglich geladen ist, werden durch die Wechselwirkung mit der Flüssigkeit in der Regel Oberflächenladungen auf dem Partikel entstehen. Man findet demnach um das Partikel eine elektrische Doppelschicht. Das Partikel mit der elektrischen Doppelschicht bleibt nach außen nicht elektrisch neutral und ist demnach auch Gegenstand der Elektrophorese.

Am Ion bzw. Partikel greift einerseits die Coulomb-Kraft an, welche die Bewegung verursacht. Andererseits führt die Bewegung des Ions bzw. Partikels zu viskoser Reibung mit der umgebenden Flüssigkeit. Aufgrund kleiner Ionen- bzw. Partikeldurchmesser d_0 und kleiner Ionen bzw. Partikelgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$, kann man von $Re_0 = |\boldsymbol{v}_0| \times d_0/\nu \ll 1$ ausgehen. Es liegt somit eine schleichende Umströmung des Ions bzw. Partikels vor. Ionen sind im Übrigen klein gegenüber der Dicke der elektrischen Doppelschicht, d. h. für Ionen gilt $d_0 \ll l_D$. Feste Partikel können etwa einzelne Zellen oder Kunststoffkugeln für verschiedene Messtechniken sein, wobei der Durchmesser von einigen Nanometern bis zu einigen tausend Nanometer variieren kann. Somit gilt für solche Partikel $d_0 < l_D$ bzw oder $d_0 > l_D$.

Das Kräftegleichgewicht an einem Ion liefert

$$3 \times \pi \times \mu \times d_S \times \boldsymbol{v}_0 = -Q_{\text{eff}} \times \nabla\varphi. \tag{12.32}$$

Hierbei ist zu beachten, dass um das Ion eine deformierte nichtsphärische diffuse Ionen-Atmosphäre entsteht, welche durch Abschirmung zu $|Q_{\text{eff}}| \leq |z_i \cdot e|$ führt. Gleichzeitig ist in der Reibungskraft der Stokessche Durchmesser $d_S \geq d_0$, d. h. der Durchmesser einer Kugel mit gleicher Reibung, zu verwenden. Für ein Ion ergibt sich deshalb die elektrophoretische Mobilität zu

$$\lambda' \equiv -\frac{\boldsymbol{v}_0}{\nabla\varphi} = \frac{Q_{\text{eff}}}{3 \times \pi \times \mu \times d_{\text{S}}}. \tag{12.33}$$

Die elektrophoretische Mobilität des Ions ist demnach direkt proportional zu seiner Ladung und umgekehrt proportional zu seiner Größe.

Für feste Partikel kann die komplette Ladung auf dem Partikel durch $Q = 2 \times \pi \times \varepsilon_{\text{r}} \times \varepsilon_0 \times d_0 \times \zeta \times (1 + (d_0/(2 \times l_{\text{D}}))$ abgeschätzt werden. Das Kräftegleichgewicht aus viskoser und elektrischer Kraft liefert hiermit

$$3 \times \pi \times \mu \times d_0 \times \boldsymbol{v}_0 = -2 \times \pi \times \varepsilon_{\text{r}} \times \varepsilon_0 \times d_0 \times \left(1 + \frac{d_0}{2 \times l_{\text{D}}}\right) \times \zeta \times \nabla\varphi. \tag{12.34}$$

Die elektrophoretische Mobilität kann somit für die Grenzfälle kleiner ($d_0 \ll l_{\text{D}}$) und großer ($d_0 \gg l_{\text{D}}$) Partikel ermittelt werden. Es ergibt sich

$$d_0 \ll l_{\text{D}}: \quad \lambda' = \frac{2}{3} \times \frac{\varepsilon_{\text{r}} \times \varepsilon_0 \times \zeta}{\mu}, \tag{12.35}$$

$$d_0 \gg l_{\text{D}}: \quad \lambda' = \frac{1}{3} \times \frac{\varepsilon_{\text{r}} \times \varepsilon_0 \times d_0 \times \zeta}{\mu \times l_{\text{D}}}. \tag{12.36}$$

Damit wird die elektrophoretische Mobilität fester Partikel direkt proportional zu ihrem Zeta-Potential ζ, für kleine Partikel wird sie unabhängig vom Partikeldurchmesser d_0 und der Debye-Länge l_{D}. Durch $(\varepsilon_{\text{r}} \times \varepsilon_0)$ wird im Übrigen die Dielektrizität der Flüssigkeit charakterisiert.

Nachdem für Ionen sowie kleine und große feste Partikel relativ einfache Beziehungen auftreten, bleibt zu erwähnen, dass für $d_0 \approx l_{\text{D}}$ und für nichtsphärische Ionen bzw. Partikel die theoretische Bestimmung der elektrophoretischen Mobilität schwieriger wird. Weitergehende Betrachtungen finden sich bei Hunter 1981. Zudem sind in den Gl. (12.33), (12.35) und (12.36) die Größen Q_{eff}, d_{S}, ζ oder l_{D} nicht gut bekannt. Es ist deshalb einfacher, die elektrophoretische Mobilität direkt experimentell zu bestimmen. Hierzu ist entsprechend der Definition in (12.33) das angelegte elektrische Feld $\nabla\varphi$ und die Geschwindigkeit des Ions bzw. Partikels $\boldsymbol{v}_0$ in der betrachteten Lösung zu messen. Dies sind beides Größen, die bei geeigneter Anordnung experimentell zugänglich sind. Es bleibt zu erwähnen, dass neben der Elektrophorese bei quasi-stationärem elektrischem Feld, auch hochfrequente und inhomogene elektrische Felder Kräfte auf Partikel verursachen. Eine Übersicht zur sogenannten Dieelektrophorese findet sich bei Ramos et al. 1998.

Zur Beschreibung elektrophoretischer Prozesse ist es wünschenswert eine geeignete Transportgleichung zur Verfügung zu haben. Einerseits stellt die Bewegung eines gelösten Ions in der Flüssigkeit, infolge der Elektrophorese, der Konvektion und der Diffusion, einen Stofftransport dar. Andererseits bedingt der Transport der geladenen Ionen den elektrischen Strom durch die Flüssigkeit. Die Verknüpfung von Stofftransport und Ladungstransport erscheint geeignet eine Transportgleichung bereitzustellen (siehe Probstein 1994). Für verdünnte leitfähige Lösungen kann mit

der Nernst-Plank-Gleichung die elektrische Stromdichte ausgedrückt werden. Aus der Ladungserhaltung im Volumenelement und einer Verknüpfung der elektrischen Leitfähigkeit mit den Ionendichten, erhält man schließlich i Transportgleichungen für die Ionen-Spezies der Form:

$$\frac{\partial c_\mathrm{i}}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v} - \lambda_\mathrm{i}' \times \nabla\varphi\right) \times \nabla c_\mathrm{i} = D_\mathrm{i} \times \Delta c_\mathrm{i} + \lambda_\mathrm{i}' \times c_\mathrm{i} \times \Delta\varphi + r. \qquad (12.37)$$

In Gl. (12.37) ist c_i die Konzentration, λ_i' die elektrophoretische Mobilität und D_i der Diffusionskoeffizient der Spezies i. $\boldsymbol{v}$ ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit, φ das elektrische Potential und r ein Quell- bzw. Senkenterm, der die Änderung der Ionenkonzentration infolge chemischer Reaktionen berücksichtigt. In elektrisch neutralem Gebiet verschwindet der zweite Term der rechten Seite, weil die Laplace-Gleichung für das elektrische Potential in jedem Fall erfüllt ist. Gl. (12.37) macht deutlich, dass die elektrophoretische Bewegung den konvektiven Transport modifiziert. Es tritt die Überlagerung aus Strömungsgeschwindigkeit und elektrophoretischer Geschwindigkeit auf. Im Übrigen geht Gl. (12.37) für $\lambda_\mathrm{i}' \to 0$ in eine gewöhnliche Transportgleichung über, wie sie etwa für ungeladene Spezies anzuwenden ist. Wenn auch die Herleitung dieser Transportgleichung von freien Ionen in verdünnter Lösung ausgeht, kann eine ähnliche Gleichung für Partikel benutzt werden. In diesem Fall gibt es keine Quelle bzw. Senke ($r = 0$) und für wachsende Partikelgröße verschwindet die Diffusion ($D_\mathrm{i} \to 0$). Dies beschreibt den Transport von Partikeln unter Berücksichtigung ihrer elektrophoretischen Mobilität. Die Bewegung der Partikel kann auch durch die Langrangesche Methode berechnet werden, wobei alle auf die Partikel wirkenden Kräfte (modellhaft) zu berücksichtigen sind.

3.3.4 Anwendung auf einen Trennkanal

Die Trennung eines Gemisches aus Kalium- (K^+), Natrium- (Na^+) und Lithium-Ionen (Li^+) in einem Mikrotrennkanal wird exemplarisch betrachtet. Bei Barz 2005 finden sich sowohl numerische (FEM) Simulationen als auch Experimente zur Validierung. Es liegen die Gl. (12.27) und (12.28) für die Strömung und (12.37) für den Stofftransport der Spezies bei konstanten Stoffeigenschaften zugrunde. Der Trennkanal hat einen quadratischen Querschnitt von $50\mu m(\mu m) \times 50\,\mu\mathrm{m}$ und eine Länge von 72 mm von der Kanalkreuzung bis zum Detektor (siehe Abb. 12.12). Das Gemisch der Ionen in verdünnter Lösung befindet sich zu Beginn in Form eines Pfropfens im Kreuzungsbereich, umgeben von einer wässrigen Lösung ohne diese Ionen. Durch Anwendung einer Potentialdifferenz von 3 kV längs des Trennkanals, entsprechend einer Feldstärke von $\partial\varphi/\partial x = -35.3\,\mathrm{V/mm}$, wird zum einen eine elektroosmotische Strömung in positiver x-Richtung erzeugt. Zum anderen sind die Ionen im elektrischen Feld Gegenstand der Elektrophorese.

Man erkennt anhand der Konzentrationsfelder in Abb. 12.12, dass der Pfropfen die Kreuzung verlassen hat und die Maxima der Konzentrationsfelder (Pfeile) bereits an unterschiedlichen Stellen liegen. Die Kalium-Ionen sind offensichtlich weiter vorangekommen als die Natrium-Ionen, und diese wiederum weiter als die

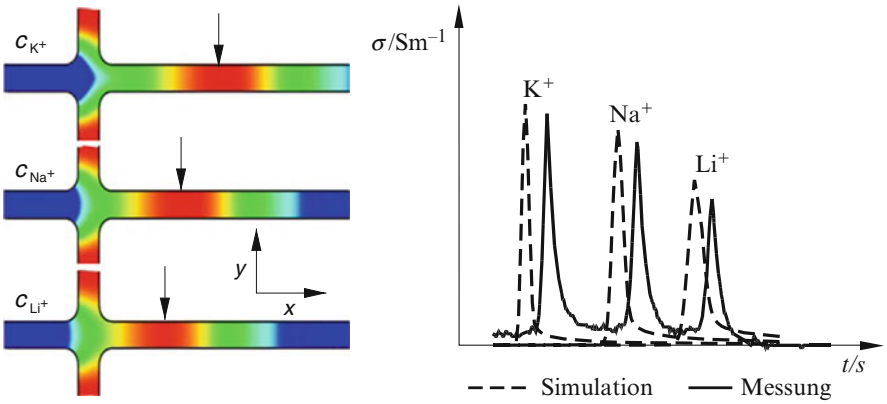


Abb. 12.12 Elektrophoretische Trennung einer Ionenmischung nach Barz 2005

Lithium-Ionen. Obwohl alle Ionen die gleiche Anzahl von Ladungen tragen, ist es die Größe der Ionen, die unterschiedliche Mobilitäten verursacht. Das Kalium-Ion ist relativ klein und hat deshalb eine hohe elektrophoretische Mobilität. Ein Detektor stromab erfasst die über den Querschnitt gemittelte spezifische elektrische Leitfähigkeit σ, welche sich bei Anwesenheit von Ionen erhöht. Bei Durchgang der Konzentrationsfelder erkennt man deshalb in zeitlicher Abfolge eine Erhöhung der Leitfähigkeit. Die simulierten Leitfähigkeiten sind in guter Übereinstimmung mit der gemessenen Leitfähigkeit. Die systematischen Abweichungen sind angesichts ungenauer Daten für das Zeta-Potential und die Debye-Länge, sowie in geringem Maße auch für die elektrophoretischen Mobilitäten, nicht überraschend. Das Zeta-Potential und die Debye-Länge bestimmen die Geschwindigkeit der elektroosmotischen Strömung.

3.3.5 Ähnlichkeit von elektrischem Feld und Strömung

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man nach Overbeek 1952 zeigen, dass das elektrische Feld und die elektroosmotische Strömung ähnlich sind. Es gilt dann

$$\boldsymbol{v}(x,y,z,t) = \frac{\varepsilon_\mathrm{r} \times \varepsilon_0 \times \zeta}{\mu} \times \nabla\varphi(x,y,z,t). \tag{12.38}$$

Dies bedeutet, dass die Stromlinien und die elektrischen Feldlinien, auch bei komplexer Kanalgeometrie, an jeder Stelle und zu jeder Zeit parallel sind. Die Voraussetzungen für diese Ähnlichkeit sind eine dünne elektrische Doppelschicht mit $l_\mathrm{D} \ll d$, konstante Flüssigkeitseigenschaften, ein konstantes Zeta-Potential, elektrisch isolierende Kanalwände, kein äußerer Druckgradient, $Re_d \ll 1$ und $Re_d \cdot Str \ll 1$. Hierin ist $Re_d = |\boldsymbol{v}| \cdot d/\nu$ die Reynolds-Zahl im Kanal und $Str = d/(|\boldsymbol{v}| \cdot \tau)$ die Strouhal-Zahl, gebildet mit der Zeitskala τ des zeitlich veränderlichen elektrischen Feldes. Diese Voraussetzungen sind für elektroosmotische Strömungen verdünnter Lösungen unter quasi-stationären Bedingungen häufig erfüllt. Es genügt

dann, die Laplace-Gleichung für das äußere elektrische Feld zu lösen und durch Gleichung (12.38) ist das Geschwindigkeitsfeld bekannt. Da die elektrophoretische Geschwindigkeit von Ionen bzw. Partikeln $\boldsymbol{v}_{\mathrm{I,P}}$ für gleiche Bedingungen ebenfalls ähnlich zum elektrischen Feld wird, kann sie durch Überlagerung gemäß

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{I,P}}(x,y,z,t) = \left(\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}} \times \varepsilon_0 \times \zeta}{\mu} - \lambda'\right) \times \nabla\varphi(x,y,z,t) \tag{12.39}$$

berechnet werden.

3.4 Benetzung und dünne Filme

Dünne Flüssigkeitsfilme auf Festkörpern können durch ihre geringe Dicke oder bei der Benetzung die Grenzen der herkömmlichen Kontinuumsmechanik tangieren. In diesen Fällen werden Modifikationen der Randbedingungen und die Berücksichtigung molekularer Kräfte notwendig. Eine flüssig-gasförmige Grenzfläche etwa wird kontinuumsmechanisch als scharfe Grenze aufgefasst, über welche Sprünge der Fluideigenschaften auftreten. Genau betrachtet ist sie jedoch eine Zone endlicher Dicke, über welche diese Änderungen stetig erfolgen. Die integralen Eigenschaften dieser Zone werden bei der kontinuumsmechanischen Behandlung durch die Grenzflächenspannung berücksichtigt. Man kann nicht erwarten, dass dieses Modell korrekt bleibt, wenn etwa zwei Grenzflächen eng beieinander liegen.

3.4.1 Benetzung

Bringt man eine Flüssigkeit auf einen Festkörper, so lassen sich verschiedene Möglichkeiten der Benetzung beobachten (siehe Abb. 12.13).

Zum einen kann partielle Benetzung vorliegen. Für $t \to \infty$ stellt sich zwischen Flüssigkeit (l), Gas (g) und Festkörper (s) ein stationäres Gleichgewicht ein. Die Kontaktlinie (KL) und der Kontaktwinkel α_{s} sind stationär. An der Kontaktlinie treffen Flüssigkeit, Gas und Festkörper zusammen. Kleine Kontaktwinkel kennzeichnen gut benetzende Systeme. Große Kontaktwinkel kennzeichnen schlecht benetzende Systeme.

Zum anderen kann vollständige Benetzung vorliegen. In diesem Fall breitet sich die Flüssigkeit für $t \to \infty$ unbeschränkt aus, bis schließlich ein dünner Flüssigkeitsfilm auf dem Festkörper entsteht. Dieses Verhalten kann als Grenzfall $\alpha_{\mathrm{s}} \to 0$ aufgefasst werden.

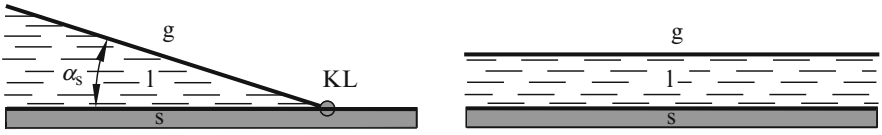


Abb. 12.13 Benetzung eines Festkörpers

Auf molekularer Ebene liegt ein System aus Festkörper-, Flüssigkeits- und Gasmolekülen vor. Dabei ist es die Wechselwirkung zwischen Festkörper- und Flüssigkeitsmolekülen, welche die Benetzung antreiben kann. Bei Fortschreiten der Benetzungsfront müssen jedoch die Gasmoleküle vom Festkörper verdrängt werden. Die Wechselwirkung zwischen Gas- und Festkörpermolekülen kann folglich einen hemmenden Einfluss haben. Ist die Anziehung zwischen den Molekülen der Flüssigkeit und des Festkörpers stärker als die zwischen den Molekülen des Gases und des Festkörpers, so schreitet die Benetzung fort. Die partielle Benetzung in Abb. 12.13 ist hingegen Ausdruck eines Gleichgewichts dieser Kräfte. Young 1805 hat hierfür die Beziehung

$$\sigma_{\mathrm{lg}} \times \cos\alpha_{\mathrm{s}} = \sigma_{\mathrm{sg}} - \sigma_{\mathrm{sl}} \tag{12.40}$$

abgeleitet, wobei die Grenzflächenspannungen an der fest-gasförmigen (σ_{sg}), der fest-flüssigen (σ_{sl}) und der flüssig-gasförmigen Grenzfläche (σ_{lg}) eingehen (vgl. hierzu Abschn. 2 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik).

Der statische Kontaktwinkel bei der partiellen Benetzung kann durch elektrische Kräfte verändert werden. Nach Vallet et al. 1996 müssen hierzu eine elektrisch leitende Flüssigkeit und ein elektrisch isolierender Festkörper vorliegen, in welchen eine Elektrode eingebettet ist (siehe Abb. 12.14). Wird nun eine elektrische Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ zwischen Flüssigkeit und Elektrode angelegt, so modifizieren die anziehenden elektrischen Kräfte die Youngsche Gl. (12.40) und man erhält gemäß

$$\sigma_{lg}\cos\alpha_{\mathrm{s}} = \left(\sigma_{\mathrm{sg}} - \sigma_{\mathrm{sl}} + \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}} \times \varepsilon_0}{2 \times e_0} \times \Delta\varphi^2\right) \tag{12.41}$$

einen kleineren Kontaktwinkel α_{s}. Hierin charakterisiert $\varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot \varepsilon_0$ die dieelektrischen Eigenschaften und e_0 die Schichtdicke des isolierenden Festkörpers. Dieses Phänomen wird als Elektrobenetzung bezeichnet und findet technisch Anwendung für verstellbare flüssige Linsen. Ein Übergang von partieller zu vollständiger Benetzung kann bei gegebenem Stoffsystem auch bei Änderung des Temperaturniveaus beobachtet werden (siehe de Gennes 1985).

Der gerade Verlauf der flüssig-gasförmigen Grenzfläche zur Kontaktlinie ist eine Idealisierung. Auf molekularer Längenskala können nach de Gennes 1985 davon, sowohl für statische als auch für dynamische Situationen, erhebliche Abweichungen auftreten. Weitreichende anziehende van-der-Waals-Kräfte führen zu Grenzflächen-

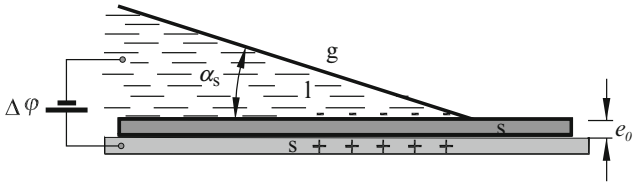


Abb. 12.14 Anordnung bei der Elektrobenetzung

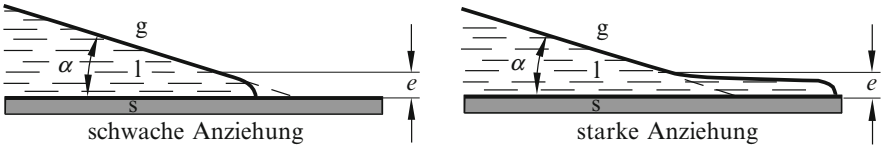


Abb. 12.15 Grenzflächenform bei Benetzung auf molekularer Längenskala

konturen, wie in Abb. 12.15 gezeigt. Diese Kräfte werden durch die gegenseitige Polarisierung der Moleküle verursacht. Ähnliche Auswirkungen haben elektrostatische Kräfte, wie sie zwischen geladenen oder polaren Molekülen wirken. Liegt eine starke Anziehung zwischen Flüssigkeits- und Festkörpermolekülen in Verbindung mit einer schwachen Anziehung zwischen Gas- und Festkörpermolekülen vor, so kommt es zu einem vorauslaufenden Flüssigkeitsfilm. In allen Fällen ist die Längenskala e, auf der solche Abweichungen auftreten, in der Größenordnung einiger Moleküldurchmesser. Für die Kontinuumsmechanik sind diese Abweichungen praktisch unsichtbar. Aus den Gegebenheiten in Abb. 12.15 wird deutlich, dass bei der Definition des Kontaktwinkels eine makroskopische Längenskala zweckmäßig ist. Der makroskopische Kontaktwinkel α wird demnach auf einer Längenskala von einigen Mikrometern definiert. Er ist mit Standardverfahren optisch zugänglich. Der Kontaktwinkel auf der molekularen Längenskala ist messtechnisch kaum zugänglich und zudem durch die Molekülbewegungen unscharf.

3.4.2 Bewegte Kontaktlinie

Für die Berechnung der Strömung in der Umgebung einer bewegten Kontaktlinie muss man die makroskopischen Gegebenheiten kennen. Diese gehen über die Randbedingungen in die kontinuumsmechanische Behandlung ein. Die Kinematik der Strömung auf beiden Seiten der bewegten Kontaktlinie ist von Dussan und Davis 1974 charakterisiert worden. Ohne Annahmen bzgl. der geometrischen Form von Grenzfläche und Kontaktlinie sowie ohne Annahmen bzgl. der Rheologie der Fluide finden die Autoren Stromfelder, die kinematisch verträglich sind mit der Grenzfläche, mit der bewegten Kontaktlinie und mit der Haftbedingung an der Wand. Diese Stromfelder sind in Abb. 12.16 für die zwei grundlegenden Fälle dargestellt. Es sind jeweils Relativbewegungen zur bewegten Kontaktlinie gezeigt, die Kontaktlinie bewegt sich nach rechts. Im ersten Bild bewegt sich ein Flüssigkeitselement entlang der Grenzfläche auf die Kontaktlinie zu, so dass sich die Flüssigkeit in einer rollende Bewegung auf dem Festkörper ausbreitet. Dies erzeugt eine komplexe Strömung im Gas, welches entlang einer inversen Staustromlinie abströmt. Im zweiten Bild bewegt sich ein Flüssigkeitselement entlang der Grenzfläche von der Kontaktlinie weg. Somit kommt es innerhalb der Flüssigkeit zu einer Staustromlinie, die zur Kontaktlinie hinführt. Das Gas wird entsprechend vom Festkörper abgerollt.

Betrachtet man die Geschwindigkeit der Flüssigkeit einerseits entlang der Grenzfläche und andererseits entlang der Wand, so ergeben sich bei Annäherung an die Kontaktlinie zwei unterschiedliche Grenzwerte. Lediglich für den Kontaktwinkel

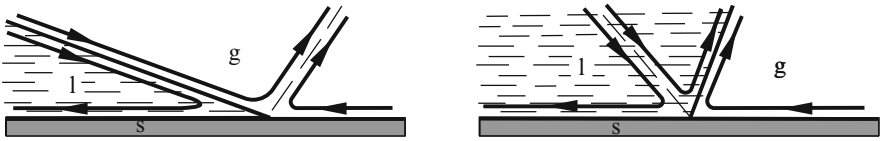


Abb. 12.16 Kinematik der Strömung an bewegter Kontaktlinie nach Dussan und Davis 1974, vereinfacht für eine ebene Wand

$\alpha = 90°$ verschwindet diese Diskrepanz. Somit ist das Geschwindigkeitsfeld für allgemeine Kontaktwinkel nicht stetig und besitzt einen unbegrenzten Geschwindigkeitsgradienten an der Kontaktlinie. Abhängig vom rheologischen Verhalten der Flüssigkeit können so unbegrenzte Spannungen auftreten. Diese Singularität ist nicht Folge vereinfachender Annahmen, sondern durch die kontinuumsmechanische Formulierung bedingt.

Es bleibt zu fragen, wie diese Singularität zu behandeln ist. Dussan und Davis 1974 zeigen, dass eine Änderung der Bedingungen an der Grenzfläche diese Singularität nicht behebt. Eine Möglichkeit besteht darin, geeignete nicht-Newtonsche konstitutive Gleichungen zu verwenden. Dies behebt zwar nicht die Unstetigkeit des Geschwindigkeitsfeldes, führt aber auf endliche Spannungen. Eine weitere Möglichkeit ist die Relaxierung der Haftbedingung gezielt an der Kontaktlinie mit Hilfe einer Gleitbedingung. Dies führt zu einem stetigen Geschwindigkeitsfeld und erlaubt die Verwendung Newtonscher konstitutiver Gleichungen. Die Spannungen bleiben endlich. Konkret kann an der Wand etwa das Navier-Gleitgesetz (12.5) mit einer Gleitlänge L_R von wenigen Moleküldurchmessern verwendet werden, womit nennenswertes Gleiten nur in unmittelbarer Umgebung der bewegten Kontaktlinie auftritt. Das geringe Gleiten der Flüssigkeit an der Wand kann einerseits angesichts der Aussagen in Abschn. 1.4 nicht verwundern. Andererseits ist auch ein merkliches Gleiten direkt an der bewegten Kontaktlinie verständlich, denn die makroskopische Benetzung erfolgt häufig auf einem vorauslaufenden mikroskopischen Flüssigkeitsfilm. Im mikroskopischen Bild ergibt sich deshalb Gleiten der Flüssigkeit auf einem mikroskopischen Flüssigkeitsfilm (siehe Abb. 12.15).

Aus zwei Reihen von Experimenten von Rose und Heins 1962 für vollständig benetzende Stoffsysteme im Kapillarrohr leitet Friz 1965 mit Hilfe von Ähnlichkeitsargumenten die empirische Beziehung

$$\tan\alpha \approx 3.4 \times \left(\frac{\mu \times U}{\sigma_\mathrm{lg}}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{12.42}$$

für den dynamischen Kontaktwinkel α ab. Hierin ist U die Geschwindigkeit der Kontaktlinie, μ die dynamische Zähigkeit der Flüssigkeit und σ_lg die Grenzflächenspannung zwischen Flüssigkeit und Gas. Die Beziehung (12.42) wird von Schwartz und Tajeda 1972 für weitere Stoffsysteme bei unterschiedlicher Benetzungsgeometrie bestätigt. Man erkennt darin eine Abhängigkeit des makroskopi-

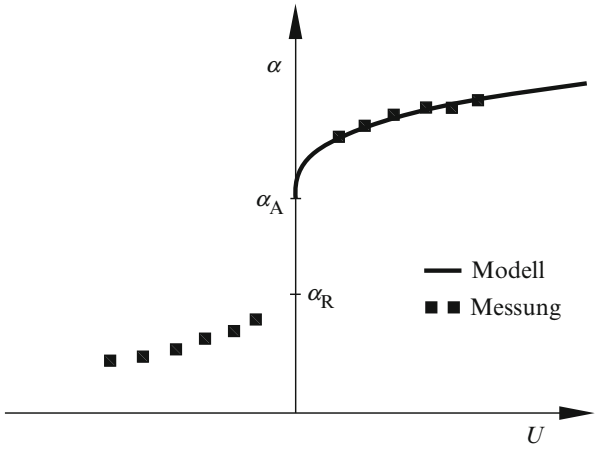


Abb. 12.17 Verhalten des dynamischen Kontaktwinkels nach Dussan1979

schen Kontaktwinkels α von der Geschwindigkeit U der Kontaktlinie und von den Fluideigenschaften μ/σ_{lg}. Für vollständig benetzende Systeme ist der statische Kontaktwinkel $\alpha_s \simeq 0$. Dussan 1979 fasst Messungen verschiedener Autoren unter Berücksichtigung partieller Benetzung ($\alpha_s \neq 0$) zusammen und findet für voranschreitende ($U > 0$) und für zurückweichende ($U < 0$) Kontaktlinien die Modellgesetze:

$$U > 0: \quad U = \kappa_A \times (\alpha - \alpha_A)^m, \tag{12.43}$$

$$U < 0: \quad U = \kappa_R \times (\alpha - \alpha_R)^m. \tag{12.44}$$

In den Gl. (12.43) und (12.44) sind κ_A, κ_R empirische Konstanten und α_A und α_R die statischen Kontaktwinkel nach Voranschreiten bzw. Zurückweichen der Kontaktlinie. In $\alpha_A > \alpha_R$ kommt die Kontaktwinkelhysterese zum Ausdruck. Experimente von Hoffman 1975 und Tanner 1979 für voranschreitende Kontaktlinien legen einen Exponenten von $m \simeq 3$ nahe (siehe Abb. 12.17). Für kleine Kontaktwinkel α und für $\alpha_A, \alpha_R \to 0$ sind die Modellgesetze (12.43) und (12.44) im Übrigen konsistent mit Gl. (12.42).

Zusammenfassend ist festzustellen, dass der makroskopische Kontaktwinkel im dynamischen Fall andere Werte als im statischen Fall annimmt. Für voranschreitende Kontaktlinien werden größere Kontaktwinkel beobachtet, für zurückweichende Kontaktlinien treten kleinere Kontaktwinkel auf. Die Abhängigkeit gemäß den Modellgesetzen (12.43) und (12.44) mit $m \approx 3$ erscheint, zumindest für voranschreitende Kontaktlinien, experimentell bestätigt.

3.4.3 Dünne Filme

Die Stabilität dünner Flüssigkeitsfilme auf horizontalen Festkörpern kann exemplarisch dazu dienen, ihre Physik zu verdeutlichen und insbesondere die Grenzen einer

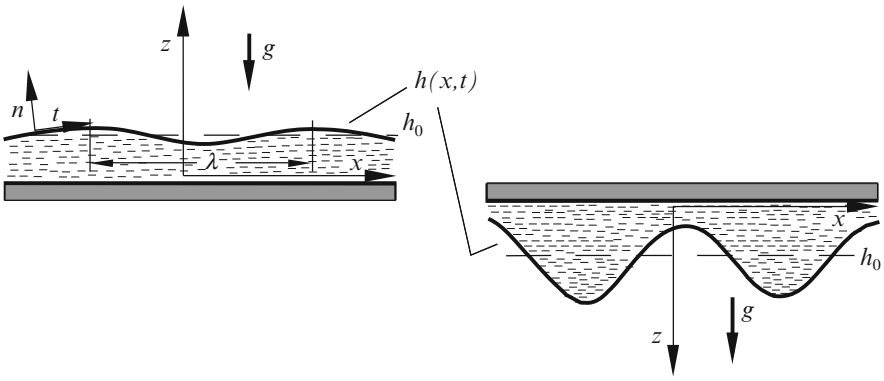


Abb. 12.18 Dünne Flüssigkeitsfilme auf und unter horizontalen Platten

kontinuumsmechanischen Behandlung aufzuzeigen. Wir folgen in der Darstellung einem Übersichtsartikel von Oron et al. 1997.

Ein dünner Film ist durch eine Flüssigkeitsschicht gegeben, die zwischen einer horizontalen festen Platte bei $z = 0$ und einer flüssig-gasförmigen Grenzfläche bei $z = h$ liegt (siehe Abb. 12.18). Die Ausdehnung in den horizontalen Richtungen x und y ist unbegrenzt. Es wird hinsichtlich einer einfachen mathematischen Darstellung das ebene Problem in der x-z-Ebene behandelt. Eine Verallgemeinerung zum dreidimensionalen Problem findet sich bei Oron 2006. Das ebene Problem ist durch die verschwindende Geschwindigkeitskomponente $v = 0$ und verschwindende Gradienten $\partial/\partial y$ charakterisiert, so dass sich ausgehend von der inkompressiblen Kontinuitätsgleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. 3) und den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. 20) für die Flüssigkeit ergibt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{12.45}$$

$$\rho \times \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \times \frac{\partial u}{\partial x} + w \times \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{12.46}$$

$$\rho \times \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \times \frac{\partial w}{\partial x} + w \times \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial z} - \rho \times g. \tag{12.47}$$

Hinzu treten die Randbedingungen auf dem Festkörper und an der flüssig-gasförmigen Grenzfläche

$$z = 0 : \; u = w = 0, \tag{12.48}$$

$$z = h : \; w = h_t + u \times h_x, \tag{12.49}$$

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{n} = 2 \times H \times \sigma_{\mathrm{lg}}, \tag{12.50}$$

$$\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \times \nabla \sigma_{\mathrm{lg}}. \tag{12.51}$$

Hierin ist $\boldsymbol{T}$ der Spannungstensor in der Flüssigkeit, $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{t}$ sind die Einheitsvektoren in normaler und tangentialer Richtung (siehe Abb. 12.18). Auf dem Festkörper ist die Haftbedingung erfüllt. Bewegte Kontaktlinien werden in diesem Abschnitt ausgeklammert. An der Grenzfläche stellt man mit der kinematischen Randbedingung (12.49) eine tangentiale Strömung sicher. Desweiteren wird die Stetigkeit der Spannungen in normaler und tangentialer Richtung durch die dynamischen Randbedingungen (12.50) und (12.51) erhalten. In normaler Richtung erhält man im einfachsten Fall für verschwindende Viskosität den Laplace-Drucksprung $\Delta p = 2 \times H \times \sigma_{\mathrm{lg}}$, wobei die mittlere Krümmung der Grenzfläche durch

$$2 \times H = \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{12.52}$$

gegeben ist. In tangentialer Richtung erhält man Schubspannungen, wenn die Grenzflächenspannung σ_{lg} räumlich nicht konstant ist. Dies kann etwa durch die Temperatur oder durch gelöste Stoffe verursacht sein. Es wird ferner wegen $\mu_{\mathrm{gas}} \ll \mu$ in (12.51) implizit angenommen, dass die Schubspannungen des umgebenden Gases vernachlässigt werden dürfen. Diese Annahme erlaubt erst die Strömung in der Flüssigkeit separat von der Strömung im Gas zu behandeln. Zur Vereinfachung der Notation sind die partiellen Ableitungen der Funktion $h(x,t)$ durch Indizes gemäß $h_x = \partial h/\partial x$, $h_t = \partial h/\partial t$ etc. notiert. In die Navier-Stokes-Gleichungen (12.46) und (12.47) wird neben der Schwerkraft eine weitere Volumenkraft in Form eines Potentials ϕ eingeführt. Dies wird zur Modellierung von molekularen Kräften noch hilfreich sein.

Durch Anwendung der sogenannten Dünnfilm-Approximation kann das System (12.45)–(12.52) wesentlich vereinfacht werden. Die mathematischen Details finden sich bei Oron et al. 1997. Im Wesentlichen wird angenommen, dass die mittlere Filmdicke h_0 sehr klein gegenüber der Wellenlänge λ von Störungen der Grenzfläche ist. Dies führt zu separaten Längen- und Geschwindigkeitsskalen in den beiden Richtungen, so dass neben $h_0 \ll \lambda$ auch $w \ll u$ und $\partial/\partial x \ll \partial/\partial z$ ausgenutzt werden kann. Werden die Gleichungen über den Film im Bereich $0 \leq z \leq h$ bei Einhaltung der Randbedingungen integriert, kann eine sogenannte Entwicklungsgleichung für die Filmdicke $h(x,t)$ abgeleitet werden.

Man betrachtet zunächst einen Fall, in dem die Filmdicke groß gegenüber dem Durchmesser der Flüssigkeitsmoleküle bleibt, so dass man erwarten kann mit einer kontinuumsmechanischen Behandlung zum Ziel zu kommen. Bei konstanter Oberflächenspannung σ_{lg} und für $\phi = 0$ erhält man die Entwicklungsgleichung

$$\mu \times h_t - \frac{1}{3} \times \rho \times g \times \left(h^3 \times h_x\right)_x + \frac{1}{3} \times \sigma_{\mathrm{lg}} \times \left(h^3 \times h_{xxx}\right)_x = 0. \tag{12.53}$$

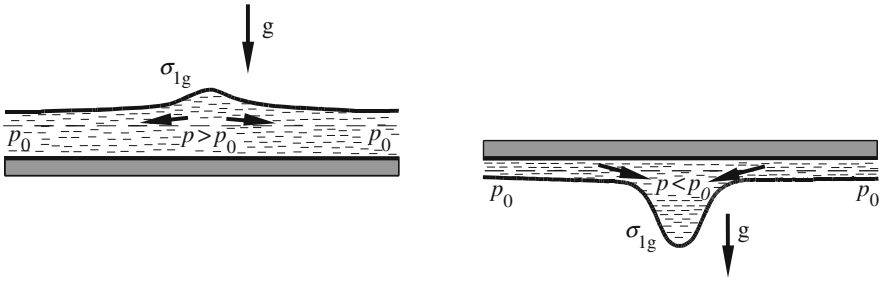


Abb. 12.19 Stabilität des Flüssigkeitsfilms auf und unter einer Platte

In der Entwicklungsgleichung (12.53) gibt der zweite Term den Einfluss der Schwerkraft und der dritte Term den Einfluss der Kapillarkraft wieder. Es wird zunächst die Wirkung der Schwerkraft betrachtet. Eine lokale Auslenkung der Grenzfläche nach oben, wie in Abb. 12.19 links gezeigt, führt hydrostatisch zu einem erhöhten Druck unterhalb der Auslenkung. Die Folge ist ein horizontaler Druckgradient, der die Flüssigkeit unterhalb der Auslenkung nach beiden Seiten transportiert und so die Auslenkung zurückführt. Die Schwerkraft wirkt demnach stabilisierend. Die Kapillarkraft hat eine ähnliche Wirkung. Infolge der konvexen Krümmung der Grenzfläche ist der Druck unterhalb der Auslenkung größer als unter der wandparallelen Grenzfläche. Die Kapillarkraft wirkt gleichfalls stabilisierend. Unterzieht man die Grundlösung $h = h_0$ von Gl. (12.53) einer Stabilitätsanalyse gegen kleine Störungen, welche periodisch in x sind, so findet man in der Tat, dass alle Störungen für $\rho \times g > 0$ und $\sigma_{lg} > 0$ zeitlich gedämpft sind. Somit bleibt die Grundlösung stabil. Die Bedingung für die zeitliche Anfachung der Störung des Flüssigkeitsfilms auf der Platte lautet in diesem Fall

$$\rho \times g < -\sigma_{lg} \times \left(\frac{2 \times \pi}{\lambda}\right)^2 . \tag{12.54}$$

Hängt der Flüssigkeitsfilm entsprechend Abb. 12.19 rechts jedoch unter der Platte, ergibt sich als Bedingung für die zeitliche Anfachung

$$\rho \times g > \sigma_{lg} \times \left(\frac{2 \times \pi}{\lambda}\right)^2 . \tag{12.55}$$

In diesem Fall reduziert die Auslenkung hydrostatisch den Druck oberhalb der Auslenkung, während die konkav gekrümmte Grenzfläche kapillar nach wie vor eine Druckerhöhung bedingt. Die Schwerkraft wirkt nun destabilisierend. Ist Gl. (12.55) erfüllt, so überwiegt die destabilisierende Schwerkraft und die Flüssigkeit wird entsprechend Abb. 12.19 in die Auslenkung transportiert. Diese Situation wird als

Rayleigh-Taylor-Instabilität bezeichnet, wobei Gl. (12.55) zeigt, dass insbesondere große Wellenlängen λ kritisch sind. Eine Auswertung liefert

$$\lambda > 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{\sigma_{\mathrm{lg}}}{\rho \times g}} \tag{12.56}$$

für den instabilen Bereich der Wellenlängen. Interessant ist die Feststellung, dass alle Ergebnisse (12.54)–(12.56) nicht von der mittleren Filmdicke h_0 abhängen.

Es wird nun ein Fall betrachtet, in welchem der Flüssigkeitsfilm nur 10-100 Molekülagen dick ist, was je nach Flüssigkeit einigen hundert Angström entspricht. Unter dieser Voraussetzung können weitreichende molekulare Kräfte eine wichtige Rolle spielen. Im Innern der Flüssigkeit sind molekulare Kräfte im Prinzip durch die Eigenschaften des Kontinuums berücksichtigt. An einzelnen Grenzflächen können durch die Oberflächenspannung die unterschiedlichen molekularen Kräfte in beiden Kontinua berücksichtigt werden. Treten jedoch zwei Grenzflächen, wie im vorliegenden Fall die flüssig-gasförmige Grenzfläche und die flüssig-feste Grenzfläche, nah zusammen, so führen die molekularen Kräfte zusätzlich zu einer Wechselwirkung dieser Grenzflächen. Im einfachsten Fall von parallelen Grenzflächen ohne Anwesenheit von Ionen kann das Kräftepotential

$$\phi = \phi_0 + \frac{A}{6 \times \pi \times h^3} \tag{12.57}$$

zur Modellierung verwendet werden. Hierbei ist ϕ_0 ein Bezugspotential, dessen Wert für die Kräfte nicht relevant ist (siehe (12.46) und (12.47)). A ist die sogenannte Hamaker-Konstante. Ist $A > 0$, ziehen sich die beiden Grenzflächen gegenseitig an, für $A < 0$ stoßen sich die beiden Grenzflächen gegenseitig ab. Bei konstanter Oberflächenspannung σ_{lg} und vernachlässigter Schwerkraft $g = 0$, erhalten wir in diesem Fall die Entwicklungsgleichung

$$\mu \times h_t + \frac{A}{6 \times \pi} \times \left(\frac{h_x}{h}\right)_x + \frac{1}{3} \times \sigma_{\mathrm{lg}} \times \left(h^3 \times h_{xxx}\right)_x = 0. \tag{12.58}$$

Anstelle des Potentials (12.57) kann zur Modellierung im Übrigen auch eine Normalspannung innerhalb der Flüssigkeit überlagert werden, der sogenannte *disjoining pressure*. Dies führt bei gleichen Voraussetzungen zur selben Entwicklungsgleichung.

Eine lineare Stabilitätsanalyse der Grundlösung h_0 bei räumlich periodischer Störung liefert für die Entwicklungsgleichung (12.58) zeitliche Anfachung für

$$\frac{A}{6 \times \pi \times h_0} > \frac{1}{3} \times \sigma_{\mathrm{lg}} \times \left(\frac{2 \times \pi}{\lambda}\right)^2 \times h_0^3. \tag{12.59}$$

Für $A > 0$ ist demzufolge eine Instabilität möglich, die anschaulich durch eine sich selbstverstärkende Anziehung der beiden Grenzflächen zustande kommt, mit der Folge eines lokalen Risses des Flüssigkeitsfilms, da $h(x,t) \to 0$ auftritt. Wiederum sind es große Wellenlängen, welche kritisch sind. Die Stabilitätsanalyse liefert

$$\lambda > 2 \times \pi \times h_0^2 \times \sqrt{\frac{2 \times \pi \times \sigma_{\mathrm{lg}}}{A}} \tag{12.60}$$

für den Bereich instabiler Wellenlängen. Für $A < 0$ kann es hingegen infolge der abstoßenden Wechselwirkung beider Grenzflächen zu keiner Instabilität kommen. Man erkennt in beiden Bedingungen (12.59) und (12.60) eine Abhängigkeit von der mittleren Filmdicke h_0. Insbesondere zeigt Gl. (12.59), dass für wachsende h_0 die linke Seite der Gleichung verschwindet und die rechte Seite stark anwächst. Damit treten für wachsende Filmdicken die weitreichenden molekularen Kräfte in den Hintergrund.

Das Potential (12.57) ist eine Möglichkeit die Auswirkung weitreichender van-der-Waals-Kräfte zwischen den Molekülen zu berücksichtigen. Sollen etwa Ionen in Lösung oder polare Moleküle, elektrische Kräfte oder Kräfte bei kleinem Abstand der Moleküle berücksichtigt werden, so findet sich in der Literatur eine Vielzahl von Vorschlägen für das Potential $\phi(h)$. Darüber hinaus können die Bedingungen des Flüssigkeitsfilms verallgemeinert werden. Über Verdampfung bzw. Kondensation an der flüssig-gasförmigen Grenzfläche, räumlich nicht konstante Oberflächenspannung σ_{lg}, temperatur- oder konzentrationsabhängige Stoffeigenschaften, Volumenkräfte infolge von Rotation der Filme bis zu Be- und Entnetzungsvorgängen reicht die Vielfalt von Verallgemeinerungen in der Literatur. Eine Diskussion dieser Aspekte findet sich bei Oron et al. 1997 und Oron 2006.

4 Experimente

In der Literatur sind in den letzten Jahren zahlreiche experimentelle Untersuchungen zum Druckverlust, zur laminar-turbulenten Transition und zum Wärmeübergang in Mikrokanälen veröffentlicht worden. Die bisweilen überraschenden Ergebnisse weichen zum Teil erheblich von den konventionellen makroskopischen Korrelationen ab, obwohl die Bedingungen ein kontinuumsmechanisches Verhalten nahelegen. Es zeigt sich, dass viele dieser Abweichungen von Fehlinterpretationen herrühren, weil die Experimente in Mikrokanälen häufig keinen Zugriff auf lokale Informationen zulassen. So werden in der Regel Drücke und Temperaturen in den Ein- und Austrittsplenen gemessen, weil eine lokale Messung innerhalb der Mikrokanäle störungsfrei kaum möglich ist. Die Ableitung der Druckverlust- und Wärmeübergangskorrelationen auf Basis dieser integralen Informationen bleibt aber problematisch. Ähnlich schwierig ist die Detektion einer laminar-turbulenten Transition anhand integraler Messwerte. Auch wenn in Teilbereichen Fortschritte durch lokale Messungen erkennbar werden, erscheint eine kritische Diskussion angebracht.

Die in der Literatur verfügbaren Daten können in laminare und turbulente Strömung unterteilt werden, wobei jeweils kreisförmige, rechteckige und trapezförmige Strömungsquerschnitte untersucht sind. Im Folgenden werden nur kreisförmige Querschnitte behandelt.

4.1 Druckverlust

Bei der Diskussion experimenteller Ergebnisse zum Druckverlust in Mikrokanälen wird teilweise den Übersichtsartikeln von Sobhan und Garimella 2001 und Hetsroni et al. 2005a gefolgt. In Rohren kann der Druckverlust gemäß

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} \times \bar{u}^2 \times \lambda \times \frac{l}{d} \tag{12.61}$$

angegeben werden. Jede Messung konzentriert sich somit auf die Bestimmung des Verlustbeiwerts λ, welcher im Allgemeinen eine Funktion der Reynolds-Zahl $Re_d = \bar{u} \times d/\nu$ darstellt. In Abb. 12.20 ist der Verlustbeiwert λ in Form des sogenannten Nikuradse-Diagramms über der Reynolds-Zahl aufgetragen. Ergänzend zu Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit, Abb. 43 sind Literaturwerte für Mikrorohre eingetragen. In konventionellen makroskopischen Rohren ist der Verlustbeiwert für Newtonsche Fluide bei laminarer, ausgebildeter Strömung durch $\lambda = 64/Re_d$ (Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit, Gl. 79) gegeben. Für turbulente Strömung in glatten konventionellen Rohren gilt nach Blasius $\lambda = 0.316 \times Re_d^{-1/4}$ (Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit, Gl. 80). Diese Kurven sind im laminaren und im turbulenten Bereich in Form durchgezogener

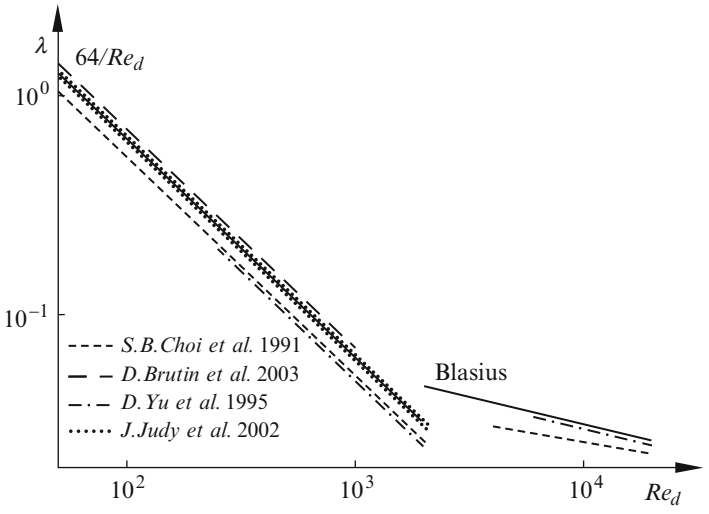


Abb. 12.20 Druckverlust in glatten kreisförmigen Mikrorohren

Linien eingetragen. Weiterhin findet man eine Schar von ausgewählten Ergebnissen aus der Literatur in Form unterschiedlicher Linien. Diese Linien sind Ausgleichskurven durch die Datenpunkte verschiedener Autoren.

Zunächst wird der laminare Bereich beschrieben. Die Kurve von Choi et al. 1991 wurde für Stickstoff in Rohren von $d = 3 - 81\,\mu\text{m}$ Durchmesser erhalten. Die Kurve bestätigt die Abhängigkeit $\lambda \sim Re_d^{-1}$, die für konventionelle Rohre gültig ist. Die Kurve liegt jedoch ca. 17 % unter der konventionellen Kurve in Abb. 20. Die Kurve von Yu et al. 1995 zeigt Messungen für Stickstoff und Wasser in Rohren von $d = 19 - 102\,\mu\text{m}$ Durchmesser. Die Kurve zeigt gleichfalls die Abhängigkeit $\lambda \sim Re_d^{-1}$ und liegt ca. 20 % unter der konventionellen Kurve. Die Kurven von Judy et al. 2002 gelten für Glasrohre mit Durchmessern im Bereich $d = 52 - 149\,\mu\text{m}$ für Wasser, Isopropanol und Methanol. Beide Kurven bestätigen die Abhängigkeit $\lambda \sim Re_d^{-1}$, wobei die Kurve für Wasser etwa 3 % unter der konventionellen Kurve liegt. Die Kurven für Isopropanol und Methanol sind nicht zu unterscheiden, beide liegen knapp 3 % über der konventionellen Kurve. Judy et al. 2002 verwenden im Übrigen unterschiedlich lange Rohre, um sicherzustellen, dass die Einlaufstrecke sowie die Ein- und Austrittseffekte ihre Messungen nicht verfälschen. Die Kurven von Brutin et al. 2003 sind aus Messungen für Wasser in kreisförmigen Glaskapillaren von $d = 321\,\mu\text{m}$ und $d = 540\,\mu\text{m}$ Durchmesser erhalten. Die Autoren verwenden stationäre und transiente Messverfahren und analysieren sorgfältig den Einfluss der Einlaufstrecke. Beide Kurven bestätigen die Abhängigkeit $\lambda \sim Re_d^{-1}$, wobei die Kurven etwa 4 % und 5 % über der konventionellen Kurve liegen.

Die Messungen von Choi et al. 1991 mit Stickstoff im turbulenten Bereich ergeben die Abhängigkeit $\lambda \sim Re_d^{-0.182}$ und liegen etwa 55 % unterhalb der Blasius-Korrelation. Die Daten von Yu et al. 1995 mit Stickstoff und Wasser im turbulenten Bereich bestätigen die Abhängigkeit $\lambda \sim Re_d^{-0.25}$ nach Blasius, liegen jedoch ca. 5 % unterhalb der Blasius-Korrelation. Bei konventioneller Strömung liegen die Messungen für reale raue Rohre generell oberhalb der Blasius-Korrelation, wie etwa aus der Colebrook-Korrelation ersichtlich. Die Lage der Kurven unterhalb der Blasius-Korrelation ist deshalb ungewöhnlich.

Alle Messungen basieren auf Druckmessungen in den Ein- und Austrittsplenen. Demzufolge wird keine direkte Messung des Druckabfalls der ausgebildeten Strömung erhalten. Effekte durch die Übergänge am Ein- und Auslass des Mikrorohrs sowie durch die Einlaufstrecke sind stets überlagert. Diese Effekte werden nur in wenigen Experimenten korrigiert. Besonders kritisch erscheinen ferner Ungenauigkeiten bei der Bestimmung des Rohrdurchmessers ($\lambda \sim d^3$) sowie bei der Messung des integralen Massenstroms ($\lambda \sim \dot{m}^{-2}$). Die genaue Messung kleiner Massenströme ist insbesondere für Gase nicht trivial. Im turbulenten Fall ist zudem ein merklicher Effekt der Wandrauigkeit zu erwarten, da die Rauigkeitstiefe relativ zum kleinen Durchmesser zu bewerten ist. Jede Ungenauigkeit bei der Bestimmung von Rohrdurchmesser und Rauigkeitstiefe ist deshalb kritisch. Schließlich sind Einflüsse durch den Ladungstransport bei Anwesenheit von Ionen (Strömungspotential), durch die dissipative Erwärmung des Fluids und durch den Verlust des thermodynamischen Gleichgewichts bei Gases ($Kn > 10^{-3}$) kritisch zu prüfen. Zusammenfassend zeigt der Vergleich von Messungen in Mikrorohren mit den

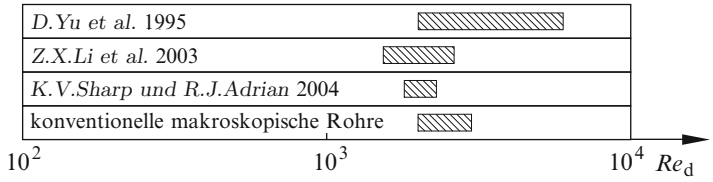


Abb. 12.21 Laminar-turbulenter Transitionsbereich für kreisförmige Mikrorohre

konventionellen Korrelationen zumindest im turbulenten Bereich noch merklich Diskrepanzen, deren Ursachen ungeklärt bleiben.

4.2 Laminar-turbulente Transition

Die Transition von laminarer zu turbulenter Strömung in Mikrorohren ist in der Literatur einerseits anhand integraler Druckabfalldaten bewertet worden. Andererseits nutzen neuere Arbeiten die sogenannte *micro-particle-image velocimetry* (μPIV), um lokale Informationen über das Geschwindigkeitsfeld zu erhalten und daraus den Transitionsbereich zu ermitteln. In Abb. 12.21 sind ausgewählte Ergebnisse zum laminar-turbulenten Transitionsbereich für glatte kreisförmige Mikrorohre zusammengefasst.

Yu et al. 1995 nutzen ihre Druckverlustmessungen mit Wasser und Stickstoff in Mikrorohren von $d = 19 - 102\,\mu\text{m}$ Durchmesser, um den Transitionsbereich von $Re_d \approx 2000$–6000 abzuleiten. Li et al. 2003 führen Messungen mit Wasser in Mikrorohren von $d = 79.9$–$166.3\,\mu\text{m}$ Durchmesser durch und geben den Transitionsbereich auf Basis ihrer Druckverlustmessungen mit $Re_d \approx 1535$–2630 an. Sharp und Adrian 2004 führen ihre Messungen mit Wasser und einer 1-Propanol-Glycerol-Mischung in Glasrohren von $d = 50$–$247\,\mu\text{m}$ Durchmesser durch. Neben Druckverlustmessungen ziehen die Autoren Messungen der Geschwindigkeit auf der Rohrachse (μPIV) heran. Sie geben den Transitionsbereich mit $Re_d \approx 1800$–2300 an. Die Messungen von Sharp und Adrian 2004 sind als herausragend einzustufen, weil sie ein objektives Kriterium für die Geschwindigkeitsschwankungen auf der Rohrachse, und damit lokale Informationen, zur Festlegung des Transitionsbereichs heranziehen. Der Vergleich des Transitionsbereichs nach Sharp und Adrian 2004 für Mikrorohre mit dem für konventionelle makroskopische Rohrströmungen ($Re_d \approx 2000$–3000) ergibt keine Hinweise darauf, dass in Mikroströmungen die Transition bei deutlich kleineren Reynolds-Zahlen auftritt. Solche Aussagen früherer Autoren (siehe Übersichtsartikel von Sobhan und Garimella 2001 oder Hetsroni et al. 2005a) sind kritisch zu bewerten.

4.3 Wärmeübergang

Bei der Diskussion experimenteller Ergebnisse zum Wärmeübergang in Mikrokanälen wird teilweise den Übersichtsartikeln von Sobhan und Garimella 2001 und

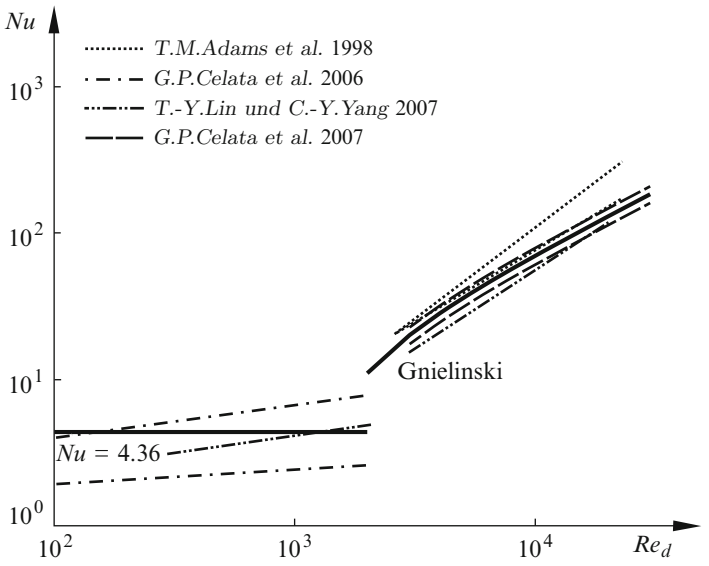


Abb. 12.22 Wärmeübergang in glatten kreisförmigen Mikrorohren für Wasser (Pr = 5)

Hetsroni et al. 2005b gefolgt. Der Fokus der Diskussion liegt ausschließlich auf glatten Kreisrohren bei vorgegebenem Wandwärmestrom, mit Wasser als Fluid. Für thermisch eingelaufene, laminare Strömung in konventionellen Kreisrohren findet sich in der Literatur für vorgebenen Wandwärmestrom die Korrelation

$$Nu \approx 4.36. \tag{12.62}$$

Hierbei kann die Nußelt-Zahl $Nu = h \times d/\lambda$ als dimensionslose Form des Wärmeübergangskoeffizienten h aufgefasst werden. λ ist die Wärmeleitfähigkeit des Fluids, d der Durchmesser und l die Länge des Rohres. In Abb. 12.22 ist die Nußelt-Zahl Nu als Funktion der Reynolds-Zahl Re_d aufgetragen. Die konventionelle Korrelation (12.62) erscheint in Form einer durchgezogenen Kurve im laminaren Bereich. Weiterhin findet sich ein Schar experimenteller Ergebnisse aus der Literatur im laminaren und turbulenten Bereich in Form verschiedener Linien. Schließlich ist die konventionelle Gnielinski-Korrelation

$$Nu \approx \frac{(f/8) \times (Re_d - 1000) \times Pr}{1 + 12.7 \times \sqrt{(f/8)} \times (Pr^{2/3} - 1)}, \tag{12.63}$$

mit

$$f = (0.79 \times \ln Re_d - 1.64)^{-2}, \tag{12.64}$$

in Form einer durchgezogenen Linie für Wasser ($Pr \approx 5$) im turbulenten Bereich eingetragen. Die Prandtl-Zahl $Pr = \nu/k$ beinhaltet die Stoffeigenschaften des Fluids in Form der kinematischen Viskosität ν und der Temperaturleitfähigkeit k. Die Gnielinski-Korrelation ist im Bereich $Re_d \geq 3000$ gültig.

Die Kurven von Celata et al. 2006 sind für Wasser ($Pr \approx 5$) in Glasrohren von $d = 120 - 528\,\mu\text{m}$ Durchmesser erhalten. Sie sind im laminaren Bereich in Form zweier strichpunktierter Linien gegeben, wobei die obere Linie für $d = 528\,\mu\text{m}$ und die untere Linie für $d = 120\,\mu\text{m}$ den Bereich der der gemessenen Nußelt-Zahlen eingrenzen. Die Kurve von Li und Yang 2007 im laminaren Bereich ist erhalten für Wasser in glatten Edelstahlrohren von $d = 123\,\mu\text{m}$ und $962\,\mu\text{m}$ Durchmesser. Die Daten beider Rohre fallen in guter Näherung zusammen und sind in Form der mittleren strichpunktierten Linie in Abb. 12.22 eingetragen. Alle experimentellen Daten für die Nußelt-Zahl im laminaren Bereich weisen eine schwache Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl, etwa der Form $Nu \sim Re_d^{0.2}$, auf. Dies steht in gewissem Widerspruch zur konventionellen Korrelation (12.62). Die Daten von Celata et al. 2006 legen zudem einen systematischen Abfall der Nußelt-Zahl mit abnehmendem Rohrdurchmesser nahe. Dies ist weder mit der konventionellen Korrelation (12.62) noch mit den Daten von Li und Yang 2007 im Einklang.

Die Experimente von Adams et al. 1998 zum turbulenten Wärmeübergang von Wasser ($Pr \approx 5$) in Kreisrohren von $d = 760\,\mu\text{m}$ und $1090\,\mu\text{m}$ Durchmesser zeigen eine explizite Abhängigkeit von d/l. Die obere punktierte Kurve ist für $d = 760\,\mu\text{m}$ gültig, die untere punktierte Kurve für $d = 1090\,\mu\text{m}$. Die untere Kurve folgt in guter Näherung der Gnielinski-Korrelation, während die obere Kurve (dünnes Rohr) deutlich über der Gnielinski-Korrelation liegt und eine stärkere Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl aufweist. Die strichpunktierte Kurve von Li und Yang 2007 nähert sich im turbulenten Bereich der Gnielinski-Korrelation von unten, d. h. die Autoren finden kleinere Nußelt-Zahlen und eine stärkere Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl. Schließlich finden sich im turbulenten Bereich noch die Daten von Celata et al. 2007, welche für Wasser in glatten Glasrohren von $d = 146 - 440\,\mu\text{m}$ Durchmesser erhalten sind. Die Autoren geben an, dass die Daten aller Rohre im Bereich ± 13 % um die Gnielinski-Korrealtion streuen. Die entsprechenden Grenzen sind in Form zweier gestrichelter Kurven auf beiden Seiten der Gnielinski-Korrelation in Abb. 12.22 eingetragen.

Neben den Problemen, die bei den Messungen zum Druckverlust bereits diskutiert wurden (siehe Abschn. 4.1), treten bei der Messung des Wärmeübergangs weitere Schwierigkeiten hinzu. Ältere Messungen (vgl. Übersichtsartikel von Sobhan und Garimella 2001 oder Hetsroni et al. 2005b) beruhen häufig auf den Temperaturen am Ein- und Austritt. Somit bleiben die Effekte durch den thermischen Einlauf und durch die axiale Wärmeleitung in der Wand (und im Fluid) überlagert. Zudem kommt es aufgrund der Temperaturänderung zu Änderungen der Stoffeigenschaften. Die in Abb. 12.22 einbezogenen experimentellen Ergebnisse stammen alle aus jüngerer Zeit. Sie machen durchweg von lokaler Temperaturmesstechnik Gebrauch und korrigieren aufwendig die Effekte des thermischen Einlaufs, der axialen Wärmeleitung und der temperaturabhängigen Stoffeigenschaften. Insofern sind diese

Messungen von herausragender Qualität. Gleichwohl zeigt der Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den konventionellen makroskopischen Korrelationen, dass durchaus noch Diskrepanzen verbleiben. Deutlich größere Diskrepanzen finden sich nach wie vor zwischen dem gemessenen Wärmeübergang von Gasen in Mikrorohren und den konventionellen Korrelationen.

Weiterführende Literatur

Abraham, F.F.: The interfacial density profile of a lennard-jones fluid in contact with a (100) Lennard-Jones wall and its relationship to idealized fluid/wall systems: a Monte Carlo simulation. J. Chem. Phys. **68**, 3713 (1978)

Adams, T.M., Abdel-Khalik, S.I., Jeter, S.M., Qureshi, Z.H.: An experimental investigation of single-phase forced convection in microchannels. Int. J. Heat Mass Transf. **41**, 851–857 (1998)

Barz, D.P.J.: Ein Beitrag zur Modellierung und Simulation elektrokinetischer Transportprozesse in mikrofluidischen Einheiten. Dissertation, Universität Karlsruhe (2005)

Batchelor, G.K.: An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge (2005)

Bird, G.A.: Molecular Gas Dynamics. Claredon Press, Oxford (1976)

Brutin, D., Topin, F., Tadrist, L.: Transient method for the liquid laminar flow friction factor in microtubes. AIChE J. **49**, 2759–2767 (2003)

Burgreen, D., Nakache, F.: Electrokinetic flow in ultrafine capillary slits. J. Phys. Chem. **68**, 1084–1091 (1964)

Chan, D.Y.C., Horn, R.G.: The drainage of thin liquid films between solid surfaces. J. Chem. Phys. **83**, 5311–5324 (1985)

Chapman, S., Cowling, T.G.: The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge University Press, Cambridge (1970)

Celata, G.P., Cumo, M., Marconi, V., McPhail, S.J., Zummo, G.: Microtube liquid single-phase heat transfer in laminar flow. Int. J. Heat Mass Transf. **49**, 3538–3546 (2006)

Celata, G.P., Cumo, M., McPhail, S.J., Zummo, G.: Single-phase laminar and turbulent heat transfer in smooth and rough microtubes. Microfluid Nanofluid **3**, 697–707 (2007)

Choi, S.B., Barron, R.F., Warrington, R.O.: Fluid flow and heat transfer in microtubes. ASME AMD-DSC **32**, 123–134 (1991)

Craig, V.S.J., Neto, C., Williams, D.R.M.: Shear-dependent boundary slip in an aqueous Newtonian liquid. Phys. Rev. Lett. **87**(5), 054504 (2001)

de Gennes, P.G.: Wetting: Statistics and dynamics. Rev. Mod. Phys. **57**, 827 (1985)

Debye, P., Hückel, E.: Zur Theorie der Elektrolyte. Gefrierpunktserniedrigung und verwandte Erscheinungen. Physikalische Z. **24**, 185–206 (1923)

Derzko, N.A.: Review of Monte Carlo methods in kinetic theory. UTIAS Review 35, University of Toronto (1972)

Dongqing, Li: Electrokinetics in Microfluidics. Elsevier, London (2004)

Dussan, E.B.: On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines. Ann. Rev. Fluid Mech. **11**, 371 (1979)

Dussan, E.B., Davis, S.H.: On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface. J. Fluid Mech. **50**, 977 (1974)

Fritz, G.: Über den dynamischen Randwinkel im Fall der vollständigen Benetzung. Z. Angew. Physik **19**, 374 (1965)

Gad-el-Hak, M.: The fluid mechanics of microdevices – the Freeman scholar lecture. J. Fluids Engineering **121**, 5–33 (1999)

Gad-el-Hak, M.: Flow physics. In: Gad-el-Hak, M. (Hrsg.) The MEMS Handbook: Introduction and Fundamentals, 2. CRC, Boca Raton (2006)

Gee, M.L., McGuiggan, P.M., Israelachvili, J.N., Homola, A.M.: Liquid to solidlike transition of molecularly thin films under shear. J. Chem. Phys. **93**, 1895–1906 (1990)
Green, H.: The Structure of Liquids. S. Flügge, (Hrsg.), Handbuch der Physik, Bd. 10. Springer, Berlin (2002)
Herwig, H.: Flow and heat transfer in micro systems: is everything different or just smaller? Z. Angew. Math. Mech. **82**, 579–586 (2002)
Hetsroni, G., Mosyak, A., Pogrebnyak, E., Yarin, L.P.: Fluid flow in micro-channels. Int. J. Heat Mass Transf. **48**, 1982–1998 (2005a)
Hetsroni, G., Mosyak, A., Pogrebnyak, E., Yarin, L.P.: Heat transfer in micro-channels: comparison of experiments with theory and numerical results. Int. J. Heat Mass Transf. **48**, 5580–5601 (2005b)
Hoffman, R.L.: A study of the advancing interface. I. Interface shape in liquid-gas system. J. Colloid Interface Sci. **50**, 228 (1975)
Hunter, R.J.: Zeta Potential in Colloid Science: Principles and Applications. Accademic, London (1981)
Ivanov, M.S., Rogasinsky, S.V.: Theoretical analysis of traditional and modern schemes of the DSMC method. In: Proceedings of the 17th RGD Symposium, Bd. 1, Verlag Chemie, Aachen (1991)
Joseph, P., Tabeling, P.: Direct measurement of the apparent slip length. Phys. Rev. E **71**, 035303 (2005)
Judy, J., Maynes, D., Webb, B.W.: Characterization of frictional pressure drop for liquid flows through microchannels. Int. J. Heat Mass Transf. **45**, 3477–3489 (2002)
Karniadakis, G.E., Beskok, A.: Micro Flows. Fundamentals and Simulation. Springer, New York (2004)
Koplik, P.J., Banavar, J.R.: Continuum deductions from molecular hydrodynamics. Ann. Rev. Fluid Mech. **27**, 257–292 (1995)
Lennard-Jones, J.E.: Cohesion. Proc. Phys. Soc. Lond. **43**, 461 (1931)
Li, Z.X., Du, D.X., Guo, Z.Y.: Experimental study on flow characteristics of liquid in circular micro-tubes. Microscale Thermophys. Eng. **7**(3), 253–265 (2003)
Li, H., Yoda, M.: An experimental study of slip considering the effects of non-uniform colloidal tracer distributions. J. Fluid Mech. **662**, 269–287 (2010)
Lin, T.-Y., Yang, C.-Y.: An experimental investigation on forced convection heat transfer performance in micro tubes by the method of liquid crystal thermography. Int. J. Heat Mass Transf. **50**, 4736–4742 (2007)
Löfdahl, L., Gad-el-Hak, M.: Sensors and actuators for turbulent flows. In: Gad-el-Hak, M. (Hrsg.) The MEMS Handbook: Applications, 2. CRC, Boca Raton (2006)
Loose, W., Hess, S.: Rheology of dense model fluids via nonequilibrium molecular dynamics: shear thinning and ordering transition. Rheologica Acta **28**, 91–101 (1989)
Maier, C.: Techniken der Hochgeschwindigkeitsmikrokinematographie zur Bewertung von Mikrodosiersystemen und Mikrotropfen. Fortschritts-Bericht 1037, VDI (2004). Dissertation Universität Ulm
Manz, A., Becker, H.: Microsystem Technology in Chemistry and Life Sciences. Springer, Berlin (1999)
Maxwell, J.: On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature. Philos. Trans. R. Soc. **170**(1), 231–256 (1879)
Meisel, I., Ehrhard, P.: Electrically-excited (electroosmotic) flows in microchannels for mixing applications. Eur. J. Mech. B: Fluids **25**, 491–504 (2006)
Moss, J.N., Bird, G.A.: Direct simulation of transitional flow for hypersonic reentry conditions. 84-0223, AIAA (1984)
Nanbu, K.: Numerical simulation of Boltzmann flows of real gases – accuracy of models used in the Monte Carlo method. Rep. Inst. Fluid Science 4, Tohoku University, Sendai (1992)
Oertel, H., jr.: Aerothermodynamik. Springer, Berlin/Heidelberg (1994). Universitätsverlag, Karlsruhe (2005)

Oron, A.: Physics of thin liquid films. In: Gad-el-Hak, M. (Hrsg.) The MEMS Handbook: Introduction and Fundamentals, 2. CRC, Boca Raton (2006)
Oron, A., Davis, S.H., Bankoff, S.G.: Long-scale evolution of thin liquid films. Rev. Modern Phys. **69**, 931–980 (1997)
Overbeek, J.T.G.: Electrokinetic phenomena. In: Kruyt, H.R. (Hrsg.) Colloid Science, Bd. 1. Elsevier, Amsterdam (1952)
Probstein, R.F.: Physicochemical Hydrodynamics. Wiley, New York (1994)
Ramos, A., Morgan, H., Green, N.G., Castellanos, A.: AC electrokinetics: a review of forces in microelectrode structures. J. Phys. D: Appl. Phys. **31**, 2338–2353 (1998)
Rice, C.L., Whitehead, R.: Electrokinetic flow in a narrow cylindrical capillary. J. Phys. Chem. **69**, 4017–4024 (1965)
Rose, W., Heins, R.W.: Moving interfaces and contact angle rate-dependency. J. Colloid Sci. **17**, 39 (1962)
Schaaf, S.A., Chambré, P.L.: Flow of Rarefied Gases. Princeton University Press, Princeton (1961)
Schubert, K., Brandner, J.J., Fichtner, M., Linder, G., Schygulla, U., Wenka, A.: Microstructure devices for applications in thermal and chemical process engineering. J. Microscale Thermophys. Eng. **5**, 17–39 (2001)
Schwartz, A.M., Tajeda, S.B.: Studies of dynamic contact angles on solids. J. Colloid Interface Sci. **38**, 359 (1972)
Sharp, K.V., Adrian, R.J.: Transition from laminar to turbulent flow in liquid filled microtubes. Exp. Fluids **36**, 741–747 (2004)
Sharp, K.V., Adrian, R.J., Santiago, J.G., Molho, J.I.: Liquid flows in microchannels. In: Gad-el-Hak, M. (Hrsg.) The MEMS Handbook: Introduction and Fundamentals, 2. CRC, Boca Raton (2006)
Shih, J.C., Ho, C.-M., Liu, J., Tai, Y.-C.: Non-linear pressure distribution in uniform microchannels. ASME AMD-MD, 238 (1995)
Sobhan, C., Garimella, S.V.: A comparative analysis of studies on heat transfer and fluid flow in microchannels. J. Microscale Thermophys. Eng. **5**, 293–311 (2001)
Tanner, L.H.: The spreading of silicone oil drops on horizontal surfaces. J. Phys. D: Appl. Phys. **12**, 1473 (1979)
Thompson, P.A., Troian, S.M.: A general boundary condition for liquid flow at solid surfaces. Nature **389**, 360–362 (1997)
Tretheway, D.C., Meinhart, C.D.: Apparent fluid slip at hydrophobic microchannel walls. Phys. Fluids **14**, L9–L12 (2002)
Vallet, M., Berge, B., Vovelle, L.: Electrowetting of water and aqueous solutions on Polyethylene Terephthalate insulating films. Polymer **37**, 2465–2470 (1996)
Young, T.: An essay on the cohesion of fluids. Philos. Trans. R. Soc. Lond. **95**, 65–87 (1805)
Yu, D., Warrington, R., Barron, R., Anieel, T.: An experimental and theoretical investigation of fluid flow and heat transfer in microtubes. In: Proceedings of the ASME/JSME Thermal Engineering Conference, Hawaii, Bd. 1, 523–530 (1995)
Zheng, S., Tai, Y.C.: Streamline based design of a MEMS device for continuous blood cell separation. In: Twelth Hilton Head Workshop on the Science and Technology of Solid-state Sensors, Actuators, and Microsystems, Hilton Head, Bd. 1 (2006)

Bioströmungsmechanik

13

Herbert Oertel Jr.

Zusammenfassung

Das Kapitel Bioströmungsmechanik befasst sich im Gegensatz zu den vorangegangenen Kapiteln mit Strömungen die von flexiblen biologischen Oberflächen aufgeprägt werden und ist Teil des Lehrbuches und Nachschlagewerkes H. Oertel jr. (Hrsg.) Prandtl-Führer durch die Strömungslehre. Von der Vielzahl der biologischen Strömungen werden in diesem Kapitel exemplarisch die Grundlagen des Fliegens und Schwimmens der Tiere sowie die pulsierende Strömung im menschlichen Herzen behandelt. Die Bioströmungsmechanik ist mathematisch dadurch gekennzeichnet, dass die Grundgleichungen der Strukturmechanik biologischer Materialien mit den Grundgleichungen der Strömungsmechanik verknüpft und Modelle der Strömung-Struktur Kopplung zur Strömungssimulation entwickelt werden.

1 Grundlagen der Bioströmungsmechanik

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Kapiteln befasst sich die Bioströmungsmechanik mit Strömungen, die von flexiblen biologischen Oberflächen aufgeprägt werden. Man unterscheidet die *Umströmung* von Lebewesen in Luft bzw. in Wasser, wie den Vogelflug oder das Schwimmen der Fische und *Innenströmungen*, wie z. B. der geschlossene Blutkreislauf von Lebewesen. Die Evolution hat in den vergangenen Jahrmillionen für die Fortbewegung der Lebewesen je nach Größe und Gewicht das Kriechen, Laufen, Schwimmen, Gleiten bzw. Fliegen entwickelt.

Der für die Ortsveränderung notwendige Vortrieb erfordert die, der Reynolds-Zahl der Bewegung angepasste Strömungskontrolle. Die Fortbewegung von Bakterien und Einzellern erfolgt bei sehr kleinen Reynolds-Zahlen und damit bei vorherrschender Reibung mit Wimpern und Geißeln. Kaulquappen und Kraken

Herbert Oertel Jr. (✉)
Baden-Baden, Deutschland
E-Mail: herbert.oertel@t-online.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5_13

nutzen die Trägheitskraft eines Strahlantriebs zur Fortbewegung. Aale bewegen sich wellenförmig, Wale nutzen bei Reynolds-Zahlen bis zu 10^8 die Wirbelablösung der Schwanzflosse zum Vortrieb. Schnell schwimmende Fische wie die Haie haben Längsrillen auf ihren Schuppen, um die viskose Unterschicht der Strömungsgrenzschicht derart zu beeinflussen, dass der Strömungswiderstand reduziert wird. Delfine erreichen die Verringerung des Strömungswiderstandes mit einer welligen Schleimhaut. Der Pinguin nutzt das Ausgasen des Federkleides zur Strömungskontrolle.

Der Wärme- und Stofftransport in Lebewesen erfolgt in Kreisläufen. Dazu gehören die Atmung, der Blut- und Lymphkreislauf sowie der Wasserhaushalt. Allen biologisch bedingten Strömungen ist gemeinsam, dass die Bewegung von äußeren bzw. inneren hochflexiblen und strukturierten Oberflächen aufgeprägt wird. Daraus resultiert eine aktiv kontrollierte Strömung, deren Verluste gering gehalten werden.

Von der Vielzahl biologischer Strömungen werden in diesem Kapitel das *Schwimmen* und *Fliegen* der Tiere und die *Blutzirkulation im menschlichen Herzen* ausgewählt (Abb. 13.1). Der *Vogelflug* wurde bereits in Abschn. 1 des

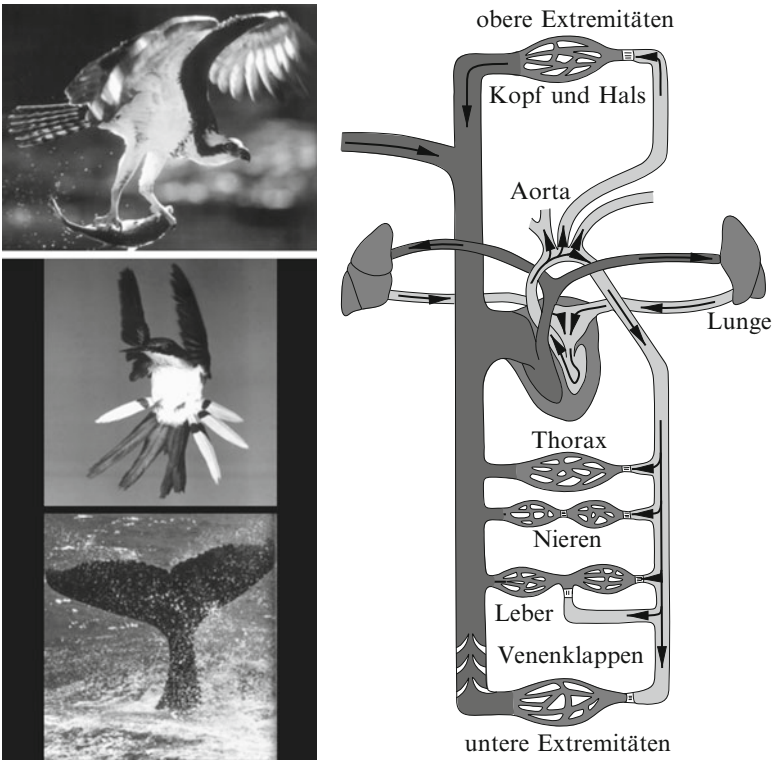


Abb. 13.1 Fliegen, Schwimmen der Tiere und Blutkreislauf des menschlichen Körpers

Kap. 5 ▸ Aerodynamik eingeführt. Der zum Fliegen erforderliche Auftrieb und Vortrieb wird durch den Flügelschlag erreicht. Der Abwärtsschlag des Vogelflügels wird mit großer Kraft und der Aufwärtsschlag bei möglichst geringem aerodynamischen Widerstand ausgeführt. Den größten Teil des Vortriebs liefern die äußeren Teile des Flügels, die den größten Teil der Vertikalbewegung zurücklegen. Dabei wird kontinuierlich die Anstellung und Form des Flügels im Verlauf einer Schlagperiode verändert. Der innere Teil des Vogelflügels erzeugt den Auftrieb.

Der Vortrieb der *Fische* wird beim Schwimmen von der Auf- und Abwärtsbewegung bzw. bei den kleineren Fischen von der Seitwärtsbewegung der Schwanzflosse erzeugt. Diese weist ein symmetrisches Profil auf, so dass während einer Schlagperiode der Schwanzflosse ein kontinuierlicher Vortrieb erzeugt wird. Den Auftrieb kontrollieren die meisten Fische mit einer Schwimmblase, die im Magen der Fische angeordnet ist. Wale und Delfine erzeugen ohne Schwimmblase mit der Vertikalbewegung der Schwanzflosse zusätzlich zum Vortrieb einen Auftrieb, der durch die horizontale Stellung der Schwanzflosse ermöglicht wird.

Die Fortbewegung von Bakterien und Einzellern erfolgt bei vorherschender Reibung mit Wimpern und Geißeln. Kaulquappen und Kraken nutzen die Trägheitskraft des Strahlantriebes zur Fortbewegung. Aale bewegen sich wellenförmig.

Der *Blutkreislauf* des menschlichen Körpers wird vom Herzen angetrieben. Das Herz pumpt in jeder Minute etwa 5 l Blut in den Kreislauf. Die Pumpleistung kann sich bei körperlicher Belastung auf 20 bis 30 l pro Minute erhöhen. Der Blutkreislauf besteht aus zwei getrennten, über das Herz untereinander verbundenen Teilkreisläufen. Man bezeichnet den einen als *Körperkreislauf* und den anderen als *Lungenkreislauf*. Der Gesamtkreislauf sichert den Gasaustausch zwischen dem Stoffwechsel im menschlichen Gewebe und der Luft der Atmosphäre.

Der *Körperkreislauf* beginnt mit der Aorta, die sich in große Arterien verzweigt. Zum Kreislauf gehören Körperkapillaren, über die das Blut einen Teil seines Sauerstoffs abgibt und Kohlendioxid aufnimmt. Aus den Kapillaren fließt das Blut in die Körpervenen, über die es wieder dem Herzen zugeführt wird. Vom Herzen wird das Blut in den *Lungenkreislauf* gepumpt, der sich aus den Lungenarterien, -kapillaren und -venen zusammensetzt. In den Lungenkapillaren gibt das Blut einen Teil seines Kohlendioxids ab und nimmt soviel Sauerstoff auf, wie es vorher an das Körpergewebe abgegeben hat.

1.1 Bioströmungsmechanik der Tiere

Dreiviertel aller Tierarten können schwimmen oder fliegen. Die Evolution hat in $6 \cdot 10^8$ Jahren die unterschiedlichsten Formen der Fortbewegung in Wasser und Luft entwickelt. Die dabei erreichten Reynolds-Zahlen reichen von 10^{-3} für Bakterien und Einzeller bis hin zu 10^8 für schnell schwimmende Wale. Beim Fliegen in der Atmosphäre werden Reynolds-Zahlen von 10^{-1} für die kleinsten Insekten und kurzzeitig bis zu 10^7 für schnell fliegende Vögel erreicht. Entsprechend den Ausführungen in Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten wird die Umströmung bei Reynolds-Zahlen $Re_l \ll 1$ von der Trägheit des Fluids dominiert. Im

Übergangsbereich $10^{-1} < Re_l < 10$ bestimmen der Reibungs- und Trägheitseinfluss die Umströmung der Tiere.

Entsprechend den Reynolds-Zahlbereichen haben sich in der Natur unterschiedliche Formen des Vortriebs und Auftriebs entwickelt. Bakterien und Einzeller bewegen sich mit Wimpern und Geißeln fort. Dabei treibt die oszillierende Bewegung der Geißel den Einzeller voran. Diese Wellenbewegung ist bei den Fischen lediglich im letzten Drittel des Körpers ausgebildet und dient dem langsamen Schwimmen. Der größte Teil des Vortriebs wird von den schnell schwimmenden Fischen mit dem periodischen Schwanzflossenschlag erzielt. Dabei erreichen die Haie Spitzengeschwindigkeiten bis zu 90 km/h, indem sie den Wellenmodus der Fortbewegung im hinteren Teil des Körpers durch ein druckgesteuertes Erstarren der Fischhaut ausschalten. Der Auftrieb des Fisches im Wasser wird in der Regel mit der Fischblase kompensiert. Schnell schwimmende Fische wie Haie kompensieren den Auftrieb mit seitlichen Flossen bzw. einem vertikalen Flossenschlag (siehe Abb. 13.1), der neben dem Vortrieb den erforderlichen Auftrieb erzeugt.

Das Fliegen der Insekten mit Flügelschlägen bis zu 1000 pro Sekunde hat sich bereits vor 3×10^8 Jahren auf der Erde entwickelt. Das Fliegen und Gleiten von Vögeln tauchte erstmals vor 0.5×10^8 Jahren auf. Gegenüber dem Schwimmen muss der Flügelschlag beim Fliegen Vortrieb und Auftrieb bei stabiler Fluglage erzeugen. Dies führt zu gewölbten Flügeloberflächen, deren sich kontinuierlich verändernde Druckverteilung auf der Flügelober- und -unterseite den notwendigen Auftrieb sicherstellt. Dabei wird der für den Vortrieb notwendige Flügelschlag beim Vogel kräftiger beziehungsweise mit höherer Frequenz als der Schwanzflossenschlag des Fisches ausgeführt. Die meisten fliegenden Tiere beherrschen neben dem Vorwärts- und Gleitflug auch den Schwebeflug, der insbesondere beim Starten und Landen benutzt wird. Die Flügeloszillationen betragen bei den kleinsten Mücken 1000 Hz, bei den Bienen 200 Hz, beim Kolibri 45 Hz und beim Kondor 1.2 Hz.

Die Abb. 13.2 zeigt den Flügelschlag einer Möwe in Ergänzung zu Kap. 5 ▸ Aerodynamik, Abb. 2. Zu Beginn des Abwärtsschlages ist der Flügel voll ausgestreckt und bewegt sich ohne Vorwärtskomponente relativ zum Vogel. In der Mitte des Abwärtsschlages wird die Flügelspitze leicht gedreht und erzeugt die Vortriebskomponente. Am Ende des Abwärtsschlages ist der Flügel voll gestreckt und erzeugt über die gesamte Flügelspannweite Auftrieb. Zu Beginn des Aufwärtsschlages wird der Flügel abgeknickt bei gleichzeitiger Erhöhung des Anstellwinkels, um den Verlust des Auftriebs im äußeren Teil des Flügels zu kompensieren. Dabei bewegt sich der Flügel leicht nach hinten und die Flügelspitzen werden etwas gespreizt. Die Hauptfedern des Flügels befinden sich in Ruhestellung. In der Mitte des Aufwärtsschlages sind die Federn übereinandergefaltet. Die Rückwärtsbewegung wird fortgesetzt und der Anstellwinkel weiter erhöht. Am Ende des Aufwärtsschlages ist der Flügel wieder gestreckt und die Hauptfedern schwingen wieder nach vorne, um den nächsten Abwärtsschlag einzuleiten.

Die Stabilität des Vogelfluges wird mit den Schwanzfedern erreicht. Deren Spreizen ermöglicht auch abrupte Flugmanöver wie Abbremsen, Schweben und Gleiten. Die Flügel der Vögel sind für das Fliegen bei größeren Reynolds-Zahlen ausgelegt. So wird durch geeignete Grenzschichtkontrolle aufgrund der Beweglichkeit der

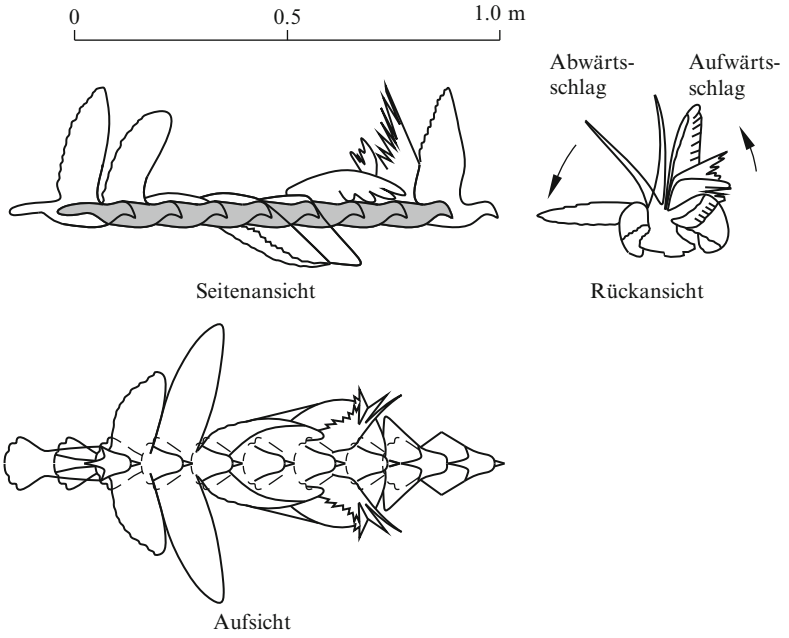


Abb. 13.2 Flügelschlag einer Möwe, Gray 1968

Federn, den Schlitzen in den Vorderflügeln und dem Spreizen der Flügelendfedern die Strömungsablösung vermieden und der induzierte Widerstand gering gehalten. Durch eine geeignete Oberflächengestaltung wie Vorderkantenkämme und Federflaum wird der Reibungswiderstand reduziert und z. B. bei der Nachteule aerodynamische Geräusche verringert. Eine zusammenfassende Übersicht über das Schwimmen und Fliegen der Tiere wird in dem Buch von *J. Lighthill* 1986 gegeben.

Die *Fortbewegung der Einzeller* erfolgt durch eine transversale Wellenbewegung entlang der Geißeln (Abb. 13.3) mit ansteigender Amplitude zum Geißelende. Beträgt die Wellengeschwindigkeit V, ergibt sich aufgrund der Wellenbewegung eine Vorwärtsgeschwindigkeit des Einzellers der Größenordnung $U = 0.2 \times V$.

Ganz entsprechend bewegen sich Fadenwürmer einer Länge von etwa 1 mm mit der Reynolds-Zahl 1. Die Geschwindigkeit der Welle entlang des Körpers beträgt $V = 1\,\mathrm{mm/s}$. Die resultierende Vorwärtsgeschwindigkeit ergibt beim Fadenwurm $U = 0.4 \times V$. Der Grund für die gegenüber dem Einzeller vergrößerte Vorwärtsgeschwindigkeit liegt darin, dass keine zusätzliche Kopfzelle (Abb. 13.14) bewegt werden muss. Dabei beträgt die Amplitude der Transversalbewegung des Wurmendes ein Vielfaches gegenüber der Transversalbewegung am Kopfende. Größere Würmer erreichen bei einer Länge von 10 cm beim Schwimmen Reynolds-Zahlen bis zu 10^3 bei Fortbewegungsgeschwindigkeiten von 10 mm/s. Die transversalen Wellen entlang des Körpers erzeugen auch hier den Vortrieb. Aale nutzen die Transversalbewegung der Rückenflosse für das langsame Schwimmen. Bei größeren

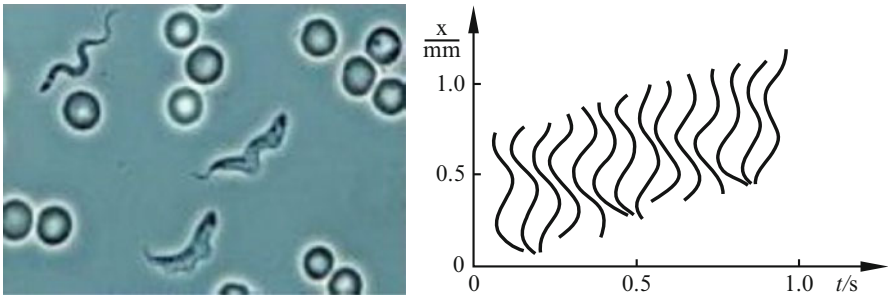


Abb. 13.3 Fortbewegung von Einzellern und Fadenwürmern

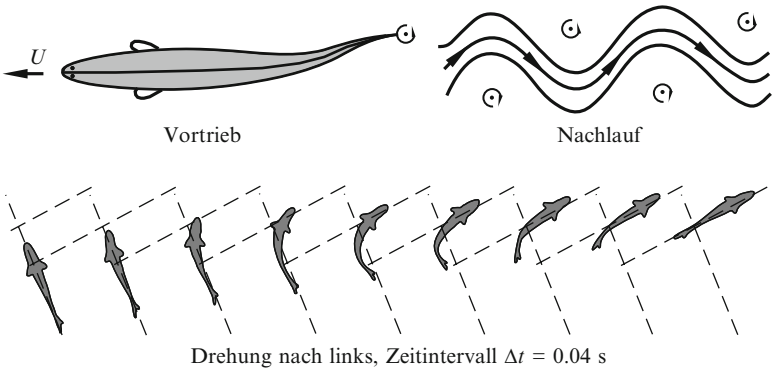


Abb. 13.4 Vortrieb des Fisches

Geschwindigkeiten bewegt sich der gesamte Körper wellenförmig fort. Der Vortrieb wird auch bei runden Spezies durch ein periodisches Aufdicken und Verjüngen verursacht. Dabei wird durch eine Richtungsänderung der Welle entlang des Körpers die Vorwärts- und Rückwärtsbewegung ermöglicht.

Bei größeren Reynolds-Zahlen ist aufgrund der dominanten Trägheitskraft die Wellenbewegung des gesamten Körpers ineffizient. Deshalb ist beim *Schwimmen des Fisches* entsprechend der Abb. 13.4 lediglich das letzte Drittel des Körpers an der Wellenbewegung beteiligt. Der größte Teil des Vortriebs wird durch die periodische Bewegung der Schwanzflosse erzeugt, die periodisch ablösende Wirbel im Nachlauf und damit Strömungsverluste zur Folge hat. Deshalb hat die Evolution je nach Reynolds-Zahl der Fortbewegung im Wasser den Druckwiderstand durch geeignete Formgebung des Körpers, den Reibungswiderstand durch die Oberflächenbeschaffenheit der Fischhaut und den induzierten Widerstand durch eine geeignete Profilierung der Schlagflosse optimiert. So haben Delfine und Pinguine eine bezüglich des Gesamtwiderstandes optimale Körperform, die beim Eselspinguin den Wert $c_w = 0.03$ bei der Reynolds-Zahl $Re_l = 10^6$ aufweist. Dieser Wert kommt trotz des bauchigen Körpers und der stabilisierenden Hinterbeine des Pinguins dem technischen Stromlinienkörper einer Rotationsspindel mit einem

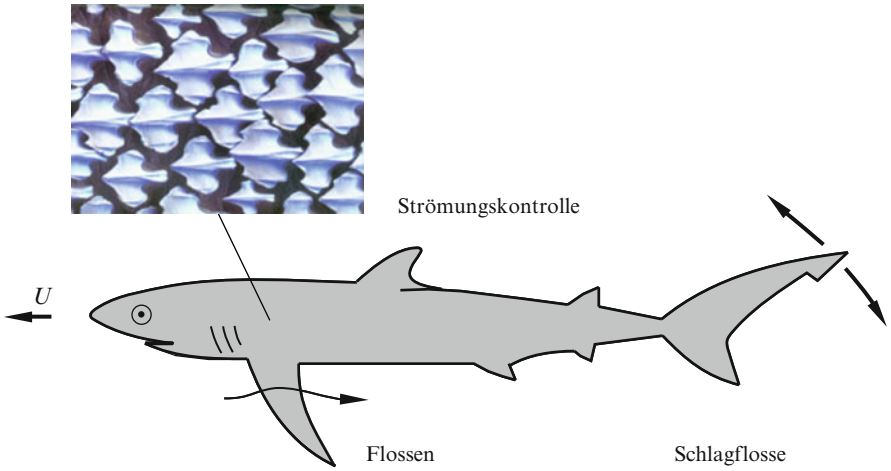


Abb. 13.5 Schwimm- und Schlagflosse des Hais

Widerstandsbeiwert von $c_w = 0.04$ sehr nahe (Nachtigall 2001). Es ist das Stummelfederkleid des Pinguins, das die viskose Unterschicht der Grenzschicht derart beeinflusst, dass der Reibungswiderstand reduziert wird.

Die Delfine erreichen den selben Effekt mit einer schleimigen Oberfläche, die den laminar-turbulenten Übergang in der Grenzschicht dämpft und durch Zugabe von geringfügigen Mengen von Polymeren in das umströmende Wasser den Reibungswiderstand verringert.

Schnell schwimmende Fische wie der Hai (Abb. 13.5) verhindern die Querkomponenten der Schwankungsgeschwindigkeit in der viskosen Unterschicht der Grenzschicht durch Längsrillen der Schuppen und erreichen damit kurzzeitig Spitzengeschwindigkeiten bis 90 km/h.

Die Fische verfügen über zusätzliche Schwimmflossen, um die vom Flossenschlag erzeugten Roll- und Giermomente ausgleichen zu können, die das Schwimmen in einer Richtung erst möglich machen. Sie erlauben auch, trotz der dominanten Trägheitskraft bei großen Reynolds-Zahlen, das Abbremsen sowie abrupte Richtungsänderungen beim Schwimmen.

1.2 Bioströmungsmechanik des Menschen

Von den strömungsmechanisch relevanten Kreisläufen des menschlichen Körpers wie das Atmungssystem, der Blut- und Lymphkreislauf und der Wasserhaushalt wird das *Herz-Kreislaufsystem* ausgewählt, das den Transport von Nährstoffen, Gasen, Stoffwechselprodukten und Hormonen zu den Organen des menschlichen Körpers sicherstellt. Der aus strömungsmechanischer Sicht interessante Teil des Blutkreislaufes ist der Arterienkreislauf, der durch pulsierende Einlaufströmungen, Sekundärströmungen in Adernkrümmungen und Verzweigungen sowie der

quasistationären Strömung in den Arteriolen und Kapillaren mit dem Gas- und Stoffaustausch gekennzeichnet ist.

Die Reynolds-Zahlen der Blutströmung in den Arterien der Abb. 13.1 liegen zwischen einhundert bis mehreren tausend. Der Strömungspuls des Herzens verursacht in den kleineren Arterien eine periodische laminare Strömung und in den größeren Arterien eine *transitionelle Strömung*. Der Übergang zur turbulenten Arterienströmung wird dabei von temporären Wendepunktprofilen eingeleitet. Diese treten bei der instationären Rückströmung in der Nähe der Arterienwand während der Relaxationsphase des Herzens auf. Die Zeit eines Herzzyklus reicht jedoch nicht aus, dass sich eine ausgebildete turbulente Strömung einstellt. Je kleiner die Arterienverzweigungen werden umso geringer macht sich die pulsierende Strömung bemerkbar.

In den gekrümmten Arterien und insbesondere in der Aorta bilden sich aufgrund der Zentrifugalkraft *Sekundärströmungen* aus, wie sie von Abschn. 7 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten bekannt sind. Dabei entsteht eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu den Stromlinien, die eine Zirkulationsströmung in Richtung der Außenwand verursacht. Diese wirkt stabilisierend auf den Transitionsprozess. Die kritische Reynolds-Zahl des zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofils wächst von 2300 für das gerade Rohr auf bis zu 6000 des gekrümmten Rohres an. Die Peak-Reynolds-Zahlen des Strömungspulses stellen sich beim gesunden Menschen so ein, dass die Sekundärströmung in der Krümmung des Aortenkanals das Einsetzen der Turbulenz verhindern. Die beschriebene instationäre transitionelle Strömung in der wandnahen Grenzschicht erfolgt während der Abbremsphase des Pumpzyklus. Die dabei auftretenden Instabilitäten werden jedoch nach kurzer Zeit durch die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsprofils gedämpft.

Die Blutströmung, die das Herz verlässt, wird in bis zu 30 *Verzweigungen* unterteilt bis hin zur *Mikrozirkulation* von mehreren hundert Millionen kleinen individuellen Strömungen in Adern mit einigen hundert Mikrometer Durchmesser bzw. in Kapillaren von weniger als 10 Mikrometer Durchmesser.

Vom Ventrikelausgang in die *Aorta* sowie nach jeder Verzweigung bildet sich eine *Einlaufströmung*. Die Einlaufströmung im geraden Rohr des Durchmessers D beträgt etwa $0.03 \times Re_D \times D$. Daraus ergibt sich, dass der größte Teil der Arterien nach den Verzweigungen durch Einlaufströmungen charakterisiert sind und sich damit keine gemittelte Poiseuille-Strömung einstellt. Betrachtet man den großen Bogen der Aorta in Abb. 13.1, so kann man aufgrund der Einlaufströmung trotz der großen Krümmung keine ausgebildete Sekundärströmung erwarten.

Der Druckpuls des Herzens erzeugt eine *Arterienerweiterung* von etwa 2 %. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Druckwelle in den viskoelastischen Arterienwänden ist etwa fünf mal größer als die maximale Blutgeschwindigkeit.

Betrachtet man die erste Fourier-Komponente des Druckpulses mit der Kreisfrequenz ω der Geschwindigkeitsverteilung des Blutpulses, so hängt diese kritisch vom Verhältnis des Arteriendurchmessers D und der oszillierenden *Grenzschichtdicke* $\sqrt{\nu/\omega}$ ab. Nimmt man für die Zähigkeit des Blutes $4 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$ und für die Kreisfrequenz des Blutpulses $\omega = 8\,\mathrm{s^{-1}}$ ergibt sich für die Grenzschichtdicke δ etwa 0.7 mm. Für die n-te Fourier-Mode des Blutpulses ist die Grenzschichtdicke

mit $\sqrt{n}$ zu multiplizieren. Für die großen Arterien ist das Verhältnis des Arteriendurchmesser D zur Grenzschichtdicke δ von der Größenordnung 20. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeitsverteilung über dem Arterienquerschnitt nahezu gleichförmig ist. Änderungen der Geschwindigkeitsverteilung ergeben sich lediglich in der Wandgrenzschicht, die 5 % des Arteriendurchmessers ausmachen. Daraus resultiert, dass entsprechend der Euler-Gleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (76)) fast der gesamte Druckgradient des Blutpulses in Beschleunigung umgesetzt wird. Dabei hat die Strömung gegenüber dem Druckgradienten eine Phasenverschiebung von nahezu 90°. Diese verringert sich in der Grenzschicht für die Wandschubspannung auf lediglich 45°.

Der *Blutpuls* hat in der Aorta eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von 5 m/s. Dabei handelt es sich nicht nur um eine vom Herzen ausgehende laufende Welle. Jede Arterienverzweigungen verursacht reflektierte Wellen, die dem ursprünglichen Druck- und Geschwindigkeitspuls überlagert werden. Daraus ergibt sich in den Arterien ein intermittierender Charakter zwischen einer laufenden und einer stehenden Welle. Das hat zur Folge, dass die Aorta als *Volumenreservoir* für den Herzausstoß wirkt und für einen nahezu kontinuierlichen Volumenstrom der Blutzirkulation sorgt.

Der Blutkreislauf wird vom menschlichen Herzen angetrieben. Das *Herz* besteht aus zwei getrennten Pumpkammern, dem linken und rechten *Ventrikel* und den *Vorhöfen*, die vom Herzmuskel gebildet werden (Abb. 13.6 und Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik, Abb. 13). Der rechte Vorhof erhält sauerstoffarmes Blut

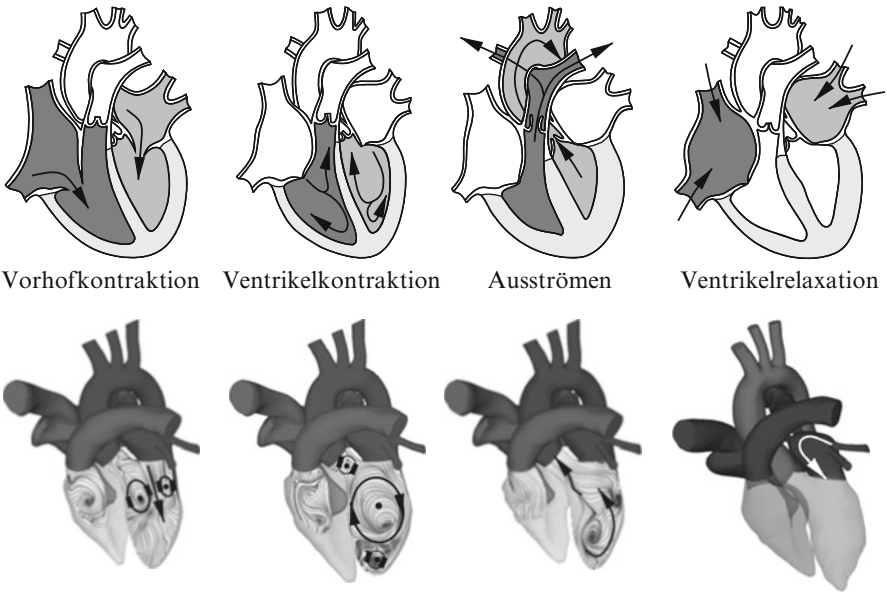


Abb. 13.6 Schnittbilder des Herzens und Strömungsberechnung während der vier Phasen des Herzzyklus

aus dem Körperkreislauf. Der rechte Ventrikel füllt sich anschließend mit dem Blut aus dem rechten Vorhof, um sich bei seiner Kontraktion in den Lungenkreislauf zu entleeren. Das dort reoxigenierte Blut erreicht den linken Vorhof und wird vom linken Ventrikel in den Körperkreislauf gefördert. Die Vorhöfe und Ventrikel sind durch die Atrioventrikularklappen getrennt, die die Füllung der Herzventrikel regulieren. Die rechte Klappe weist drei Segel auf, weshalb sie *Trikuspidalklappe* genannt wird. Die linke Bikuspidalklappe verfügt über zwei Segel und wird *Mitralklappe* genannt. Die Segelklappen bewirken, dass sich die Vorhöfe zwischen den Herzschlägen mit Blut füllen können und verhindern die Blutrückströmung während der Ventrikelkontraktion. Während der Ventrikelrelaxation verhindert die *Aortenklappe* den Blutrückstrom aus der Aorta in den linken Ventrikel und die *Pulmonalklappe* den Rückstrom aus der Pulmonalarterie in den rechten Ventrikel.

Die Ventrikel durchlaufen während der Herzzyklen eine periodische Kontraktion und Relaxation. Dieser Pumpzyklus geht mit Änderungen des Ventrikel- und Arteriendruckes einher. In Abb. 13.7 sind die Druckverläufe in der linken und rechten Herzkammer dargestellt. Der Gesamtzyklus kann in vier Phasen unterteilt werden. Die isovolumetrische Ventrikelkontraktion nennt man Füllungs- (1) und Anspannungsphase (2), die isovolumetrische Ventrikelrelaxation Austreibungs- (3) und Entspannungsphase (4). Die Phasen (2) und (3) der Ventrikelkontraktion werden als *Systole* und die Phasen (4) und (1) der Ventrikelerschlaffung als *Diastole* bezeichnet. Die Ventrikelfüllung erfolgt während der Phase (4). Dabei ist der Druck im linken Vorhof nur wenig höher als im linken Ventrikel. Deshalb ist die Mitralklappe offen und das Blut fließt aus den Lungenvenen in den Vorhof und weiter in den linken Ventrikel. Sowie sich das Füllungsvolumen erhöht und der Ventrikel sich ausdehnt, steigt der Ventrikeldruck an. Der Druck in der Aorta ist erheblich größer, so dass die Aortenklappe geschlossen bleibt. Der Arteriendruck sinkt während der sich anschließenden Diastole entsprechend dem Blutabfluss in das arterielle Gefäßsystem kontinuierlich ab. Die Phase der passiven Füllung wird mit der Vorhofkontraktion beendet. Mit dem Beginn der Ventrikelkontraktion steigt der Ventrikeldruck über den des Vorhofes, wodurch sich die Mitralklappe schließt. Bei geschlossenen Klappen kontrahiert der Ventrikel um ein konstantes Blutvolumen. Während diese den Ventrikeldruck auf 166 mbar erhöht, setzt sich die Druckabnahme in den Arterien fort. Die Aortenklappe wird geöffnet, wenn der Ventrikeldruck über den in der Aorta steigt. Jetzt wird eine konstante Blutmenge in die Aorta ausgestoßen. Während das konstante Blutvolumen in die Aorta gepresst wird, steigt der Aortendruck von seinem Minimalwert von 107 mbar auf seinen Maximalwert von 160 mbar an. Nachdem die Ventrikelrelaxation eingesetzt hat, fällt der Ventrikeldruck unter den arteriellen, wodurch die Aorten- und Pulmonalklappen geschlossen werden. Es folgt die Phase der isovolumetrischen Relaxation. Diese erste Phase der Diastole dauert so lange, bis der Ventrikeldruck unter den Vorhofdruck gesunken ist. Nunmehr öffnet sich die Mitralklappe und der Herzzyklus beginnt mit der nächsten Füllphase von neuem.

Das Druck-Volumen Diagramm der Abb. 13.8 zeigt die Füllung des linken Ventrikels (1) entlang der Ruhedehnungskurve, die isovolumetrische Kontraktion (2) sowie das Entleeren (3) und die isovolumetrische Relaxation (4). Die umlaufene Fläche stellt die systolisch geleistete Arbeit des linken Herzventrikels dar. Diese

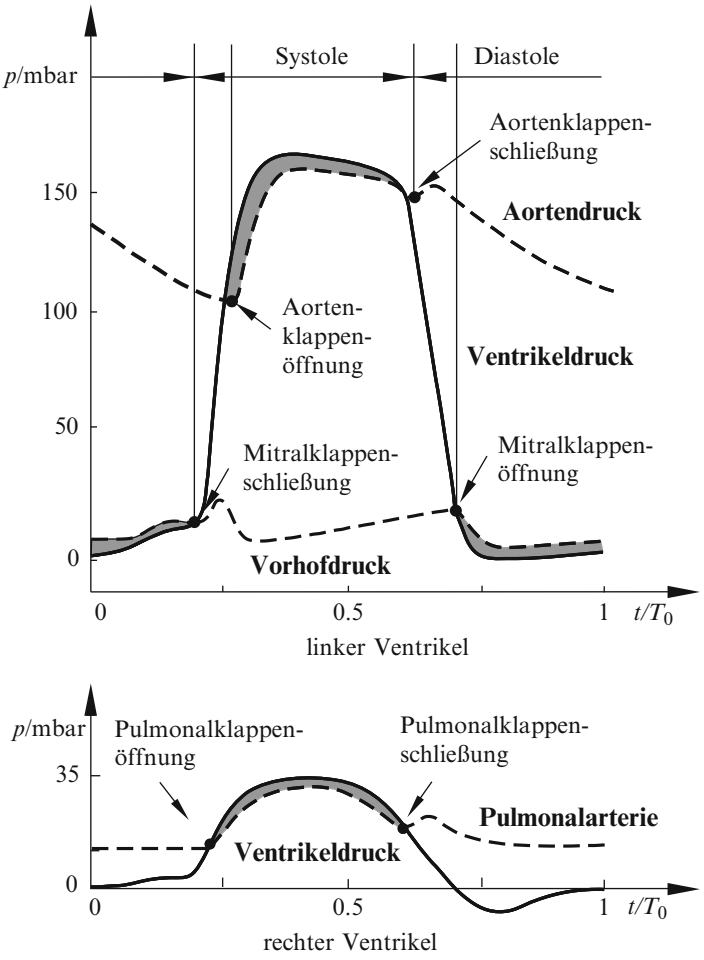


Abb. 13.7 Druckverlauf in der Aorta und der Pulmonalarterie im linken und rechten Ventrikel während des Herzzyklus, $T_0 = 0.8\,\mathrm{s}$

beträgt etwa 1 W. Bei Belastung verschiebt sich das Arbeitsdiagramm entlang der Ruhedehnungskurve zu größerem Ventrikelvolumen und höherem Druck. Die Vergrößerung der Herzfüllung führt zu einer Erhöhung der Herzarbeit. Bei erhöhtem Aortendruck öffnet die Aortenklappe später, so dass die Phase der isovolumetrischen Kontraktion höhere Druckwerte erreicht. Das *Schlagvolumen* des linken Ventrikels beträgt im Ruhezustand $V_\mathrm{s} = 80\,\mathrm{ml}$. Es verbleibt ein Restvolumen von $V = 40\,\mathrm{ml}$ im Ventrikel.

Der *Blutkreislauf* lässt sich in drei Hauptbestandteile unterteilen, dem Blutverteilungssystem, bestehend aus *Aorta*, große und kleine *Arterien* und *Arteriolen*. Diese verzweigen sich weiter zu den *Kapillare*, in denen der Gas- und Stoffaustausch über die Mikrozirkulation per Diffusion erfolgt. Die Blutrückströmung geschieht über die Venolen, kleine und große *Venen* und der *Vena Cava*.

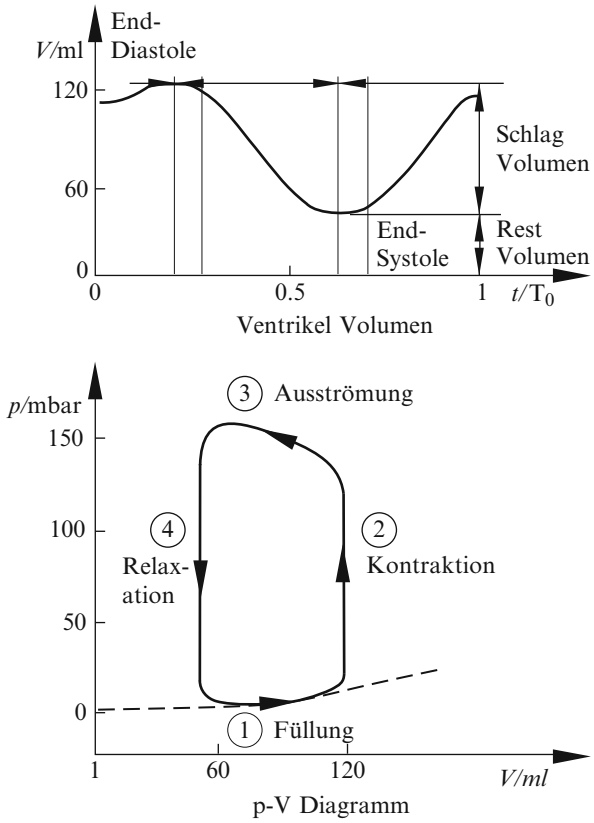


Abb. 13.8 Druck-Volumen-Diagramm und Volumenausstoß des linken Ventrikels während eines Herzzyklus

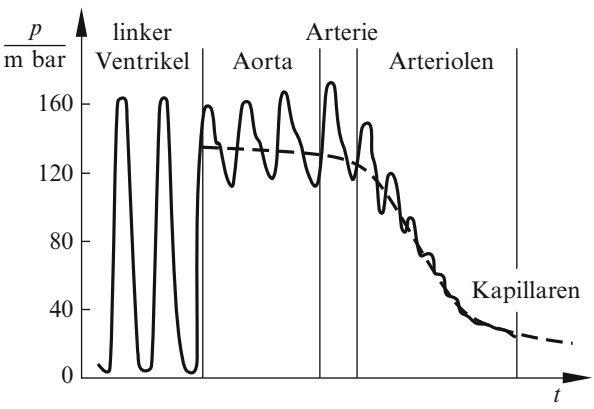


Abb. 13.9 Druckverlauf im Arterienkreislauf

Der mittlere Blutdruck beträgt etwa 133 mbar beim Verlassen des linken Ventrikels. Dieser fällt auf 13 mbar bis zur Rückkehr in den rechten Ventrikel ab. Die Abb. 13.9 zeigt den mittleren Druckverlauf sowie die Druckschwankungen in den unterschiedlichen Arterienbereichen. Aufgrund der elastischen Eigenschaften der Aorta pulsiert der Druck zwischen 120 und 160 mbar um den Mittelwert. In den

großen Arterien nimmt die Amplitude der Pulsation aufgrund der Wellenreflexionen zunächst zu, um im Bereich der Arteriolen über eine Strecke von wenigen Millimetern drastisch bis auf einen mittleren Wert von 40 mbar abzufallen. In den Kapillaren und Venolen setzt sich der Druckabfall flacher fort. Schließlich bleiben für den Blutrücktransport in den rechten Ventrikel ein Druck von 13 mbar übrig. In den großen Venen und der Vena Cava findet man keine Pulsation und kein nennenswertes Druckgefälle. Gleichzeitig treten Druckwellen auf, die durch die Pulsation des rechten Ventrikels entstehen und entgegen der Strömungsrichtung des Blutes laufen. Bemerkenswert gering ist der systolische Druck in den Pulmonalarterien von etwa 20 mbar. Für die Überwindung des Strömungswiderstandes in den Lungengefäßen wird lediglich ein Druckgefälle von 13 bis 7 mbar benötigt. Damit verbleiben 13 bis 7 mbar Fülldruck für den linken Ventrikel.

Die Aorta und großen Arterien wirken aufgrund ihrer Elastizität und einem intermittierenden Zustand laufender und reflektierter Wellen als *Volumenreservoir*, das einen Teil des Schlagvolumens des Herzens speichert. Dadurch wird der Beschleunigungsanteil des Blutpulses verringert und ein höheres Druckniveau während der Diastole und Systole beibehalten. Damit wird der Ausfluss in die Arterienverzweigungen gleichmäßiger.

Die Wellenform der Druck- und Geschwindigkeitspulse in den Arterienverzweigungen ist in Abb. 13.10 dargestellt. Zwischen jedem Druckpuls kontrahieren die

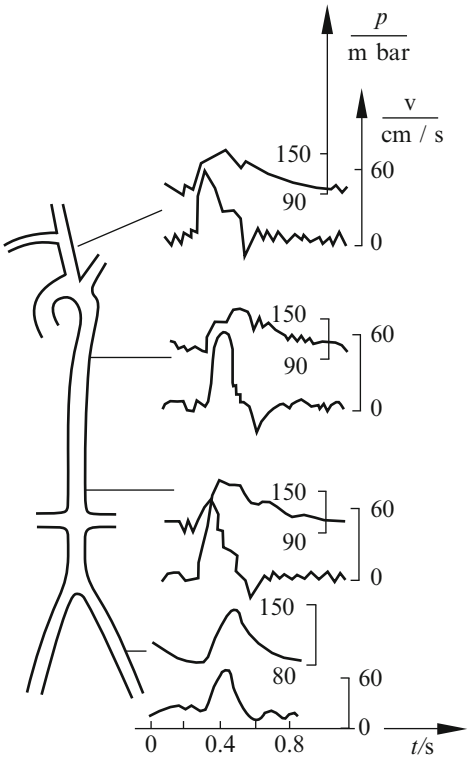


Abb. 13.10 Druck- und Geschwindigkeitswellen in den Arterienverzweigungen, Mills et al. 1970

Arterien um etwa 5 % und halten damit den Bluttransport aufrecht. Der Druckpuls in den Arterien ist positiv auch während der Diastole des Herzens. Im Gegensatz dazu tritt in den großen Arterien kurzfristig eine Rückströmung auf. Der Nulldurchgang der Strömungsgeschwindigkeit erfolgt beim Schließen der Aortenklappen. Die Amplitude des Strömungspulses nimmt mit zunehmender Arterienverzweigung ab und die Pulsbreite wächst, während sich eine geringere Rückströmung einstellt. Die Fortbewegung des Druckpulses durch die Arterienverzweigungen ist zunächst mit einer Zunahme der Druckamplitude verbunden, die zum einen durch die Arterienverzweigungen und zum anderen durch die Abnahme der Elastizität der Arterienwände verursacht werden. Das Strömungsprofil in den verzweigten Arterien wird gleichförmiger.

Die mit der mittleren Geschwindigkeit gebildeten Reynolds-Zahlen betragen für die Aorta 3600, für die großen Arterien 500, für die Arteriolen 0.7, in den Kapillaren 2×10^{-3}, in den Venolen 0.01, in den großen Venen 140 und in der Vena Cava 600. Aufgrund der zu Beginn des Kapitels beschriebenen instationären Einlaufströmungen und den Sekundärströmungen in den Adernkrümmungen stellt sich eine transitionelle laminare Strömung in den Adernverzweigungen ein. Die Transition zur turbulenten Strömung erfolgt kurzzeitig in den Wendepunkten des Geschwindigkeitsprofils in Wandnähe der Arterien, kann sich jedoch aufgrund der kurzen Zeit des Herzzyklus nicht ausbilden.

1.3 Rheologie des Blutes

Das Blut besteht aus dem *Blutplasma* und den darin suspendierten roten Blutkörperchen (*Erythrozyten*), weißen Blutkörperchen (*Leukozyten*) und den Blutplättchen (*Thrombozyten*), die einen Anteil von 40 bis 50 Volumenprozent ausmachen. Das Blutplasma ist das Trägerfluid, das zu 90 % aus Wasser, den Proteinen, Antikörpern und Fibrinogenen besteht. Das Blut hat die Aufgabe die Versorgung und Entsorgung der Körperzellen mit Nährstoffen, Atemgasen, Mineralien, Fermenten, Hormonen, Stoffwechselprodukten, Schlackestoffen, Wasser und Wärme sicherzustellen. Es dient als Transportsystem für die Blutkörperchen, die die Immunreaktionen des Körpers und die Sicherung des Kreislaufsystems gegen Verletzungen garantieren. Das mittlere Blutvolumen beträgt beim Mann etwa 5 Liter und bei der Frau 4 Liter. Davon verteilen sich 84 % im großen Körperkreislauf im Wesentlichen in den Venen, nur 9 % im Lungenkreislauf und 7 % im Herzen.

Für die Strömung im Herzen und im Blutkreislauf ist das Fließverhalten des Blutes von Bedeutung. Insbesondere gilt es festzulegen in welchen Strömungsbereichen und bei welchen Scherraten die Newtonschen Eigenschaften des Blutplasmas bzw. die Nicht-Newtonschen Eigenschaften der Suspension zu berücksichtigen sind. Diese bestimmen den Widerstand des Blutkreislaufs, der durch die Pumpenergie des Herzens kompensiert werden muss.

Von einer Viskosität des Blutes kann nur gesprochen werden, wenn die Suspension als homogene Flüssigkeit auftritt. Dies trifft für das Blut in den großen Gefäßen

zu. In den kleinen Gefäßen und insbesondere in den Kapillaren sind die elastischen Erythrozyten mit ihren 8 μm Durchmesser als Inhomogenität zu betrachten.

Während das Blutplasma aus 90 % Wasser besteht und in guter Näherung als Newtonsches Fluid behandelt werden kann, ist das Blut als Ganzes eine pseudo-elastische thixotrope Suspension. Dabei hängt die Viskosität der Suspension vom relativen Volumen aller suspendierten Teilchen ab. Den größten Anteil haben die Erythrozyten mit 99 % Volumenanteil aller Teilchen und 40–45 % Volumenanteil am Blut (Hematokritwert). Die Thrombozyten und Leukozyten machen weniger als 1 % Volumenanteil aus und haben keinen Einfluss auf die Rheologie des Blutes.

In Abb. 13.11 ist der Verlauf der Zähigkeit μ_{eff} des Blutes in Abhängigkeit der Scherrate $\dot{\gamma}$ dargestellt. Für die Strömung in Gefäßen ist die Scherrate $\dot{\gamma} = \partial u/\partial r$. In Gefäßverzweigungen bzw. in der Aorta und Ventrikeln müssen für $\dot{\gamma}$ die dominanten Komponenten des Scherratentensors gewählt werden. In einem breiten Bereich variierender Geschwindigkeitsgradienten ist ein Abfall der Viskosität um bis zu zwei Größenordnungen zu verzeichnen. Der Bereich der Geschwindigkeitsgradienten im gesunden Kreislauf variiert zwischen $8000\,\text{s}^{-1}$ (Arteriolen) und $100\,\text{s}^{-1}$ (Vena Cava). Er befindet sich also im asymptotischen Bereich nahezu konstanter Viskosität. Im Bereich sehr hoher Geschwindigkeitsgradienten und damit sehr großen Schubspannungen tritt eine Verformung der Erythrozyten auf, die ihrerseits die Viskosität der Blutsuspension beeinflussen. Bei Schubspannungen über 50 N/m^2 beginnen sich die Erythrozyten spindelförmig auseinander zu ziehen.

Bei Scherraten kleiner als 1, wie sie in Rückströmgebieten des erkrankten Kreislaufs auftreten, kommt es zur Aggregation der Erythrozyten. Dabei lagern sich die Zellen flach aneinander und bilden zusammenhängende Zellstapel, die untereinander verkettet sind. Im gesunden Kreislauf kommt es jedoch in den großen Adern zu keiner Aggregation, da die Aggregationszeit 10 s beträgt und die Pulslänge eine Größenordnung kürzer ist.

Die Abhängigkeit der Schubspannung des Blutes τ von der Scherrate $\dot{\gamma}$ lässt sich in guter Näherung mit der *Casson-Gleichung*

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\mu_{\text{eff}} \times \dot{\gamma}} = K \times \sqrt{\dot{\gamma}} + \sqrt{C} \tag{13.1}$$

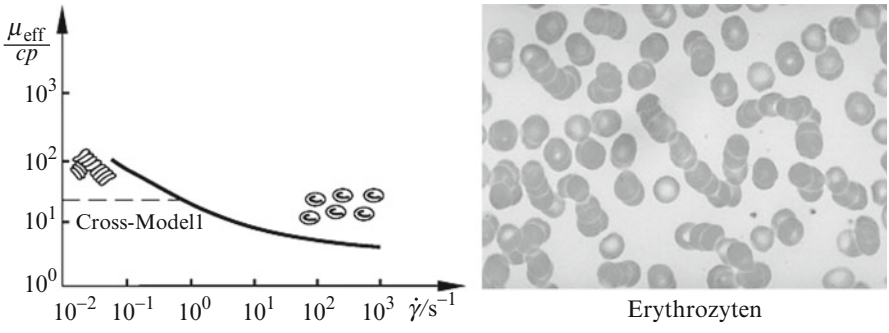


Abb. 13.11 Viskosität des Blutes μ in Abhängigkeit der Scherrate $\dot{\gamma}$

beschreiben. Dabei ist K die Casson-Viskosität und C die Verformungsspannung des Blutes. Die Anpassung an experimentelle Ergebnisse führt unter anderem zu der Gleichung:

$$\sqrt{\frac{\tau}{\mu_p}} = 1.53 \times \sqrt{\dot{\gamma}} + 2, \tag{13.2}$$

mit der Plasmaviskosität $\mu_p = 0.0012\ p$. Für Scherraten größer als 100 verhält sich Blut wie ein Newtonsches Medium.

Die Nicht-Newtonschen Eigenschaften des Blutes führen bei der Durchströmung der Gefäße zu einer Verringerung der Erythrozyten in der Nähe der Gefäßwände und damit zu einer Viskositätserniedrigung, die das Geschwindigkeitsprofil in Wandnähe und damit den Widerstand des Blutes verändern. Die Entmischung in Wandnähe verursacht eine nahezu zellfreie Plasmazone, die mit der Plasmaviskosität μ_p berechnet werden kann. Für die stationäre Poiseuille-Strömung führt dies zu einem Geschwindigkeitsprofil, wie es in Abb. 51 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten bereits beschrieben wurde. Für Scherraten $1 < \dot{\gamma} < 50$ kann näherungsweise mit der Steigung $n = -0.28$ in Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten, Gl. (9) und für $\dot{\gamma} > 100$ mit $n = 1$ (Newtonsches Medium) gerechnet werden.

Die Casson-Gleichung (13.1) führt zu einem modifizierten Ansatz für die Zähigkeit:

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{(\mathrm{K} \times \sqrt{\dot{\gamma}} + \sqrt{\mathrm{C}})^2}{\dot{\gamma}}. \tag{13.3}$$

Für die numerische Berechnung der pulsierenden Blutströmung wird auch das modifizierte *Cross-Modell* Gl. benutzt:

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{(1 + (t_0 \times \dot{\gamma})^{\mathrm{b}})^{\mathrm{a}}}. \tag{13.4}$$

Die Konstanten $\mu_\infty = 0.03\ p$, $\mu_0 = 0.1315\ p$, $t_0 = 0.5\,\mathrm{s}$, a $= 0.3$ und b $= 1.7$ wurden mit Experimenten von *D. Liepsch et al.* 1991 bestimmt. Dabei bedeutet μ_∞ eine Grenzviskosität für hohe Scherraten $\dot{\gamma}$ und μ_0 eine für kleine Werte von $\dot{\gamma}$.

Die Blutzähigkeit μ_{eff} ändert sich mit dem *Hämatokritwert* H des menschlichen Blutes. Der Hämatokritwert ist definiert als Verhältnis des Volumenanteils von roten Blutkörpern zum Gesamtvolumen des Blutes. Für $H = 0$ ergibt sich die konstante Zähigkeit des Newtonschen Blutplasmas (Abb. 13.12). Für den Hämatokritwert $H = 45\,\%$ erhält man den Verlauf der Zähigkeit der Abb. 13.11. Für größere Werte des Hämatokritwertes wächst die Zähigkeit des Blutes weiter an.

Die Natur optimiert den Sauerstofftransport im Kreislauf und hat dabei zwei gegenläufige Anforderungen in Einklang zu bringen. Zum einen ist ein großer Hämatokritwert erforderlich, um möglichst viel Sauerstoff zu transportieren und zum anderen ist ein kleiner Wert erforderlich, damit die Blutzähigkeit sinkt und

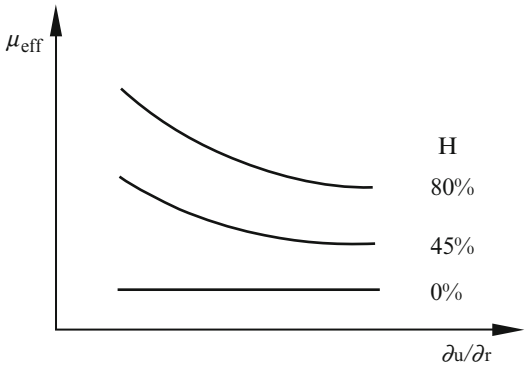


Abb. 13.12 Einfluss des Hämakritwertes H auf die Zähigkeit μ_{eff} des Blutes

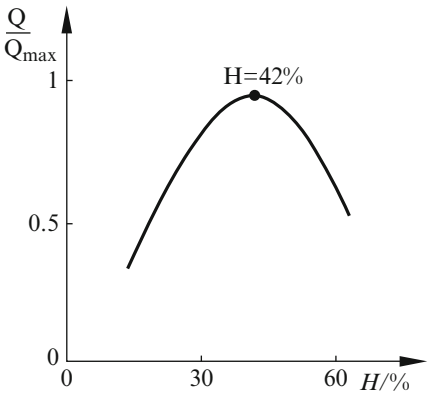


Abb. 13.13 Partikelstrom Q/Q_{max} in Abhängigkeit des Hämatokritwertes H des Blutes

der Volumenstrom in den Adern anwächst. Damit ist die Sauerstoffbindung durch eine möglichst große Anzahl von roten Blutkörperchen nicht das vorrangige Ziel. Bedeutender ist die Optimierung des Fließverhaltens des Blutes, wobei es darauf ankommt, eine ausreichend große Menge Sauerstoff zu transportieren, ohne dass andere Blutfunktionen zu stark beeinträchtigt werden. Entsprechend der Abb. 13.13 stellt sich im menschlichen Kreislauf der maximale Volumenstrom bei einem Hämatokritwert von $H = 42\,\%$ ein.

2 Schwimmen und Fliegen

Das Schwimmen und Fliegen der Tiere wurde in Abschn. 1.1 und Absch. 1 des Kap. 5 ▸ Aerodynamik eingeführt. In diesem Kapitel werden die strömungsphysikalischen Grundlagen für die Berechnung der bioströmungsmechanischen Vorwärtsbewegung bei kleinen Reynolds-Zahlen am Beispiel des Einzellers, das Schwimmen und die Strömungskontrolle der Fische bei großen Reynolds-Zahlen sowie die Aerodynamik des Vogelfluges behandelt.

2.1 Fortbewegung der Einzeller

Die Bewegung schwimmender Tiere der Größe 1 mm oder kleiner wird bei Reynolds-Zahlen $Re_l \leq 1$ von der Reibung bestimmt. Die Trägheitskräfte spielen eine untergeordnete Rolle. Damit ist die vom Tier verursachte Impuls- bzw. Drehimpulsänderung vernachlässigbar verglichen mit den Reibungskräften. Die relative Vorwärtsbewegung des Massenschwerpunktes des Tieres erfolgt mit der Translationsgeschwindigkeit U aufgrund der periodischen Körperkrümmung mit der Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit V.

In jedem Fluidelement befindet sich die Druckkraft $-\nabla p$ mit der Reibungskraft $\mu \cdot \Delta \boldsymbol{u}$ im Gleichgewicht. Es gilt die Kontinuitätsgleichung der inkompressiblen Strömung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (3))

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = 0. \tag{13.5}$$

Die Navier-Stokes-Gleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (20)) ergibt bei Vernachlässigung der Trägheitskräfte:

$$-\nabla p + \mu \times \Delta \boldsymbol{u} = 0. \tag{13.6}$$

Für die dimensionslose Navier-Stokes-Gleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (82)) ergibt sich unter den gegebenen Voraussetzungen:

$$-\nabla p + \frac{1}{Re_l} \times \Delta \boldsymbol{u} = 0, \tag{13.7}$$

dabei wird die Reynolds-Zahl mit der charakteristischen Länge der Tieres l gebildet.

Die Gl. (13.5), (13.6) und (13.7) lassen den Schluss zu, dass für den Druck die Laplace-Gleichung gilt:

$$\Delta p = 0. \tag{13.8}$$

Damit ist der Druck eine harmonische Funktion einer jeden trägheitsfreien Strömung. Aus den Gl. (13.5) und (13.6) kann man ableiten, dass es sich um eine biharmonische Funktion als Lösung der Gleichung

$$\nabla^4 \boldsymbol{u} = 0 \tag{13.9}$$

handelt.

Die Wellenbewegung des Teilkörpers kann durch Superposition von Punktkräften dargestellt werden:

$$\boldsymbol{f} \times \delta(\boldsymbol{r}), \tag{13.10}$$

dabei ist $\boldsymbol{f}$ die Kraft pro Volumeneinheit, δ die Delta-Funktion und $\boldsymbol{r}$ der Auslenkungsvektor vom Ort der Kraftwirkung. Das Kräftegleichgewicht am Fluidelement ergibt für die Kraftverteilung (13.10) die Navier-Stokes-Gleichung (13.6):

$$-\nabla p + \mu \times \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} \times \delta(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{13.11}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (13.3) erhält man:

$$\Delta p = \nabla \times (\boldsymbol{f} \times \delta(\boldsymbol{r})) = 0, \tag{13.12}$$

deren Lösung das klassische Dipolfeld

$$p = -\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{F}}{4 \times \pi \times \boldsymbol{r}} \right) \tag{13.13}$$

Kap. 2 ▸ Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit, Abb. 20 ist, mit der Dipolstärke die die äußere Kraft $\boldsymbol{F}$ auf die Strömung bei $r = 0$ ausübt.

Das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{u}$ ergibt sich als biharmonische Funktion der Gl. (13.9) (siehe Lighthill 1975).

Betrachtet man einen Einzeller mit Geißel der Länge l (Abb. 13.14) lässt sich die Form der Bewegungswelle entlang der Geißel mit

$$(x, y, z) = (X(s), Y(s), Z(s)) \tag{13.14}$$

darstellen. Dabei ist s die Längskoordinate entlang der Geißel, mit

$$X'^2(s) + Y'^2(s) + Z'^2(s) = 1. \tag{13.15}$$

Die Fortbewegungswelle hat die Wellenlänge

$$X(s + \Lambda) = X(s) + \lambda, \quad Y(s + \Lambda) = Y(s), \quad Z(s + \Lambda) = Z(s), \tag{13.16}$$

mit der Wellenlänge Λ entlang der gekrümmten Geißel, $\lambda = \alpha \times \Lambda$ der Wellenlänge in Richtung des Vortriebs und $\alpha < 1$ der Längskontraktion der Geißel aufgrund der Wellenbewegung.

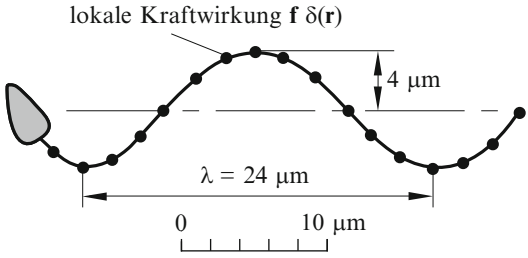


Abb. 13.14 Fortbewegung mit Geißeln

In einem Bezugssystem, das sich mit der Vortriebswelle mitbewegt, bewegt sich die Geißel tangential entlang der Wellenfront Gl. (13.14) mit der Geschwindigkeit c. Zum Zeitpunkt t ergibt sich:

$$(x, y, z) = (X(s - c \times t), Y(s - c \times t), Z(s - c \times t)). \tag{13.17}$$

c ist die Geschwindigkeit entlang des gekrümmten Körpers der Geißel. Der Zusammenhang mit V und der Wellengeschwindigkeit im mitbewegten Bezugsystem U ergibt:

$$V = \alpha \times c, \tag{13.18}$$

da die Wellenperiode mit Λ/c oder $\lambda/V = \alpha \times \Lambda/V$ beschrieben werden kann. Die Antriebswelle bewegt sich mit der Relativgeschwindigkeit $V - U$ stromab. Damit ergibt sich die Geschwindigkeit der Geißel relativ zum Fluid als Vektorsumme der Geschwindigkeit $\boldsymbol{c}$ entlang der Vorwärtstangente und der Geschwindigkeit $(V - U, 0, 0)$. Die Komponente entlang der Rückwärtstangente beträgt

$$(V - U) \times X'(s - c \times t) - c, \tag{13.19}$$

während die Komponente entlang der Rückwärtsnormalen

$$(V - U) \times \sqrt{1 - X'^2(s - c \times t)}, \tag{13.20}$$

beträgt. Dabei bezeichnen X' und $\sqrt{1 - X'^2}$ die Cosinus-Richtungen der Tangente und der Normalen.

Der Vortrieb P des Einzellers kann als x-Komponente der Summe der Tangentialkräfte Gl. (13.19) F_t und Normalkräfte F_n geschrieben werden:

$$\begin{aligned} P = \int_0^l \big(& F_\mathrm{t}((V - U) \times X'(s - c \times t) - c) \times X'(s - c \times t) \\ & + F_\mathrm{n}((V - U) \times (1 - X'^2(s - c \times t)))\big) \times \mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{13.21}$$

mit

$$\int_0^l X'(s - c \times t) \times \mathrm{d}s = \alpha \times l = V \times \frac{l}{c},$$

wobei $\alpha \times l$ die Länge der Wellenbewegung in Richtung des Vortriebs ist.

Mit der Definition

$$\int_0^l X'^2(s - c \times t) \times \mathrm{d}s = \beta \times l$$

erhält man

$$P = F_\mathrm{t} \times l \times ((V - U) \times \beta - V) + F_\mathrm{n} \times l \times (V - U) \times (1 - \beta). \quad (13.22)$$

Dieser Vortrieb P muss im Gleichgewicht mit dem Widerstand des mit U bewegten Kopfes des Einzellers stehen. Für die Widerstandkraft schreibt man:

$$F_\mathrm{n} \times l \times U \times \delta, \quad (13.23)$$

mit δ als dem Verhältnis aus dem Widerstand des Kopfes und dem Widerstand der Normalbewegung der Geißel.

Mit Gl. (13.22) und (13.23) erhält man:

$$\frac{U}{V} = \frac{(1 - \beta) \times (1 - \frac{F_\mathrm{t}}{F_\mathrm{n}})}{1 - \beta + \frac{F_\mathrm{t}}{F_\mathrm{n}} \times \beta + \delta}, \quad (13.24)$$

für das Verhältnis der Vorwärtsgeschwindigkeit U zur Wellengeschwindigkeit V. Da $\beta < 1$ (ohne Bewegung $\beta = 1$) ist, variiert U/V zwischen 0 und dem Maximalwert

$$\left(\frac{U}{V}\right)_\mathrm{max} = \frac{1 - \frac{F_\mathrm{t}}{F_\mathrm{n}}}{1 + \delta}. \quad (13.25)$$

Den Maximalwert erhält man für $\beta \to 0$. Für einen Kugelkopf mit dem Radius $R = 1\,\mu\mathrm{m}$, der Wellenlänge $\lambda = 45\,\mu\mathrm{m}$, der Amplitude $4\,\mu\mathrm{m}$ und dem Stokesschen Widerstandsgesetz $F = 6 \times \pi \times \mu \times R \times U$ ergibt sich der Wert $\delta = 0.11$ und $\beta = 0.65$.

2.2 Schwimmen der Fische

Das Schwimmen der Fische erfolgt im Reynolds-Zahlbereich $10^4 < Re_l < 10^8$. Gegenüber dem vorangegangenen Kapitel dominiert jetzt die Trägheitskraft gegenüber der Reibungskraft und es bildet sich bei den schnell schwimmenden Fischen stromab des Körpers eine turbulente Grenzschicht auf dem Körper aus. Der Vortrieb des Fisches erfolgt, wie im einführenden Kapitel erläutert, beim langsamen Schwimmen durch die *Wellenbewegung* des letzten Drittels des Körpers

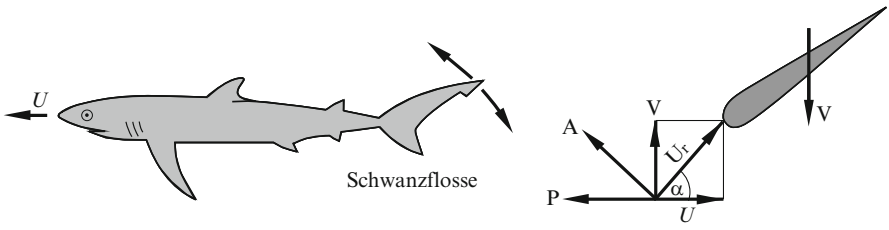


Abb. 13.15 Schwanzflossenschlag des Fisches

und beim schnellen Schwimmen vorrangig durch den *Schwanzflossenschlag* (siehe Abb. 13.15).

Bei einer vereinfachten Betrachtung der *Wellenbewegung* des Fisches im mit der Vortriebsgeschwindigkeit U mitbewegten Bezugssystem steht die Vortriebskraft P im Gleichgewicht mit der Widerstandskraft W des Fisches. Der Wirkungsgrad η wird mit den jeweiligen Mittelwerten gebildet:

$$\eta = \frac{U \times \bar{P}}{\bar{\dot{A}}}, \tag{13.26}$$

mit der mittleren Arbeitsleistung $\bar{\dot{A}}$ des Fisches.

Die Auslenkung der Querschnittsfläche in z-Richtung um die Gleichgewichtslage des Fisches wird mit $h(x,t)$ bezeichnet. Aufgrund der Wellenbewegung des Fischendes entsteht die Vertikalgeschwindigkeit w:

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + U \times \frac{\partial h}{\partial x}, \tag{13.27}$$

mit der Quergeschwindigkeit $\partial h/\partial t$.

Ist die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit V nur unwesentlich größer als die Vortriebsgeschwindigkeit U erhält man bei konstanter Amplitude der Fortbewegungswelle:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V \times \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Damit ergibt sich:

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} \times \frac{V - U}{V}. \tag{13.28}$$

Daraus resultiert, dass für eine guten Wirkungsgrad η der Vorwärtsbewegung $w/(\partial h/\partial t)$ klein sein muss. Der Wert muss jedoch groß genug sein, um den Widerstand des Fisches W überwinden zu können.

Auf der Basis dieser vereinfachten Betrachtung der Wellenbewegung des Fisches hat Lighthill 1960 die lineare Theorie des längsgestreckten Körpers entwickelt. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Querschnittsänderungen entlang des Fisches klein sind und die Wellenbewegung die Strömung nur geringfügig stört. Diese Voraussetzungen sind jedoch beim schnell schwimmenden Fisch nur bedingt erfüllt.

Die Einbeziehung des *Schwanzflossenschlages* und die turbulente Nachlaufströmung verlangt die Lösung der Kontinuitätsgleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (39)) und der Reynolds-Gleichungen (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (40)–(42)) für die inkompressible Strömung:

$$\nabla \bar{\boldsymbol{u}} = 0, \tag{13.29}$$

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + (\bar{\boldsymbol{u}} \times \nabla)\bar{\boldsymbol{u}} = -\frac{1}{\rho} \times \nabla \bar{p} + \nu \times \Delta \bar{\boldsymbol{u}} - \frac{\partial \overline{u_\mathrm{i}' \times u_\mathrm{j}'}}{\partial x_\mathrm{j}}. \tag{13.30}$$

Für die Modellierung der Reynolds-Spannungen (104) wird in Abschn. 4 Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik ein nichtlineares Zweigleichungs-Turbulenzmodell bzw. die Grobstruktursimulation mit einem Feinstrukturmodell ausgewählt.

Die Schwanzflosse der Abb. 13.15 mit einem symmetrischen Profil bewegt sich mit der Geschwindigkeit V, die eine Vortriebsgeschwindigkeit U erzeugt. Der Fisch kontrolliert die Vorwärtsbewegung in der Weise, dass die resultierende Anströmung relativ zur Schwanzflosse U_r gegenüber dem Körper mit einem positiven Anstellwinkel α versehen ist. Der resultierende Auftrieb A, dessen Komponente in Schwimmrichtung $A \times \sin(\alpha)$ den Vortrieb erzeugt, steht senkrecht auf der Relativgeschwindigkeit U_r. Der Vortrieb ist damit $P = U \times A \times \sin(\alpha)$. Um diesen Vortrieb zu erzeugen, bewegt sich die Schwanzflosse seitwärts gegen die Kraft $A \times \cos(\alpha)$, die eine Arbeitsleistung von $V \times A \times \cos(\alpha)$ erfordert. Diese beträgt bei den langsam schwimmenden Fischen lediglich 0.6 mW.

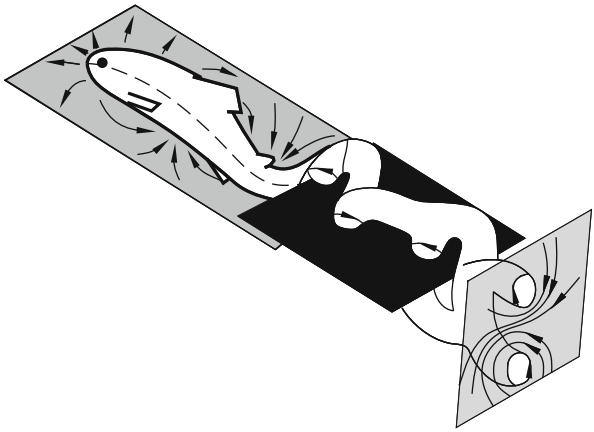


Abb. 13.16
Nachlaufströmung des Fisches, Nachtigall 2001

Die Wirbel im dreidimensionalen Nachlauf der Schwanzflosse (Abb. 13.16) werden in den beiden Umkehrpunkten der Schwanzflosse erzeugt. Es entstehen wechselseitig Wirbel positiver und negativer Drehrichtung. Zwischen den Umkehrpunkten entsteht ein Vortriebs-Jet, dem der Widerstand des Nachlaufes entgegenwirkt. Die Schwanzflosse des Fisches ist so optimiert, dass ein möglichst geringer induzierter und Reibungswiderstand entsteht, der jedoch so groß ist, dass überhaupt ein Vortrieb erzeugt werden kann.

2.3 Strömungskontrolle

Untersuchungen an Haien haben gezeigt, dass schnell schwimmende Fische Schuppen mit Längsrillen tragen. Diese verhindern die Entstehung der Querturbulenz in der viskosen Unterschicht der Strömungsgrenzschicht und führen zu einer Relaminarisierung der Grenzschicht und damit zu einer Verringerung des Reibungswiderstandes.

Die Abb. 13.17 zeigt die *Längsrillen* der *Haifischschuppen* sowie deren technische Umsetzung in Form von Riblet-Folien. Die Riblets bestehen aus Dreieckriefen im Abstand s von 60 µm, die die Wandschubspannung τ_w um bis zu 8 % verringern. In Abb. 13.18 ist das Ergebnis der numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (20)) in unmittelbarer Nähe der Oberfläche dargestellt. Die dunklen Bereiche zeigen hohe Geschwindigkeitsschwankungen und die helleren Bereiche geringe Schwankungen. Es erscheint das Momentanbild von Längsstrukturen, die an der Oberfläche eine vergrößerte Wandschubspannung τ_w verursachen. Die Längsrillen unterdrücken die v'-Komponente der Geschwindigkeitsschwankungen und damit die Bereiche hoher Scherraten in der viskosen Unterschicht. Dies führt zu einer Relaminarisierung der turbulenten Grenzschicht. Der Hai erreicht damit kurzzeitig Spitzengeschwindigkeiten bis zu 90 km/h.

Die Natur zeigt noch eine andere Möglichkeit der Relaminarisierung, indem durch eine geeignete Oberflächenbeschaffenheit das Einsetzen des laminar-

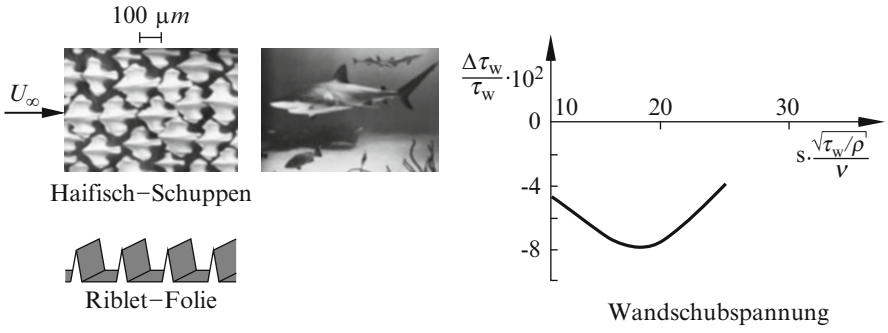


Abb. 13.17 Haifischschuppen und Riblet-Folie, Bechert et al. 2000

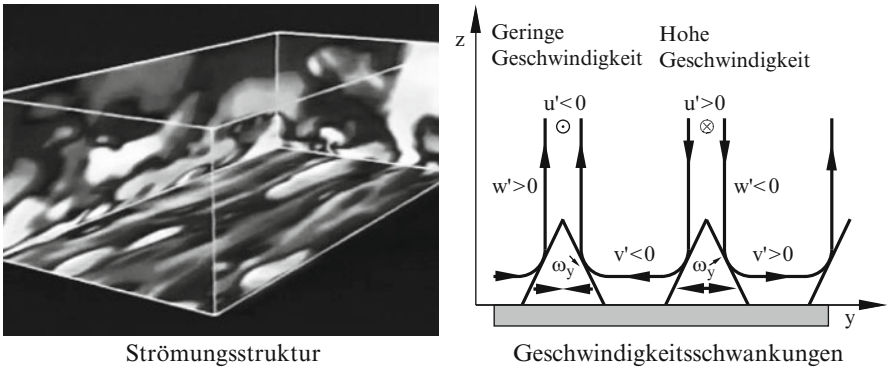


Abb. 13.18 Querturbulenz der viskosen Unterschicht

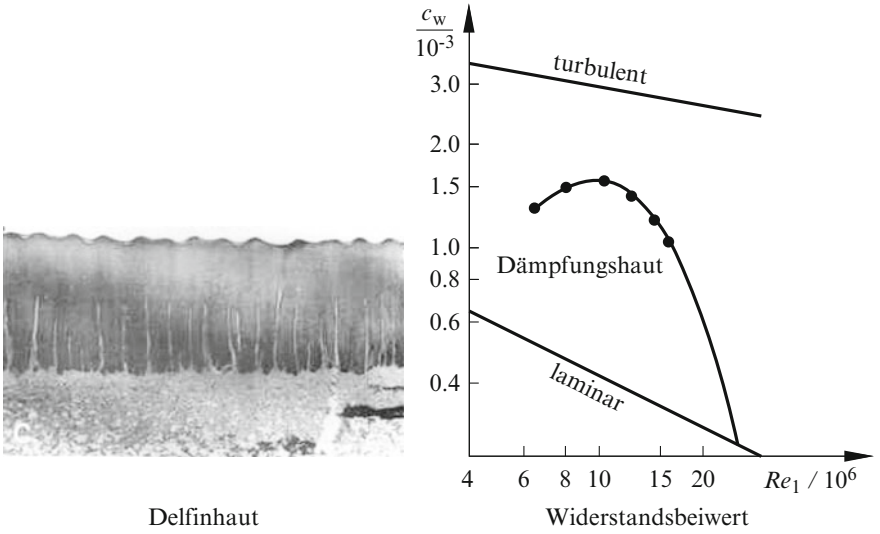


Abb. 13.19 Dämpfungshaut des Delfins, Nachtigall 2001

turbulenten Übergangs (siehe Abschn. 4 des Kap. 3 ▸ Dynamik zäher Flüssigkeiten) verzögert wird. Delfine schwimmen weitaus schneller, als sie aufgrund ihrer gegebenen Muskelmasse schwimmen sollten. Die *Schleimhaut* des *Delfins* besteht aus zapfenförmigen Einsenkungen der Oberhaut, die entsprechend der Abb. 13.19 mit der flexiblen fluidhaltigen Unterhaut verzahnt sind. Dadurch entsteht eine *Dämpfungshaut*, die jegliche Störung in der Grenzschicht dämpft. So werden Störungen, die den laminar-turbulenten Übergang einleiten, verzögert.

Bei der technischen Realisierung einer solchen Dämpfungshaut wird Flüssigkeit mit einer einstellbaren Steifigkeit zwischen einer glatten und genoppten Platte eingeschlossen. Der Effekt der Relaminarisierung durch eine schwingungsfähi-

ge Oberfläche wurde in Experimenten nachgewiesen. Die Abb. 13.19 zeigt die Verringerung des Widerstandsbeiwertes c_w der künstlichen Dämpfungshaut in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl. Bei geeigneter Einstellung der Amplitude und Phase der Dämpfung nähert man sich insbesondere bei großen Reynolds-Zahlen dem Widerstandsbeiwert der laminaren Strömung. Wird die künstliche Dämpfungshaut mit einer turbulenten Strömung angeströmt, bricht der Relaminarisierungseffekt zusammen.

Bei den Delfinen spielt vermutlich noch ein anderer Relaminarisierungseffekt der viskosen Unterschicht eine Rolle. Bei Zugabe von hochmolekularen Polymeren werden Widerstandsverringerungen über 50 % erreicht. Diese Polymerzusätze werden in geringsten Mengen von der Schleimhaut des Delfins abgesondert. Diesen Relaminarisierungseffekt nutzt man z. B. bei der Alaska-Pipeline durch Zugabe von einem Polymeranteil von nur einigen Millionstel im zähen kalten Öl aus, um die Pumpleistung um 30 % zu reduzieren.

Eine weitere Möglichkeit der Widerstandsverringerung ist das Einbringen von *Luftblasen* in die Grenzschichtströmung. Die Luftblasen reduzieren die mittlere Dichte in der Nähe der Oberfläche und erzeugen dadurch eine Widerstandsverringerung von über 50 %. Dies nutzt der *Pinguin* aus, der an der Wasseroberfläche schwimmt und Luftblasen im Federkleid mit sich trägt, die während des Schwimmens ausgasen. Damit erreicht er Spitzengeschwindigkeiten von bis zu 25 km/h bei einem Widerstandsbeiwert von $c_w = 0.03$ und der Reynolds-Zahl 3.5×10^6.

2.4 Vogelflug

Der Vogelflug wurde bereits in Abschn. 1 des Kap. 5 ▸ Aerodynamik und in der Einführung 1.1 beschrieben. In diesem Kapitel werden grundlegende Beziehungen des *Vorwärts-, Gleit-* und *Schwebefluges* des Vogels ergänzt.

Der für den Vorwärtsflug erforderliche Flügelschlag ist in Abb. 13.2 am Beispiel der Möwe dargestellt. Die Profilschnitte entlang des Flügels einer Taube sind in Abb. 13.20 gezeigt. Im mittleren Teil des Flügels sind die Profile stark gewölbt, um während des Flügelschlags und im Gleitflug einen möglichst großen Auftrieb zu erzeugen. Zur Flügelspitze hin nimmt die Profilierung und Wölbung der Flügelprofile kontinuierlich ab, was einen effizienten Vortrieb begünstigt. Der Gleitflug erfolgt bei Anstellwinkeln α zwischen 3° und 5°. Während des Flügelschlags und beim Manövrieren wird die gesamte Polare der Abb. 13.20 (siehe auch Kap. 5 ▸ Aerodynamik, Abb. 12) durchflogen. Dabei optimiert der Vogel kontinuierlich den erforderlichen Auftrieb mit dem für den Flug notwendigen Vortrieb, wobei das Überschreiten des Grenzanstellwinkels von ca. 25° vermieden wird. In Abb. 13.21 sind zwei charakteristische Druckverteilungen bei unterschiedlichen Anstellwinkeln gezeigt. Sie zeigen den typischen Verlauf der Unterschallprofile, die wir aus Abschn. 2 des Kap. 5 ▸ Aerodynamik kennen.

Für den Horizontalflug benötigt der Vogel die Arbeitsleistung P, um das Gewicht G bei der Fluggeschwindigkeit V zu kompensieren. Mit der Sinkgeschwindigkeit V_s und der Widerstandskraft W ergibt sich für die Vortriebsleistung:

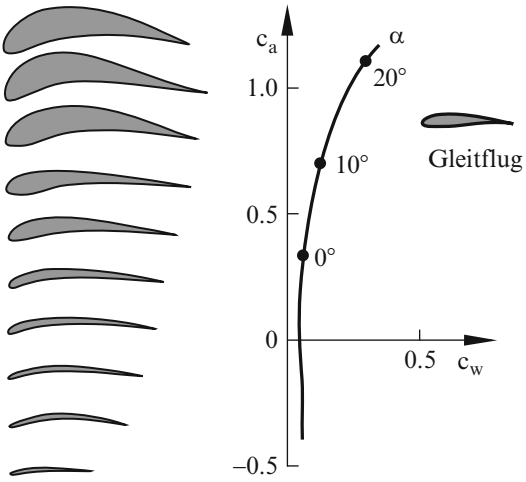


Abb. 13.20 Profilschnitte und Polare der Taube im Gleitflug

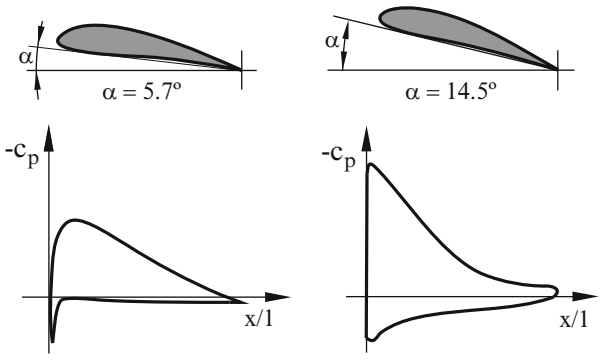


Abb. 13.21 Druckverteilung in Abhängigkeit des Anstellwinkels

$$P = G \times V_s = W \times V. \tag{13.31}$$

Der Widerstand W des Vogels und die Auftriebskraft A berechnen sich aus den Beiwerten c_w und c_a:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \times c_w \times \rho \times S \times V^2, \\ A &= \frac{1}{2} \times c_a \times \rho \times S \times V^2, \end{aligned} \tag{13.32}$$

mit der Flügelfläche S.

Daraus resultiert:

$$W = \frac{c_w}{c_a} \times A, \tag{13.33}$$

mit der in Abschn. 1 des Kap. 5 ▸ Aerodynamik eingeführten Gleitzahl c_w/c_a. Beim Horizontalflug wird das Gewicht G durch den Auftrieb A kompensiert. Damit ergibt sich:

$$W = \frac{c_w}{c_a} \times G \tag{13.34}$$

und die Vortriebsleistung

$$P = \frac{c_w}{c_a} \times G \times V, \tag{13.35}$$

Abschätzungen der aufzubringenden Arbeitsleistung führen beim Vogel zu der Schlussfolgerung, dass die verfügbare Muskelkraft nicht für die Aufrechterhaltung des Fluges ausreichen kann. Den selben Sachverhalt finden wir beim Schwimmen des Delfins. Dies führte in Abschn. 2.3 zu der Schlussfolgerung, dass durch eine geeignete Strömungskontrolle der Widerstand derart reduziert wird, dass auch bei geringer Muskelkraft das Schwimmen bei großen Geschwindigkeiten möglich ist. Den gleichen Sachverhalt findet man beim Vogelflug. Durch das Spreizen der Flügelendfedern wird während des Fluges der induzierte Widerstand der Randwirbel (siehe Kap. 5 ▸ Aerodynamik, Abb. 14) verringert. Das während des Flügelschlages bewegliche Federkleid ermöglicht dem Vogel eine optimale Strömungskontrolle, die die Strömungsablösung vermeidet und aufgrund der partiellen Durchlässigkeit der Federn, z. B. beim Aufwärtsschlag ebenfalls den Widerstand reduziert. Damit wird vom Vogel die Fluggeschwindigkeit V mit geringerer Muskelkraft erreicht, als man sie mit Gl. (13.35) vorhersagt.

Im *Horizontalflug* ist der Auftrieb des Flügels im Gleichgewicht mit dem Gewicht des Vogels. Damit lässt sich die Fluggeschwindigkeit V in Abhängigkeit des Gewichts G und der Flügelfläche S ausdrücken:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times c_a \times \rho \times S \times V^2 = G, \\ &V = \sqrt{\frac{2}{c_a \times \rho} \times \frac{G}{S}} = \mathrm{K} \times \sqrt{\frac{G}{S}}, \end{aligned} \tag{13.36}$$

mit der Konstanten $K = \sqrt{2/(c_a \times \rho)}$.

Die für den Flug erforderliche Arbeitsleistung $P = W \times V$ Gl. (13.35) ist demzufolge proportional dem Produkt aus Widerstand W und der Quadratwurzel der Flächenlast G/S.

Die Kräftebilanz im *Gleitflug* ist in Abb. 13.22 dargestellt. Die Gleitlinie ist um den Winkel α gegen die Horizontale geneigt und der Vogel gleitet mit ausgestreckten Flügeln. Das Gewicht des Vogels G wirkt vertikal nach unten und hat die Komponenten $P = G \times \sin(\alpha)$ und $N = G \times \cos(\alpha)$. Stationäres Gleiten ergibt sich, wenn der Widerstand W entgegengesetzt gleich der Auftriebskomponente $G \times \sin(\alpha)$ ist. Bei kleinem Gleitwinkel α kann der Auftrieb gleich dem Gewicht

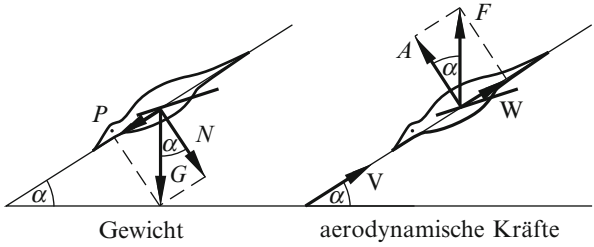


Abb. 13.22 Gleichgewicht der Kräfte beim Gleitflug

gesetzt werden:

$$W = G \times \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \times c_\mathrm{w} \times \rho \times S \times V^2,$$
$$A = G = \frac{1}{2} \times c_\mathrm{a} \times \rho \times S \times V^2. \tag{13.37}$$

Die Resultierende von Auftrieb und Widerstand F zeigt entgegengesetzt dem Gewicht. Daraus ergibt sich für den Gleitwinkel:

$$\tan(\alpha) = \frac{c_\mathrm{w}}{c_\mathrm{a}}. \tag{13.38}$$

Der Gleitwinkel ist damit unabhängig vom Gewicht des Vogels und von der Flügelfläche. Er hängt ausschließlich von der Profilierung des Flügels ab.

Mit Gl. (13.36) erhält man die Gleitgeschwindigkeit des Vogels:

$$V = \sqrt{\frac{2 \times G \times \cos(\alpha)}{c_\mathrm{a} \times \rho \times S}} = \mathrm{K} \times \sqrt{\frac{G}{S}}, \tag{13.39}$$

Deshalb gleiten Vögel mit großem Gewicht und kleinen Flügeln schneller als leichte Vögel mit großen Flügeln. Bei kleinen Gleitwinkeln ist der Auftrieb gleich dem Gewicht und der Auftriebskoeffizient verhält sich umgekehrt proportional zur Gleitgeschwindigkeit:

$$c_\mathrm{a} = \frac{2 \times G}{S \times \rho \times V^2}. \tag{13.40}$$

Deshalb verursacht jede Änderung des Gleitwinkels eine Änderung der Fluggeschwindigkeit. Berücksichtigt man das Ablöseverhalten des Vogelflügels der Abb. 13.20 so existiert ein maximaler Auftriebsbeiwert und eine entsprechende minimale Fluggeschwindigkeit V_min, bei denen ein Gleitflug möglich ist.

Die Abb. 13.23 zeigt die Sinkgeschwindigkeit V_s in Abhängigkeit der Fluggeschwindigkeit V für einen Bussard. Die minimale Sinkgeschwindigkeit beträgt 0.8 m/s bei einer Fluggeschwindigkeit von 15 m/s. Dabei erreicht der Bussard einen

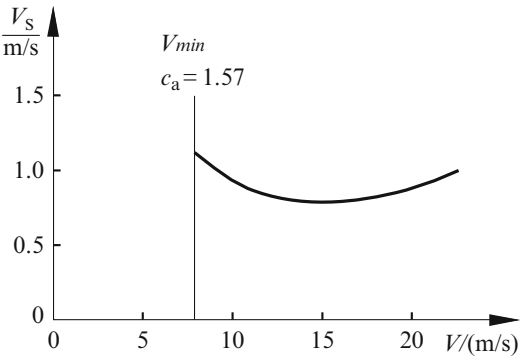


Abb. 13.23 Sinkgeschwindigkeit V_s des Bussards

Auftriebsbeiwert von $c_a = 1.8$ und einen Widerstandsbeiwert von $c_w = 0.06$ bei der Flug-Reynolds-Zahl $Re_l = 2 \times 10^5$.

Beim *Segelflug* in aufsteigender Luft einer Thermik wird die Sinkgeschwindigkeit des Vogels durch die Vertikalkomponente des Windes kompensiert. Das Kreisen in Thermikschläuchen erlaubt es z. B. dem Adler weite Strecken zurückzulegen. Möwen nutzen die Windseite eines Kliffs, um ohne Muskelkraft aufzusteigen. Weitere Beispiele sind das Leewellensegeln in Aufwindphasen hinter Gebirgskämmen oder das dynamische Segeln des Albatros, der die Aufwinde vor Meereswellen ausnutzt.

Beim Segeln und im Vorwärtsflug besitzt der Vogel einen beachtlichen Bereich an Manövrierfähigkeit, um die Flugrichtung beizubehalten und Luftturbulenzen auszugleichen. Dabei wird kontinuierlich die Anstellung und Bewegung des Flügels relativ zur Windgeschwindigkeit angepasst. Richtungsänderungen im Flug erfordern eine Drehbewegung des Rumpfes. Dabei wirkt die Zentripetalkraft Z, die sich mit dem Gewicht G und der Fluggeschwindigkeit V schreibt:

$$Z = \frac{G \times V^2}{r}, \tag{13.41}$$

mit dem Kurvenradius r.

Bezeichnet Φ den Winkel der Schräglage des Flügels, gilt:

$$\tan(\Phi) = \frac{Z}{G} = \frac{V^2}{r}. \tag{13.42}$$

In allen Fluglagen gilt jedoch, dass die Vertikalkomponente des Auftriebs gleich dem Gewicht des Vogels sein muss. Demzufolge muss der Gesamtauftrieb des Flügels im Kurvenflug größer sein als im Horizontalflug. Für den Neigungswinkel Φ ist der Gesamtauftrieb $A = G/\cos(\Phi)$. Beträgt de Winkel $\Phi = 60°$ muss sich also der Gesamtauftrieb des Flügels verdoppeln, um einen Geradeausflug sicherstellen zu können. Deshalb erhöht sich die Flächenlast des Flügels während des Kurvenfluges

deutlich, um den erforderlichen Auftrieb bei erhöhtem Anstellwinkel des Flügels zu erreichen.

Im *Formationsflug* über weite Strecken zeigen die Vögel eine charakteristische V-Formation. Dabei nutzt der nachfolgende Vogel die Auftriebszone des Randwirbels (Kap. 5 ▸ Aerodynamik, Abb. 13.14) des vorausfliegenden Vogels, um kräftesparend weite Strecken fliegen zu können. Dabei beträgt die Versetzung der Vögel jeweils 1/4 der Flügelspannweite. Sie erreichen damit bei gleicher Kraftaufwendung eine theoretische Erweiterung der Reichweite von 70 % gegenüber dem Einzelflug.

Die meisten Vögel beherrschen neben dem Vorwärts- und Gleitflug den *Schwebeflug*. Die Abb. 13.24 zeigt den Vorwärts- und Rückwärtsschlag des Vogelflügels während eines Schlagzyklus, der bei einem entsprechenden Anstellwinkel des Flügels den für das Schweben erforderlichen Auftrieb sicherstellt. Der gesamte Flügel rotiert entlang der Längsachse. Die Hauptfedern des Flügels sind beim Aufwärtsschlag nach hinten und nach unten geneigt, während sie beim Abwärtsschlag nach vorne zeigen. Die Wirkung der Hauptfedern entspricht dabei einer horizontal oszillierenden Schwanzflosse z. B. des Wals, die in Abschn. 2.2 behandelt wurde.

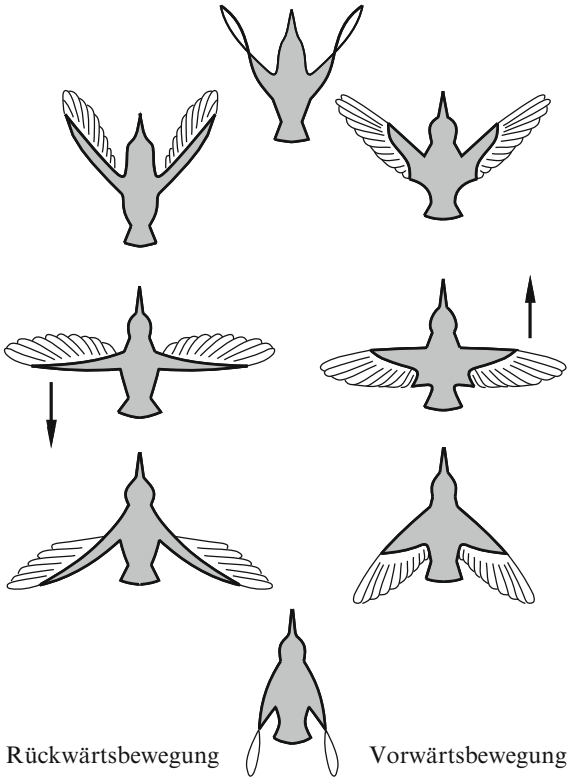


Abb. 13.24 Schwebeflug des Vogels

3 Strömung im menschlichen Herzen

Nachdem in Abschn. 1.2 ein Überblick über die Herzfunktionen im Körperkreislauf gegeben wurde, wird in diesem Kapitel die Physiologie und Anatomie des menschlichen Herzens mit der Wechselwirkung der elektrischen Erregung, der elektromechanischen Kopplung und der pulsierenden, dreidimensionalen Strömung im Einzelnen beschrieben.

3.1 Physiologie und Anatomie des Herzens

Die Abb. 13.25 zeigt die *Innenansicht des Herzens*, wie sie in den Lehrbüchern der medizinischen Physiologie dargestellt wird. Der linke und rechte Vorhof des Herzens sind durch das Vorhofseptum voneinander getrennt. Das Ventrikelseptum trennt die beiden Ventrikel des Herzens. Die muskuläre Herzwand bezeichnet man als Myokard. Sie wird innen vom Endokard und außen vom Epikard begrenzt. Das Herz ist in einem Sack von Bindegewebe, dem Perikard, eingeschlossen. Drei Gruppen von *Muskelfasern* winden sich entsprechend der Abb. 13.26 um beide Ventrikel während sich eine weitere Gruppe von Muskelfasern ausschließlich um den linken Ventrikel schlingt. Die kardialen Muskelzellen orientieren sich eher tangential als radial um das Herz. Da der elektrische Widerstand entlang der

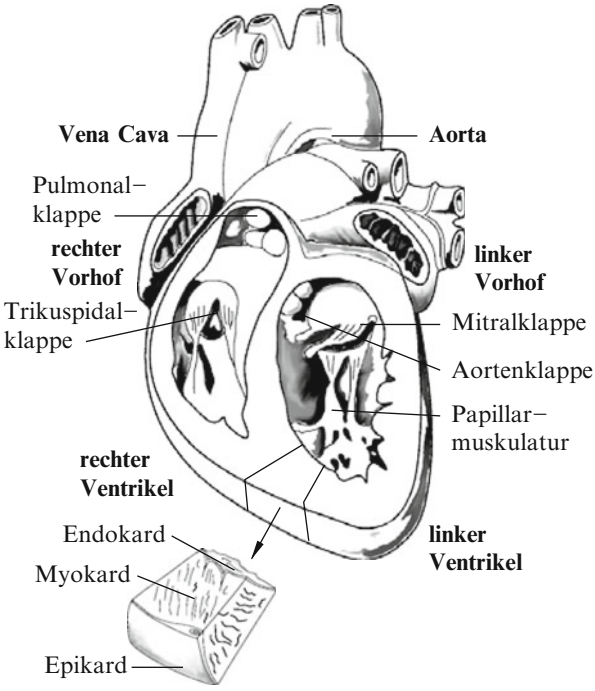


Abb. 13.25 Innenansicht des Herzens

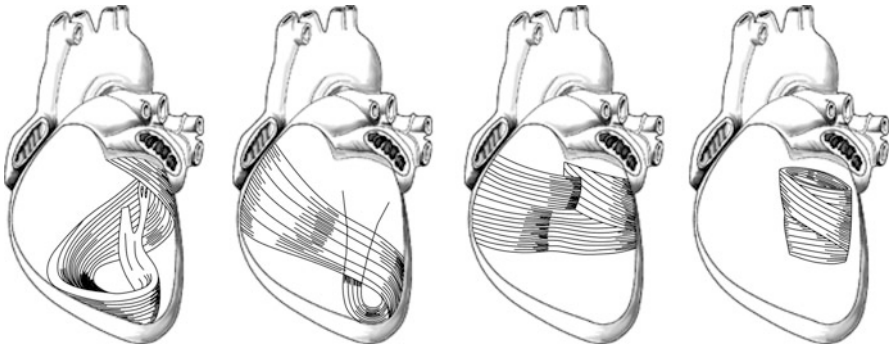


Abb. 13.26 Orientierung der kardialen Muskelfasern

Muskelfasern geringer ist, hat dies Auswirkungen auf die elektrische Erregung der Herzmuskulatur.

Die Füllung des linken und rechten Ventrikel aus den Vorhöfen wird durch die Mitralklappe mit zwei Segeln und die Trikuspidalklappe mit drei Segeln gesteuert. Die Segel der Klappen sind sehr dünn, so dass sie sich zu Beginn der Ventrikelkontraktion schnell schließen. Sie werden von Sehnenfäden gehalten, die mit Papillarmuskeln ein Umstülpen der Klappen bei hohem Druck verhindern. Während der Ventrikelrelaxation verhindert die Pulmonalklappe die Blutrückströmung aus den Lungenarterien und die Aortenklappe die Rückströmung aus der Aorta. Beide Klappen bestehen aus drei Bindegewebstaschen. Diese sind aufgrund des höheren Drucks, dem die Taschenklappen während der längsten Zeit des Herzschlags ausgesetzt sind, stabiler als die Segelklappen.

Die Vena Cava und der Sinus Coronarius führen sauerstoffarmes Blut aus dem Venenkreislauf in den rechten Vorhof. An deren Mündung befinden sich zwei weitere Klappen, die Crista- und die Sinusklappe. Diese verhindern bei der Vorhofkontraktion die Rückströmung in den Niederdruck-Venenkreislauf. In den linken Vorhof münden vier Pulmonalvenen, in denen sauerstoffreiches Blut von den Lungen in den linken Ventrikel geführt wird. Im Gegensatz zum rechten Vorhof besitzt der linke Vorhof keine Rückströmklappen.

Das Gesamtvolumen des Herzens beträgt beim Mann annähernd 750 ml und das Ventrikelvolumen der Frau 550ml. Unter der Erfüllung eines Ausdauer-Trainings und der damit verbundenen erhöhten Sauerstoffaufnahme während der Belastung des Herzens, kann das Herzvolumen auf 1400 ml bis 1700 ml ansteigen.

Dies äußert sich im Druck-Volumen-Diagramm der Abb. 13.27 mit steigender Arbeitsleistung der Ventrikel werden die p-V-Kurven zu höheren Drücken und Auswurfvolumen verschoben. Sie werden begrenzt durch den enddiastolischen ED und endsystolischen ES Druck-Volumen Verlauf. Die Fläche der jeweiligen p-V-Verläufe geben die Arbeitsleistung des Ventrikels an. Das *Frank-Sterling Gesetz* sagt aus, dass die Ventrikelarbeit mit zunehmenden Füllvolumen des Ventrikel ansteigt. Dies hat mit den mechanischen Eigenschaften des Herzmuskels zu tun

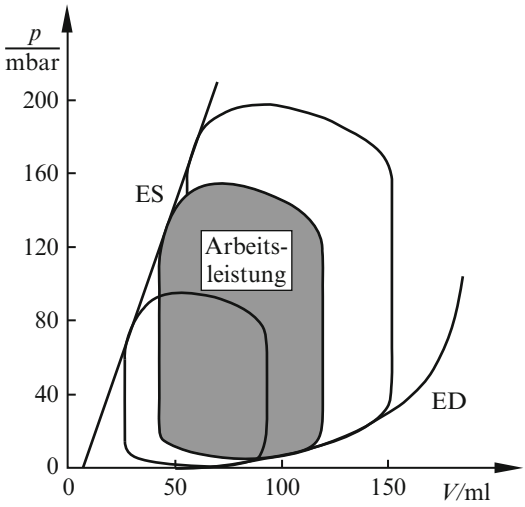


Abb. 13.27
Druck-Volumen- Diagramm des linken Ventrikels

und ermöglicht eine kontinuierliche Anpassung des Herzens an verschiedene Körperlagen, Anstrengungen und Atmungsfrequenzen.

Die mechanische Kontraktion der Herzmuskeln wird durch die *periodische elektrische Erregung* gesteuert. Sie beginnt mit der Erregung des Sinusknotens (Abb. 13.28), der eine zyklische elektrische Depolarisation und Polarisation durchläuft. Er übernimmt damit die primäre Schrittmacherfunktion. Während der Depolarisationsphase erstreckt sich die Entladung über die Leitungsbahnen mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s in die umgebenden Muskeln der Vorhöfe, die daraufhin kontrahieren. Das elektrische Signal des Sinus-Knotens wird im Ventrikularknoten verzögert. Diese Verzögerung erlaubt eine optimale Füllung der Ventrikel während der Kontraktion der Vorhöfe. Über die His-Nervenfasern und die Kammerschenkel gelangt die Erregung mit einer Geschwindigkeit von 1–4 m/s nach etwa 110 ms in die Ventrikelmuskulatur. In Richtung der Ventrikel teilen sich die His-Bündel in den linken und rechten Kammerschenkel.

Beide verästeln sich in Purkinje-Fasern, die dicht unter dem Epikard in den jeweiligen Herzkammern verlaufen. Sie ziehen zuerst am Septum in Richtung der Herzspitze und von dort entlang der Ventrikelwände zur Herzbasis. Mit Beginn der Ventrikelkontraktion ist dank der Leitungsverzögerung im Ventrikelknoten die Vorhofkontraktion beendet. Dabei können außer den erregungsbildenden Zellen im Sinus- und Ventrikularknoten alle Nervenzellen im Erregungsleitungssystem spontan depolarisiert werden. Die ventrikuläre Depolarisation im Elektrokardiogramm der Abb. 13.28 dauert weniger als 0.1 s.

Nervenzellen und hormonelle Einflüsse außerhalb des Herzens beeinflussen die elektrische Erregung und verursachen unterschiedliche Herzschlagfrequenzen. Sie modifizieren die elektrische Leitfähigkeit und damit die Geschwindigkeit der Depolarisationswelle durch das Herz. Der Zyklus der Depolarisation und Polarisation erzeugt ein kleines elektrisches Potential, das an der Oberfläche des Körpers aufgenommen werden kann. Ein typischer Verlauf des *Elektrokardiogramms* (EKG)

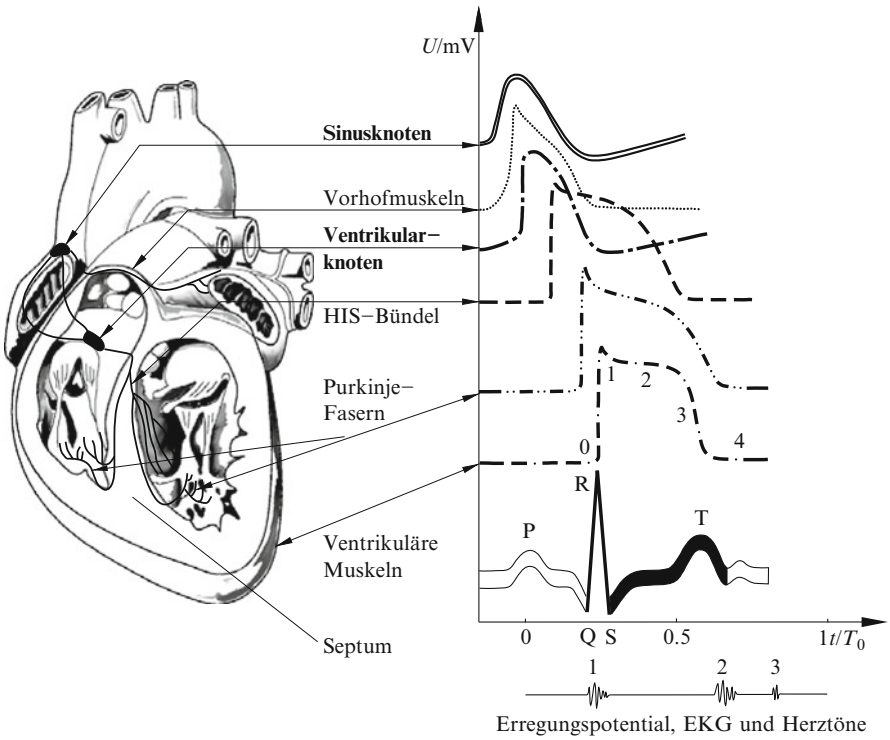


Abb. 13.28 Elektrische Erregungsleitungen, Erregungspotentiale und Echokardiogramm (EKG) im Herzen, $T_0 = 0.8\,\mathrm{s}$

ist in Abb. 13.28 dargestellt. Die Depolarisation der Vorhöfe erzeugt eine kleine Auslenkung, die P-Welle genannt wird. Dem folgt nach einer Verzögerung von etwa 0.2 s eine starke Auslenkung aufgrund der Depolarisation der beiden Ventrikel (QRS). Danach folgt die T-Welle, die bei der erneuten Polarisation der Ventrikel entsteht.

Beim Schließen der Mitralklappe erhöht sich der Druck im linken Ventrikel. Dies ist mit einer Schallwelle verbunden, die als erster *Herzton* wahrgenommen wird. Damit wird die Systole, der Verlauf der Ventrikelkontraktion, eingeleitet. Beim zweiten Herzton beginnt die Diastole, die Phase der Ventrikelrelaxation. Der schwache dritte Herzton wird vom Füllvorgang des Ventrikels verursacht.

3.2 Struktur des Herzens

Für die Berechnung der Strömung im Herzen benötigt man eine Modellierung der Geometrie der Ventrikel und der Herzklappen während eines Herzzyklus. Dafür stehen die Methoden der Strukturmechanik zur Verfügung.

Ein vereinfachtes Modell der Ventrikelbewegung sowie reale Ventrikelquerschnitte des menschlichen Herzens sind in Abb. 13.29 gezeigt. Während der Kontraktionsphase ist die Mitral- und Trikuspidalklappe geschlossen. Die Aorten- und Pulmonalklappe ist geöffnet. Die Muskelfasern beider Ventrikel kontrahieren. Der linke Ventrikel pumpt das mit Sauerstoff angereicherte Blut in die Aorta und der rechte Ventrikel pumpt sauerstoffarmes Blut in die Lunge. Der Druck im linken Ventrikel ist entsprechend der Abb. 13.7 viel größer als im rechten Ventrikel. Demzufolge behält der linke Ventrikel während der Kontraktionsphase nahezu einen elliptischen Querschnitt, während sich der rechte Ventrikel um den linken anordnet.

Die Bewegung der Ventrikelwände ist hauptsächlich radial. Sie ist aufgrund des höheren Druckes im linken Ventrikel größer als im rechten. Die radiale Bewegung wird durch eine Verkürzung des Herzens in longitudinaler Richtung begleitet. Aufgrund der spiralförmigen Anordnung von einem Teil der Muskelfasern (Abb. 13.26) wird der longitudinalen Bewegung eine *Drehbewegung* überlagert. Demzufolge ist die Schubspannungsverteilung in den Ventrikeln inhomogen und anisotrop (Abb. 13.30).

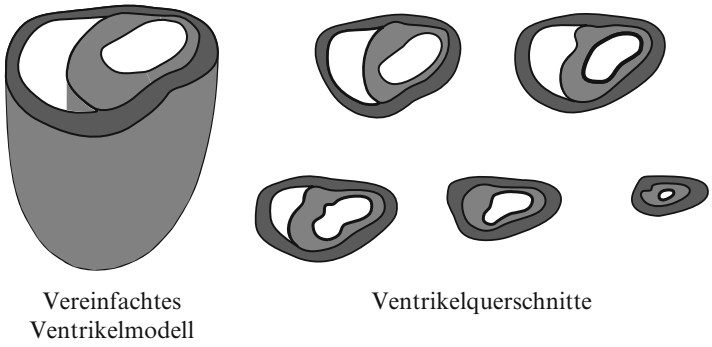


Abb. 13.29 Formen der ventrikulären Kontraktion

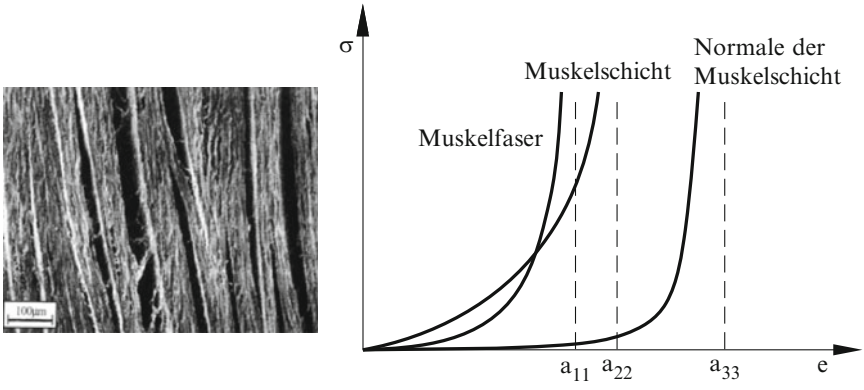


Abb. 13.30 Muskelschicht im Ventrikel und axiales Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Grundlage der mathematischen Beschreibung der Ventrikelbewegung ist die *Bewegungsgleichung* der Strukturmechanik, die mit Finite-Elemente Methoden numerisch gelöst wird. Für den Deformationsgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ erhält man:

$$\rho\left(\frac{\partial v_\mathrm{i}}{\partial t} + v_j \times \frac{\partial v_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}}\right) = \frac{\partial \sigma_\mathrm{ij}}{\partial x_\mathrm{j}} + f_\mathrm{i}, \tag{13.43}$$

mit dem Spannungstensor σ_ij und den volumenspezifischen Kräften f_i und der Dichte ρ des Myokards. Der Spannungstensor σ_ij lässt sich für einen elastischen Körper unter der Voraussetzung kleiner Deformationen als lineare Funktion des Dehnungstensors e_kl darstellen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_\mathrm{ij} = c_\mathrm{ijkl} e_\mathrm{kl}. \tag{13.44}$$

Dabei ist c_ijkl der Tensor der elastischen Konstanten, den es für das Herz zu bestimmen gilt.

Für biologische Körper, einschließlich der des Herzens und der Blutgefäße, kann man den Spannungstensor (13.44) näherungsweise quasi-linear ansetzen. Damit kann die elastische Auslenkung eines jeden Punktes im Körper relativ zu einem Grundzustand bestimmt werden. Für die Einzelheiten der Tensornotationen wird auf das Buch von Fung 1990 verwiesen.

Für den elastischen biologischen Körper, der einer endlichen Deformation $u_i = x_i - a_i$ (a_i Koordinaten vor und x_i nach der Deformation) ausgesetzt ist, existiert eine Dehnungs-Energiefunktion $\rho_0 \times W(E_{11}, E_{12}, \cdots)$. Deren Ableitung führt zum Kirchhoffschen Spannungstensor S_{ij}:

$$S_\mathrm{ij} = \frac{\partial\left(\rho_0 \times W\right)}{\partial E_\mathrm{ij}}, \tag{13.45}$$

mit der Greenschen Dehnung:

$$E_\mathrm{ij} = \frac{1}{2} \times \left(\delta_{\alpha\beta} \times \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_\mathrm{i}} \times \frac{\partial x_\beta}{\partial a_\mathrm{j}} - \delta_\mathrm{ij}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\partial v_\mathrm{j}}{\partial a_\mathrm{i}} + \frac{\partial v_\mathrm{i}}{\partial a_\mathrm{j}} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial a_\mathrm{i}} \times \frac{\partial v_\beta}{\partial a_\mathrm{j}}\right). \tag{13.46}$$

Der Kirchhoffsche Spannungstensor S_ij kann mit der folgenden Beziehung in den Cauchyschen Spannungstensor σ_ij überführt werden:

$$\sigma_\mathrm{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \times \left(S_\mathrm{ij} \times \left(\delta_{\mathrm{i}\beta} \times \frac{\partial v_\mathrm{j}}{\partial a_\alpha} + \delta_{\mathrm{j}\alpha} \times \frac{\partial v_\mathrm{i}}{\partial a_\beta} \times \frac{\partial v_\mathrm{j}}{\partial a_\alpha}\right) \times S_{\alpha\beta}\right). \tag{13.47}$$

Dabei sind ρ und ρ_0 die Materialdichten im deformierten und im Grundzustand.

Für das Myokard des Herzens kann nach Fung 1993 im entspannten Zustand während der Füllphase die vereinfachte Dehnungs-Energiefunktion

$$\rho_0 \times W = \frac{c}{2} \times \left(e^Q - Q - 1\right) + \frac{q}{2} \tag{13.48}$$

benutzt werden. Dabei ist c eine Konstante und q, Q quadratische Formen des Greenschen Tensors:

$$\begin{aligned} Q &= k_{11} \times E_{11}^2 + k_{22} \times E_{22}^2 + k_{33} \times E_{33}^2 + 2 \times k'_{12} \times E_{11} \times E_{22} + 2 \times k'_{23} \times E_{22} \\ &\quad \times E_{33} + 2 \times k'_{31} \times E_{33} \times E_{11} + k_{12} \times E_{12}^2 + k_{23} \times E_{23}^2 + k_{31} \times E_{31}^2, \\ q &= b_{11} \times E_{11}^2 + b_{22} \times E_{22}^2 + b_{33} \times E_{33}^2 + 2 \times b'_{12} \times E_{11} \times E_{22} + 2 \times b'_{23} \times E_{22} \\ &\quad \times E_{33} + 2 \times b'_{31} \times E_{33} \times E_{11} + b_{12} \times E_{12}^2 + b_{23} \times E_{23}^2 + b_{31} \times E_{31}^2, \end{aligned}$$

mit den Materialkonstanten k_{ij}, b_{ij}. Die Einheiten von c und b_{ij} sind die einer Spannung. Die Gewichtsfaktoren k_{ij} sind dimensionslos. Für $c = 0$ beschreibt die Dehnungs-Energiefunktion $\rho_0 \times W = q/2$ das lineare Hooksche Gesetz elastischer Körper.

Die strukturmechanische Modellierung des Herz-Myokards basiert auf Spannungsmessungen an dünnen Muskelfaserschichten von Tierherzen. Dabei zeigt das Myokard ein nichtlineares und anisotropes Spannungs-Dehnungsverhalten. In Abb. 13.30 sind die axialen Spannungs-Dehnungskurven einer dünnen Muskelschicht entlang der Muskelfasern in der Muskelschicht und normal zur Muskelschicht dargestellt. Der größte Unterschied der Materialeigenschaften des Myokards besteht in der maximalen Dehnung a_{ii} entlang der ausgewählten Achsen. Wird die Myokardprobe entlang der Muskelfasern gedehnt, beträgt der Grenzwert der Dehnung 1.3. In Richtung senkrecht zu den Muskelfasern der Muskelschicht erhält man den Grenzwert 1.5. Dabei sind die Spannungswerte senkrecht zur Muskelschicht wesentlich kleiner als entlang der horizontalen Achse. Diesen nichtlinearen anisotropen Materialeigenschaften des Myokards muss bei der Strukturmodellierung des Herzens Rechnung getragen werden.

Für das Herz sind zahlreiche Vereinfachungen veröffentlicht worden. Hunter et al. 1997 und Hunter und Smaill 2000 benutzten für ihre Simulationsrechnungen den vereinfachten Ansatz der Dehnungs-Energiefunktion:

$$\begin{aligned} W &= k_{11} \times \frac{E_{11}^2}{|a_{11} - E_{11}|^{b_{11}}} + k_{22} \times \frac{E_{22}^2}{|a_{22} - E_{22}|^{b_{22}}} + k_{33} \times \frac{E_{33}^2}{|a_{33} - E_{33}|^{b_{33}}} \\ &\quad k_{12} \times \frac{E_{12}^2}{|a_{12} - E_{12}|^{b_{12}}} + k_{13} \times \frac{E_{13}^2}{|a_{13} - E_{13}|^{b_{13}}} + k_{23} \times \frac{E_{23}^2}{|a_{23} - E_{23}|^{b_{23}}}. \end{aligned} \tag{13.49}$$

Dabei wird die Dehnungs-Energiefunktion in die einzelnen Anteile der Spannungen entlang der jeweiligen Materialachsen aufgeteilt. a_{ij} bezeichnen die Pole der Grenzdehnungen, b_{ij} die Krümmungen der Spannungs-Dehnungskurve für jede Deformationsachse und k_{ij} sind die Gewichtsfaktoren der jeweiligen Deformationsmoden. Gl. (13.49) besteht aus den sechs Anteilen der Deformationsmoden der Greenschen Dehnung E_{ij} . Die ersten drei Terme sind die axialen Moden der

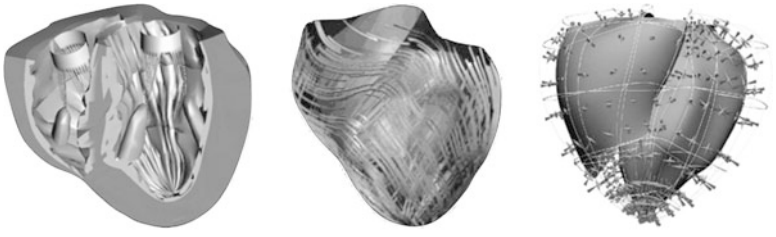


Abb. 13.31 Finite-Elemente Modellierung der Struktur des Herzens, Hunter und Smaill 2000

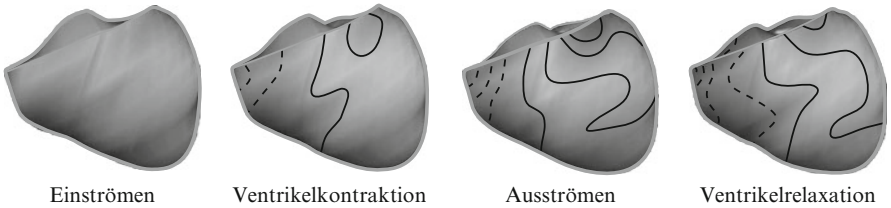


Abb. 13.32 Spannungsverteilung auf der Oberfläche des Herzens, Hunter und Smaill 2000

Deformation und die verbleibenden drei Terme die Scherdeformationen zwischen den Materialachsen.

Die Dehnungs-Energiefunktion Gl. (13.49) ist die erste Ordnung einer Entwicklung um die Pole der Grenzdehnungen. Dabei werden die Kreuzprodukte zwischen den unterschiedlichen Moden den axialen und den Scherdeformationen vernachlässigt. Die Weiterentwicklung des Myokard-Strukturmodells unter Einbeziehung der Kreuzprodukte bleibt weiterführenden Messungen der Mikrostruktur des Myokards vorbehalten.

Die Abb. 13.31 zeigt das Finite-Elemente Modell der Herzventrikel im Längsschnitt, die Orientierung der Muskelfasern im Modell sowie die Schubspannungsverteilung am Ende der Diastole. Das Finite-Elemente Modell wurde von Hunter et al. 1993, 1997 und Hunter und Smaill 2000 auf Basis der finiten Elastizitätstheorie und der Energiefunktion Gl. (13.49) entwickelt. Spannungsmessungen an aktiven Muskelfasern von Tierherzen haben gezeigt, dass sich die Muskelfaserkräfte eher orthogonal als transversal isotrop verhalten.

Mit dem weiterentwickelten Modell der Dehnungs-Energiefunktion Gl. (13.49) wurde die Spannungsverteilung auf der Oberfläche des Herzens mit der Finite-Elemente Diskretisierung der Abb. 13.31 numerisch berechnet. Mit Isolinien sind in Abb. 13.32 für einzelne Phasen des Herzzyklus die Bereiche großer und geringer Muskelfaserspannung gezeigt. Dabei zeigen durchgezogene Linien große Dehnungsspannungen, gestrichelte Linien große Kompressionsspannungen. Anfangs ist der Herzmuskel relaxiert und es herrschen nur geringe Spannungen. Der Verlauf der von den Vorhöfen während der Füllphase ausgehenden Kompressionsspannung ist deutlich zu erkennen. Über die Ventrikel setzt sich die Anspannung während der Auswurfphase fort.

3.3 Erregungsphysiologie des Herzens

Ergänzend zur Beschreibung der Elektrophysiologie des Herzens in Abschn. 3.1 sind in Abb. 13.28 die elektrischen Erregungspotentiale in den einzelnen Bereichen des Herzens dargestellt. Dabei wurde das Aktionspotential U innerhalb und außerhalb der Muskelzellen mit Mikroelektroden gemessen.

Zu Beginn der elektrischen Erregung (0) werden die Herzmuskelzellen depolarisiert und die Potentialdifferenz über die Zellmembranen steigt von $-90\,\mathrm{mV}$ auf $+20\,\mathrm{mV}$ (1). Die Depolarisation der Herzmuskelzellen beruht auf der Öffnung von Ionenkanälen in der Zellmembran (siehe z.B Malmivuo und Plonsey 1995). Die Aktivierung der Depolarisation erfolgt innerhalb von 1 ms. Die mechanische Kontraktion der Herzmuskelzellen erfolgt zeitverzögert. Es folgt ein schneller Abfall des Aktivierungspotentials und die Repolarisation wird eingeleitet. Diese wird in Phase (2) verzögert um über den Abfall (3) dem ursprünglichen Wert zu zustreben. In dieser Phase wird das Aktionspotential in den Muskel initiiert und das Maximum der Muskelkontraktion wird in Phase (3) erreicht. Die Repolarisation erfolgt innerhalb von 0.3 s, während der Depolarisationspuls lediglich 1 ms wirkt.

In Abb. 13.33 ist der Erregungsablauf im Längsschnitt des Herzens in Bezug zum Echokardiogramm EKG gezeigt. Die Erregung des Herzens beginnt im Sinusknoten

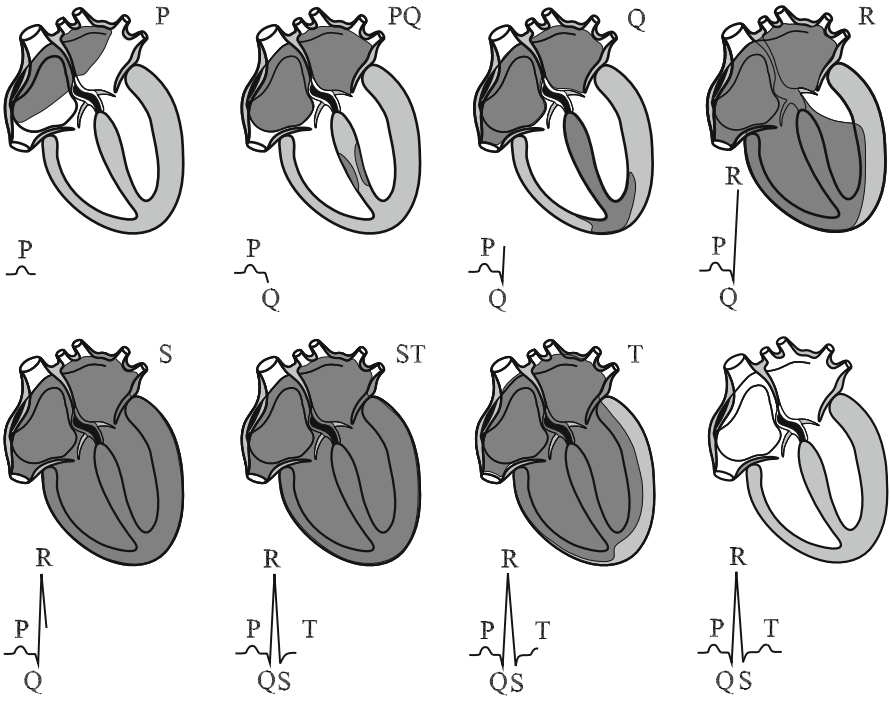


Abb. 13.33 Erregung des Herzens und Echokardiogramm EKG

und breitet sich anschließend über die Vorhöfe aus. Damit verbunden ist die P-Welle im EKG. Es folgt das PQ-Zeitintervall mit der verzögerten Erregung des HIS-Leitungssystems. Die Ventrikelerregung beginnt an der linken Seite des Kammerseptums mit dem negativen Q-Ausschlag im EKG. Kurze Zeit später sind die Wände des rechten und linken Ventrikels von innen nach außen einschließlich der Herzspitze erregt. Daraus resultiert die R-Zacke im EKG mit positiver Polarität. Die ventrikuläre Erregungsausbreitung endet an der Basis des linken Ventrikels mit der negativen S-Zacke. Nach Abschluss der Ventrikelerregung ist die gesamte Herzoberfläche negativ geladen. Diese Phase im Erregungsablauf ist mit der ST-Strecke im EKG verbunden. Die Repolarisationsphase des Herzens beginnt in den subendokardialen Schichten des Myokards und schreitet in Richtung Endokard fort. Damit liegt eine Feldstärkekomponente vor, die aus den noch erregten negativen endokardialen Schichten in die schon positiven nicht erregten Bereiche zeigt. Die positive T-Welle ist mit der Repolarisationsphase verbunden.

Elektrochemische Untersuchungen der Herzmuskelzellen zeigen, dass die unterschiedlichen Bereiche des Aktionspotentials mit Natrium Na^+ und Kalium Ka^+ Ionenkanälen in der Zelle verknüpft sind. Calcium Ca^{2+} Ionen in den Zellmembranen verursachen die Anregung der Kontraktion in den Muskelzellen. Insofern beeinflusst die Form der Aktionspotentiale das Kontraktionsverhalten der Herzmuskelzellen in den unterschiedlichen Bereichen des Herzens. Die Depolarisationswelle schreitet vom Endokard zum Epikard fort. Die Welle der Repolarisation bewegt sich in entgegengesetzter Richtung.

Die *mathematische Modellierung* der Depolarisationswelle und deren Ausbreitung in den Herzmuskelzellen verlangt die Modellierung der nichtlinearen Kopplung der Erregungsmodelle der Depolarisation mit einem Modell der Erregungsausbreitung. Die Ausbreitung mit Geschwindigkeiten zwischen 0.03 (Sinusknoten) und 0.6 m/s (Vorhof und Ventrikel) kann zum einen über ein System einzelner gekoppelter Zellen oder als Kontinuum berechnet werden.

Die mathematische Beschreibung der Erregungsausbreitung im Herzen erfolgt mit einem System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u_\mathrm{i}}{\partial t} = f_\mathrm{i}(u_1, \cdots, u_\mathrm{n}) + D_\mathrm{i} \times \Delta u_\mathrm{i}, \qquad \mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{n}. \tag{13.50}$$

Dabei sind u_i die n Variablen, $f_\mathrm{i}(u_1, \cdots, u_\mathrm{n})$ die nichtlinearen Erregungsfunktionen und $D_\mathrm{i} \times \Delta u_\mathrm{i}$ der Diffusionsterm.

Ein einfaches Modell mit zwei Variablen sind die *Fitz-Hugh-Nagumo*-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{u_1 - \frac{u_1^3}{3} - u_2}{\varepsilon} + D_1 \times \Delta u_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \varepsilon \times (u_1 + \beta - \gamma \times u_2), \end{aligned} \tag{13.51}$$

mit den Parametern $0 < \beta < \sqrt{3}$, $0 < \gamma < 1$ und $\varepsilon \ll 1$.

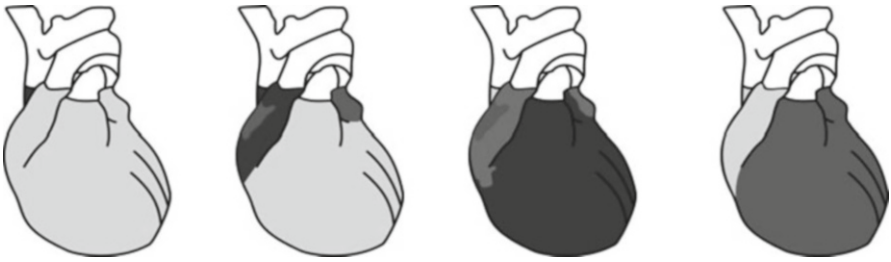


Abb. 13.34 Elektrische Potentialverteilung auf der Oberfläche des Herzens, Werner et al. 2000

Für die Bestimmung der Erregungsfunktionen f_i müssen entsprechende Modellgleichungen der Ionenströme in den einzelnen Muskelzellen gefunden werden. Eine Auswahl dieser Modellgleichungen findet sich z. B. in Panfilov und Holden 1997.

Die Abb. 13.34 zeigt das Ergebnis einer Simulationsrechnung der Ausbreitung des Erregungspotentials auf der Oberfläche des Herzens. Entsprechend der Abb. 13.28 breitet sich die Erregung von der inneren Herzwand nach außen aus. Auf der Herzoberfläche äußert sich dies durch ein großes Erregungspotential (dunkel). Dieses verläuft vom Sinusknoten (1) über die beiden Vorhöfe (2) und regt die Ventrikel an, während sich die Vorhöfe wieder repolarisieren (3). Zum Abschluss des Herzzyklus werden die Ventrikel repolarisiert.

3.4 Strömung im Herzen

Die Berechnung der inkompressiblen Strömung im Herzen erfolgt mit der *Kontinuitätsgleichung* (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (2)):

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 0 \tag{13.52}$$

und der *Navier-Stokes-Gleichung* für die laminare und transitionelle Strömung (Kap. 6 ▸ Grundgleichungen der Strömungsmechanik, Gl. (20)):

$$\rho \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \times \nabla)\boldsymbol{v} \right) = -\nabla p + \mu_\mathrm{eff} \times \boldsymbol{\Delta v} + \boldsymbol{f}\,. \tag{13.53}$$

$\boldsymbol{f}$ ist die Volumenkraft die der Strömung von den Innenwänden des Herzens aufgeprägt wird, $\boldsymbol{v}$ der Geschwindigkeitsvektor und p der Druck.

Die Nicht-Newtonschen Eigenschaften des Blutes werden näherungsweise mit dem *Cross-Modell* Gl. (13.4) berücksichtigt.

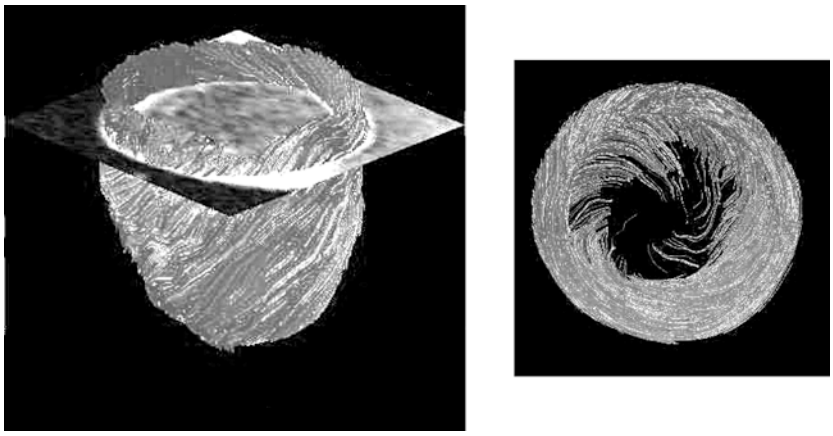


Abb. 13.35 Orientierung der kardialen Muskelfaser, Jung et al. 2006

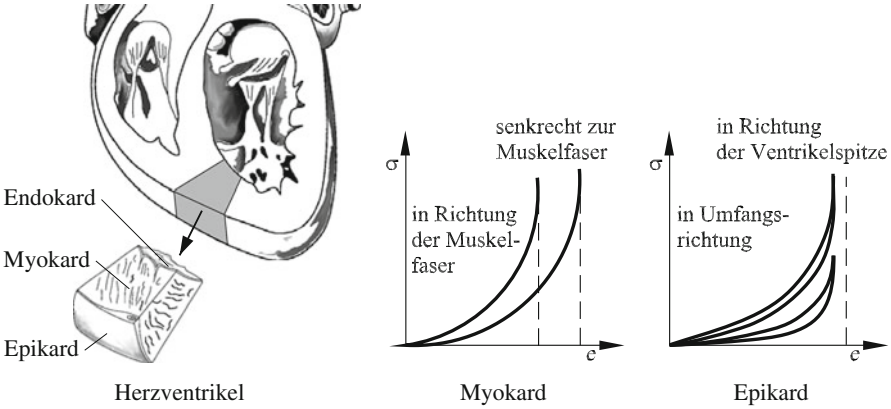


Abb. 13.36 Spannungs-Dehnungsverlauf des menschlichen Myokards und Epikards

Die Volumenkraft $\boldsymbol{f}$ berechnet sich aus der Schubspannungsverteilung im Inneren des Herzens, die das Strukturprogramm des Abschn. 3.2 vorgibt.

Für die Berechnung der Wechselwirkung der Strömung mit der Struktur der Ventrikel und Vorhöfe ist ein Materialgesetz des Myokards des Herzens erforderlich (siehe Abschn. 3.2). Die Anordnung der Muskelfasern und die Beschleunigungslinien sind in Abb. 13.35 dargestellt. Die Muskelfasern orientieren sich spiralförmig um den Ventrikel und verursachen eine radiale und longitudinale Kontraktion des Ventrikels.

Der qualitative Verlauf der Spannungs-Dehnungskurven des menschlichen Myokards und Epikards sind in Abb. 13.36 gezeigt. Die innere Schicht des Myokards führt zu einem anderen Spannungs- Dehnungsverhalten als die äußere Epikard-

schicht. Im Myokard ergeben sich unterschiedliche Grenzwerte der Dehnung, je nach dem ob die Belastung entlang oder senkrecht zu den Muskelfasern erfolgt. Dabei zeigt die Epikardschicht ein deutlich nichtlineares anisotropes Spannungs-Dehnungsverhalten als die Myokardschicht. Die äußere Muskelschicht des Herzventrikels zeigt zusätzlich eine Hysterese der Belastungskurve.

Die Gl. (13.54) ist die Bewegungsgleichung der Strukturmechanik für die Deformationsgeschwindigkeit v_i und den Spannungstensor σ_ij:

$$\rho \times \frac{\mathrm{d}v_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t} = \rho \times \left(\frac{\partial v_\mathrm{i}}{\partial t} + v_\mathrm{j} \times \frac{\partial v_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} \right) = \frac{\partial \sigma_\mathrm{ij}}{\partial x_\mathrm{j}} + f_\mathrm{i}, \tag{13.54}$$

mit den volumenspezifischen Kräften f_i und der Dichte des Materials ρ. Die totale zeitliche Ableitung der Deformationsgeschwindigkeit beschreibt die Änderung in einem mitbewegten Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1 \times \mathrm{d}x_2 \times \mathrm{d}x_3$. Diese Darstellung nennt man *Lagrange-Beschreibung*. Die partielle zeitliche Ableitung der Deformationsgeschwindigkeit nach der Zeit und die konvektiven Terme, abgeleitet nach den Raumkoordinaten, bezeichnet man als *Euler-Darstellung* (siehe Abschn. 3 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik). Für die Strömung-Struktur gekoppelte Berechnung erfolgt die Formulierung der Randbedingungen an der Grenze des Fluidraums der Ventrikel in *Lagrange-Darstellung* und die Strömungsberechnung in *Euler-Darstellung* (Abb. 13.37). Daraus resultiert die *Langrange-Euler-Formulierung* der Grundgleichungen für die Struktur und die Strömung.

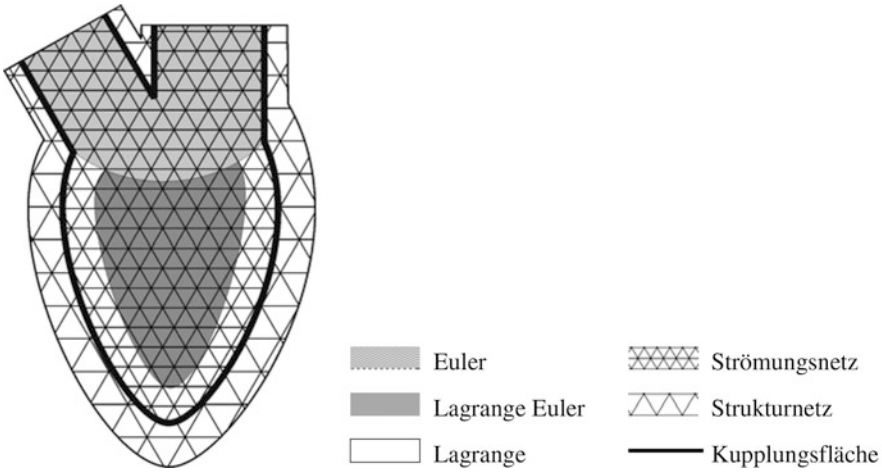


Abb. 13.37 Bereichseinteilung der ALE Lagrange-Euler-Formulierung der Strömung-Struktur-Kopplung des menschlichen Ventrikels

Der Deformationsgeschwindigkeit v_i

$$v_\mathrm{i} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

entspricht der Strömungsvektor $\boldsymbol{v}$. Dem Spannungstensor der Struktur σ_ij

$$\sigma_\mathrm{ij} \quad \Longleftrightarrow \quad \tau_\mathrm{ij}$$

entspricht der Schubspannungstensor der Strömung τ_ij. Damit schreibt sich die Bewegungsgleichung der Strömungsmechanik Gl. (13.54):

$$\rho \times \frac{\mathrm{d}v_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t} = \rho \times \left(\frac{\partial v_\mathrm{i}}{\partial t} + v_\mathrm{j} \times \frac{\partial v_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} \right) = \frac{\partial \sigma_\mathrm{ij}}{\partial x_\mathrm{j}} + f_\mathrm{i} \tag{13.55}$$

und die Navier-Stokes-Gleichung der Strömungsmechanik Gl. (13.53):

$$\rho \times \frac{\mathrm{d}v_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t} = \rho \times \left(\frac{\partial v_\mathrm{i}}{\partial t} + v_\mathrm{j} \times \frac{\partial v_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} \right) = \frac{\partial \tau_\mathrm{ij}}{\partial x_\mathrm{j}} + f_\mathrm{i}. \tag{13.56}$$

Die Masseerhaltung für die Strukturmechanik und die der Strömungsmechanik sind für inkompressible Medien identisch:

$$\frac{\partial v_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{i}} = 0. \tag{13.57}$$

Führt man die Gl. (13.55) und (13.56) zu einer Gleichung zusammen, erhält man die *Lagrange-Euler-Formulierung* der Impulserhaltung sowohl für die Strukturmechanik als auch für die Strömungsmechanik in vektoranalytischer Schreibweise:

$$\rho \times \left(\left. \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \right|_G + ((\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_G) \times \nabla)\boldsymbol{v} \right) = \nabla \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}\,. \tag{13.58}$$

$\boldsymbol{v}_G$ ist dabei die Referenzgeschwindigkeit der bewegten Oberfläche und G bezeichnet die dazugehörige Referenzfläche mit der man sich bei der Lagrange-Formulierung mitbewegt. Relativ dazu sind die Grundgleichungen der Strukturmechanik und Strömungsmechanik in Euler-Formulierung dargestellt. Diese sogenannte ALE (**A**rbitrary **L**agrange-**E**uler) gemischte Lagrange-Euler-Formulierung bietet bezüglich der Kopplung der struktur- und strömungsmechanischen Grundgleichungen über die Lagrange-Darstellung der bewegten Oberfläche den Vorteil, dass die unterschiedlichen Rechennetze der jeweiligen Bereiche an der Grenzfläche G gekoppelt werden können. Für die Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_G$ gilt ebenfalls die Kontinuitätsgleichung $\nabla \times (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_G) = 0$.

In der ALE Grundgleichung (13.58) bedeutet ρ die jeweilige Dichte der Struktur und des strömenden Mediums. Der Tensor $\boldsymbol{\sigma}$ steht für

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\mathrm{ij}} \qquad \text{der Struktur,}$$

mit den jeweiligen Ansätzen des Spannungs-Dehnungsgesetz und

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau_{\mathrm{ij}} \qquad \text{der Strömung,}$$

mit dem Stokesschen Reibungsansatz für inkompressible Strömungen

$$\tau_{\mathrm{ij}} = -p \times \delta_{\mathrm{ij}} + \mu \times \left(\frac{\partial v_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}} + \frac{\partial v_{\mathrm{j}}}{\partial x_{\mathrm{i}}} \right). \tag{13.59}$$

Die Kopplung erfolgt über die Randbedingungen an der Grenzfläche G. Die kinematische Kopplungsbedingung besagt, dass die Deformationsgeschwindigkeit v_{i} gleich der Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ an der Grenzfläche sein muss:

$$v_{\mathrm{i}}|_G = \boldsymbol{v}|_G. \tag{13.60}$$

Die dynamische Kopplungsbedingung verknüpft den Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ mit dem Schubspannungsvektor $\boldsymbol{\tau}$ an der Grenzfläche mit dem Normalenvektor $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}. \tag{13.61}$$

Der Austausch der Spannungen mit dem hydrostatischen Druck und den Schubspannungskomponenten der Reibung ist Gegenstand der Kopplungsmodelle.

Für die Strömungsberechnung sind entsprechend der Abb. 13.37 drei Bereiche zu unterscheiden. Im ersten Bereich führt die Bewegung der Kopplungsgrenzfläche zu einer substantiellen Lagrange-Beschreibung der Strömungsgrößen. Der zweite Übergangsbereich erfordert eine gemischte Lagrange-Euler-Betrachtung und in hinreichend großem Abstand von der Grenzfläche wird im dritten Bereich die Euler-Formulierung genutzt. Die Abb. 13.37 zeigt die Bereichseinteilung mit einem charakteristischen Rechennetz für die Strömungsberechnung des menschlichen Herzens (Oertel jr. et al. 2009, 2011).

Einen anderen Ansatz für die Berechnung der Strömung-Strukturkopplung haben Peskin und McQueen 1997 eingeführt. Sie approximieren die Muskelfasern des Herzens sowie die Herzklappen in einer Lagrange Betrachtungsweise (siehe Abschn. 3 des Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik) mit diskreten elastischen *Faser-Filamenten*, die in der Strömung eingebettet sind. Die Diskretisierung der Faser-Filamente wird so fein gewählt, dass sie keinen Volumenanteil und keine Masse besitzen, aber dennoch für eine kontinuumsmechanische Beschreibung des biologischen Materials benutzt werden können. Die Filamente orientieren sich entlang der Strömung und nehmen die lokale Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ an. In je-

dem Punkt des Filamente-Strömungsverbundes ist eine eindeutige Faserrichtung gegeben, die durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$ festgelegt wird.

Die Kraft $\boldsymbol{F}$, die die Faser-Filamente auf die Strömung ausüben, berechnet sich mit den *Wechselwirkungsgleichungen* des Filamente-Strömungssystems:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) = \int_V \boldsymbol{f}(q,r,s,t) \times \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}(q,r,s,t)) \times \mathrm{d}y \times \mathrm{d}r \times \mathrm{d}s, \quad (13.62)$$

mit den Filamente-Koordinaten q, r, s, der Position des Filaments zum Zeitpunkt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(q,r,s,t)$, dem Einheitsvektor $\boldsymbol{e} = (\partial \boldsymbol{X}/\partial s/(|\partial \boldsymbol{x}/\partial s|)$ und dem Integrationsvolumen V.

Die Verknüpfung mit dem Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ erfolgt mit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}(q,r,s,t) &= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(q,r,s,t),t) \\ &= \int_V \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \times \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}(q,r,s,t)) \times \mathrm{d}\boldsymbol{X}. \end{aligned} \quad (13.63)$$

Dabei sind die Faser-Filamente Gleichungen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \frac{\partial(\tau \times \boldsymbol{e})}{\partial s}, \\ \tau &= \sigma \times \left(\left| \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial s} \right|, q, r, s, t \right). \end{aligned} \quad (13.64)$$

Es ist zu beachten, dass die Strömungsgleichungen (13.63) und (13.64) in Euler-Betrachtungsweise angeschrieben sind. $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3)$ sind ortsfeste kartesische Koordinaten. Die zu berechnenden Variablen sind der Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, der Druck $p(\boldsymbol{x},t)$ und die Filamente-Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$. Die Konstanten ρ und μ sind die Dichte und Viskosität der Strömung.

Die Faser-Filamente Gl. (13.64) und deren Verknüpfung mit der Strömung (13.62) und (13.63) sind in der Lagrange-Betrachtungsweise dargestellt, wobei q, r, s zeitabhängige gekrümmte Koordinaten darstellen, die den Ort der Materialpunkte der Faser-Filamente festlegen. Die Unbekannten des Gleichungssystems sind die Faser-Konfiguration $\boldsymbol{X}(q,r,s,t)$, die Faser-Spannung $\tau(q,r,s,t)$ und die Lagrange-Darstellung der Faserkräfte $\boldsymbol{F}(q,r,s,t)$. Die Wechselwirkungsgleichungen (13.62) und (13.63) verknüpfen die Lagrange- und Euler-Variablen.

Die Abb. 13.38 zeigt das vereinfachte Faser-Filamente Modell des Herzens, das dem Strukturmodell der Abb. 13.31 entspricht. Es sind die Faserfilamente der inneren Schicht des linken Ventrikels sowie die berechneten drei Taschen der Aortenklappe gezeigt.

In Abb. 13.39 ist die berechnete Strömung dargestellt. Es sind Streichlinien von der Strömung beigesetzter Teilchen gezeigt. Das erste Bild zeigt den Einströmvorgang in den linken und rechten Ventrikel bei geöffneter Mitral- und

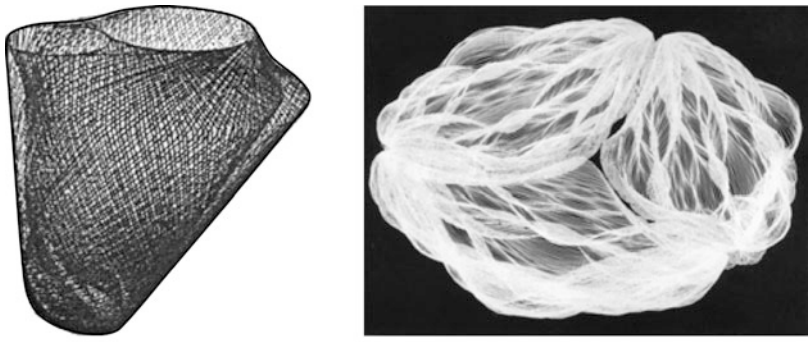


Abb. 13.38 Faser-Filamente Modell der Innenwand des linken Ventrikels und der Aortenklappe, Peskin und McQueen 1994, 1997

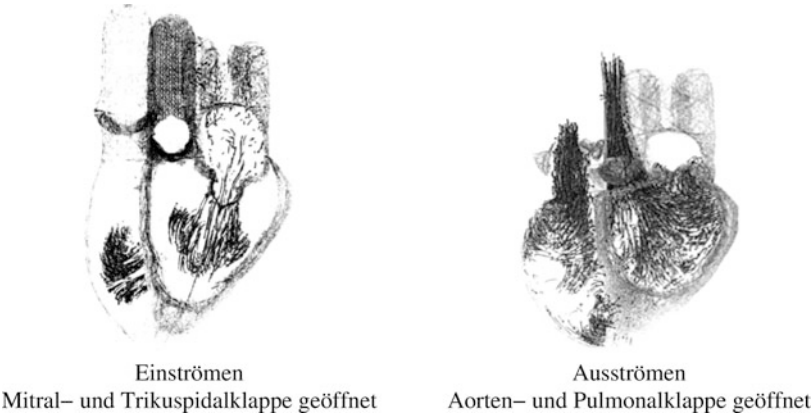


Abb. 13.39 Strömungssimulation im Herzen, Peskin und McQueen 1997

Trikuspidalklappe. Beim Einfüllvorgang bildet sich in den Ventrikeln ein Ringwirbel um die Einströmjets aus. Die Teilchen zur Sichtbarmachung der Strömung werden jeweils in den Vorhöfen und den Ventrikeln des Herzens beigegeben. Während der Ventrikelkontraktion ist die Mitral- und die Trikuspidalklappe geschlossen. Es verbleibt eine Restströmung geringer Strömungsgeschwindigkeit. Beim Ausströmvorgang ist die Aorten- und Pulmonalklappe geöffnet und es ist im Aorten- und Venen-Kanal eine Jet-Strömung hoher Strömungsgeschwindigkeit zu erkennen. Die numerische Auflösung der Strömungsberechnung erlaubt es jedoch nicht, die Details der dreidimensionalen Strömungsstruktur während des Füllvorganges zu analysieren.

Da in vivo Strukturdaten des menschlichen Herzens für die Bestimmung der Konstanten der Dehnungs-Energiefunktion Gl. (13.49) erst in einem ersten Ansatz verfügbar sind, wird eine andere Möglichkeit der Strömungsberechnung im Herzen ohne Modellierung der Struktur des Myokards verfolgt. Dabei wird die

Volumenkraft $\boldsymbol{f}$ in Gl. (13.53) durch die Kenntnis der zeitabhängigen Bewegung der Herzgeometrie ersetzt. Diese wird der Strömung in den Ventrikeln aufgeprägt. Folgt man diesem Gedankengang, so wird aus medizinischen MRT (Magnet-Spin-Resonanz-Tomographie)-Bilddaten ein dynamisches geometrisches Oberflächenmodell (Fluidraum) des Herzens für einen gemittelten Herzzyklus abgeleitet. Mit diesen vorgegebenen zeitabhängigen geometrischen Randbedingungen wird die Strömungsberechnung in den Herzventrikeln durchgeführt.

Für die pulsierende Strömungsberechnung wird die Kontinuitäts- und Navier-Stokes-Gleichung (13.53) mit dem Durchmesser der Aorta D und der gemittelten Geschwindigkeit U am Eintritt der Aorta entdimensioniert:

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{D}, \qquad \boldsymbol{v}^* = \frac{\boldsymbol{v}}{U}, \qquad t^* = t \times \omega, \qquad p^* = \frac{p}{\rho \times U^2}.$$

Mit den dimensionslosen Kennzahlen Reynolds-Zahl $Re_D = U \times D/\nu_{\text{eff}}$ und Womersley-Zahl $Wo = D \times \sqrt{\omega/\nu_{\text{eff}}}$ mit $\omega = 2 \times \pi/T_0$ (T_0 Herzzyklus) ergeben sich die dimensionslosen Grundgleichungen:

$$\begin{gathered} \nabla \times \boldsymbol{v} = 0, \\ \frac{Wo^2}{Re_D} \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \times \nabla)\boldsymbol{v} \right) = -\nabla p + \frac{1}{Re_D} \times \boldsymbol{\Delta v}. \end{gathered} \tag{13.65}$$

Die Abb. 13.40 zeigt die Magnet-Spin-Resonanz-Tomographie (MRT)-Bilddaten in horizontalen Schnitten des menschlichen Herzens und das daraus abgeleitete dynamische Geometriemodell des Herzens, das den Fluidraum der Ventrikel und

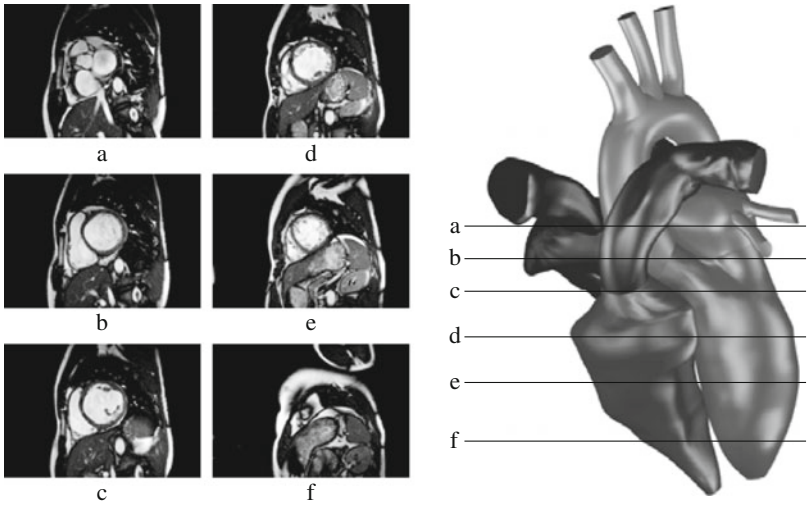


Abb. 13.40 Dynamisches Geometriemodell des menschlichen Herzens

Vorhöfe darstellt. Dabei werden insgesamt zu jedem Zeitpunkt des Herzzyklus 26 horizontale und vertikale Schnittebenen ausgewertet. Es werden mehrere Herzzyklen zu jeweils 20 Zeitpunkten aufgenommen und mit Bilderkennungssoftware in das dynamische Geometriemodell überführt. Die Triggerung der Bildaufnahmen erfolgt mit dem aufgezeichneten EKG der Probanden (Oertel jr. et al. 2005, 2006).

Das dynamische Geometriemodell des Herzens besteht aus den Ventrikeln, Vorhöfen, der Aorta, der Pulmonalarterie und der Vena Cava. Die Bewegung der Kontraktion und Relaxation der Ventrikel und Vorhöfe wird vom Geometriemodell vorgegeben, während die vom Strömungspuls verursachte Bewegung der Aorta und Vena Cava Strömung-Struktur gekoppelt berechnet wird. Der Volumenstrom der druckgesteuerten Herzklappen wird in den jeweiligen Projektionsebenen entsprechend der Abb. 13.47 modelliert.

Die berechnete dreidimensionale Strömungsstruktur im linken und rechten menschlichen Ventrikel ist in Abb. 13.41 für einen Herzzyklus dargestellt. Beim Öffnen der Mitral- und Trikuspidalklappe zum Zeitpunkt $t = 0.76$ stellen sich im *linken* und *rechten Ventrikel* während des Füllvorganges zunächst Einströmjets ein, die nach einem Viertel des Herzzyklus jeweils von einem Ringwirbel (dreidimensionaler Fokus F1, siehe Kap. 1 ▸ Grundlagen der Strömungsmechanik, Abb. 38) begleitet werden. Diese entstehen als Ausgleichsbewegung für die im ruhenden Fluid abgebremsten Einströmjets. In den Vorhöfen entstehen weitere Ringwirbel, die von

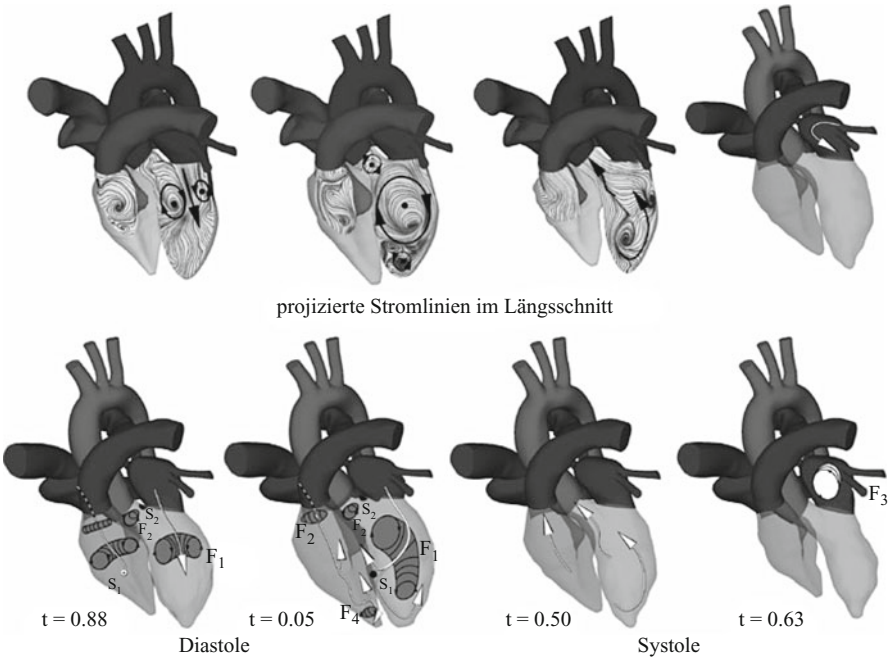


Abb. 13.41 Strömung im menschlichen Herzen, $Re_D = 3740$, $Wo = 25$, $T_0 = 1.0\,\mathrm{s}$

den Helmholtzschen Wirbelsätzen (siehe Abschn. 3 des Kap. 5 ▸ Aerodynamik) vorgeschrieben sind. Im weiteren Verlauf der Diastole nehmen aufgrund der Bewegung des Myokards die Ringwirbel an Größe zu. Dabei erfolgt die Ausdehnung der Wirbel in axialer Richtung gleichmäßig, in radialer Richtung wird jedoch im linken Ventrikel die linke Seite verstärkt. Beim Eindringen in die Ventrikel verringern sich die Geschwindigkeiten der Wirbel. Die Ventrikelspitzen werden zu diesem Zeitpunkt nicht durchströmt. Im weiteren Verlauf des Einströmvorganges kommt es im linken Ventrikel aufgrund der starken Deformation zu einer Neigung des Ringwirbels in Richtung der Ventrikelspitze und zur Ausbildung der Sattelfläche S1 an der Myokardwand, die ein effizientes Ausströmen während der Systole vorbereitet. Dabei verringert sich die Geschwindigkeit der dreidimensionalen Strömung, bis schließlich der Einströmvorgang abgeschlossen ist und die Mitralklappe schließt. Die weitere Deformation der Wirbelstruktur wird durch die Trägheit der Strömung bestimmt. Parallel induziert der obere Teil des Ringwirbels einen Sekundärwirbel im Aortenkanal F2 mit dem Sattelpunkt S2 an der Wand des Aortenkanals. Der Einströmvorgang in den Vorhof erzeugt zu Beginn der Diastole den dreidimensionalen Wirbel F3.

Aufgrund der komplexeren Geometrie des rechten Ventrikels (siehe Abb. 13.29) ist der Einströmringwirbel entlang der Ventrikelkontur verformt. Dies führt dazu, dass sich während der Diastole beim Drehen des Ringwirbels in Richtung der Ventrikelspitze die Wirbelachse gegen die Außenwand des Myokards neigt und dort eine Sattelfläche S1 erzeugt. Die Strömungsberechnung zeigt, dass deshalb der Ringwirbel vor Beginn des Ausströmens zerfällt und eine Sekundärströmung in der Ventrikelspitze F4 entsprechend der Sekundärströmung im Pulmonalarterienkanal F2 verursacht. Insofern ist die Interpretation der dreidimensionalen Strömungsstruktur im rechten Ventrikel nicht so eindeutig wie im linken Ventrikel.

Zum Zeitpunkt $t = 0.41$ öffnet die Aortenklappe und der Ausströmvorgang in die Aorta beginnt. Dabei wird die Bewegungsrichtung der Wirbel fortgesetzt. Es wird zunächst der Wirbel F2 und dann in zeitlicher Abfolge der Ringwirbel F1 ausgespült. Das Geschwindigkeitsmaximum des Ausströmvorganges wird im zentralen Bereich der Aortenklappe erreicht und zum Zeitpunkt $t = 0.61$ ist der Strömungspuls in der Aorta ausgebildet. Am Ende der Systole hat sich die Wirbelstruktur im linken und rechten Ventrikel vollständig aufgelöst. Dabei werden vom gesunden menschlichen Herzen etwa 62 % des linken Ventikelvolumens ausgestoßen.

Die Strömung-Struktur gekoppelte Berechnung des linken Herzventrikels wird mit der zu Beginn des Kapitels eingeführten Lagrange-Euler Formulierung durchgeführt. Die Dehnungs-Energiefunktion (13.49) kann in den passiven Anteil der Ventrikelrelaxation W_p und den aktiven Anteil der Ventrikelkontraktion W_a aufgeteilt werden:

$$W = W_p + W_a. \tag{13.66}$$

Die kontinuierliche Richtungsänderung der Muskelfasern vom Epikard zum Endokard des linken Ventrikels ist in Abb. 13.42 dargestellt und entspricht der

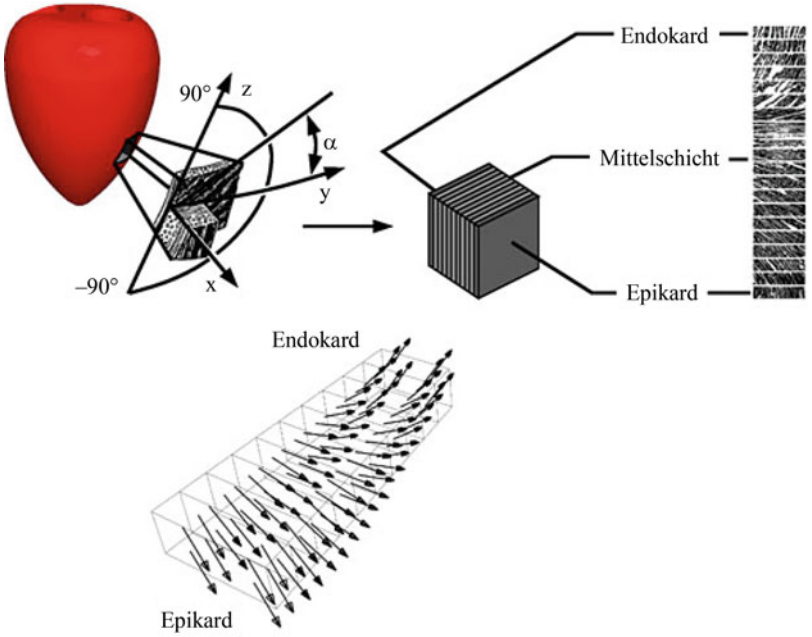


Abb. 13.42 Orientierung der Muskelfasern

Abb. 13.26. Es wird angenommen, dass im spannungsfreien Ausgangszustand des Ventrikels die Richtung von $\alpha = -45°$ bis $\alpha = 35°$ variiert und sich während des Herzzyklus verändert. Für die passive Ventrikelrelaxation lässt sich die Richtungsänderung der Muskelfasern in dem betrachteten Volumenelement des Myokards der Abb. 13.42 im Grenzfall zu einer isotropen Matrix zusammenfassen, so dass die anisotrope Richtungsänderung lediglich in den Randschichten des Epikards und Endokards berücksichtigt wird. Jeder einzelne Term der Dehnungs-Energiefunktion Gl. (13.66) wird als Exponentialfunktion in Abhängigkeit der Invarianten I_i des Greenschen Dehnungstensors Gl. (13.46) modelliert.

Damit ergibt sich für die Dehnungs-Energiefunktion Gl. (13.66):

$$
\begin{aligned}
W = {} & \frac{a}{2b}\exp[b(I_1-3)] \\
& + \frac{a_f}{2b_f}(\exp[b_f(I_{4f}-1)^2]-1) \\
& + \frac{a_s}{2b_s}\left(\exp\left[\frac{b_s}{\mathbf{1}+\boldsymbol{d_3}\mathbf{Akt}(\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{d_4}}}(I_{4s}-1)^2\right]-1\right) \\
& + \frac{a_{fs}}{2b_{fs}}\left(\exp\left[\frac{b_{fs}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{d_3}\mathbf{Akt}(\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{d_4}}}(I_{8fs}-1)^2\right]-1\right) \\
& + \boldsymbol{d_1}\mathbf{Akt}(\boldsymbol{t})\ \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{4f}}^{\boldsymbol{d_2}}
\end{aligned}
\tag{13.67}
$$

Der erste Term ist die isotrope Matrix des Myokard-Volumenelementes. Der zweite und dritte Term beschreiben die Spannungen in den Faser- und Schichtrichtungen f, s und der vierte Term die Wechselwirkung zwischen den zwei Richtungen der Muskelfaserschichten fs. Wenn keine Verformungen auftreten, hat die erste Invariante den Wert 3 und die übrigen Invarianten den Wert 1, womit alle Spannungen verschwinden. Fett gedruckt sind die additiven Terme der aktiven Kontraktion. Da die Kontraktion in Faserrichtung erfolgt, muss der letzte Term in Abhängigkeit der Invarianten I_i formuliert werden. Die Kraftentwicklung im Herzmuskel entsteht aufgrund des zeitlichen Aktivierungsfunktion Akt(t). Die Muskelanspannung geht einher mit einer Umordnung der Muskelfaserschichten. Diese bewirkt, dass die Schichtrichtung im Vergleich zur passiven Relaxation des Muskels einen geringeren Widerstand leistet, der durch die fett gedruckte Erweiterung des dritten und vierten Terms der Dehnungs-Energiefunktion Gl. (13.67) dargestellt wird.

a_i und b_i sind die Modellkonstanten des menschlichen Ventrikels, die im Vergleich mit Schermessungen an Tierherz-Präparaten bestimmt werden. Die Aktivierungsfunktion Akt(t) und die Konstanten d_i werden so bestimmt, dass sich eine Übereinstimmung mit den Druck- und Volumenverläufen des menschlichen Herzens einstellt.

Die Abb. 13.43 zeigt die berechnete Formänderung und Spannungsverteilung des gesunden menschlichen Ventrikels der Abb. 13.41. Zu Beginn der Strukturberechnung ist der spannungsfreie Ausgangszustand vorgegeben, der sich während

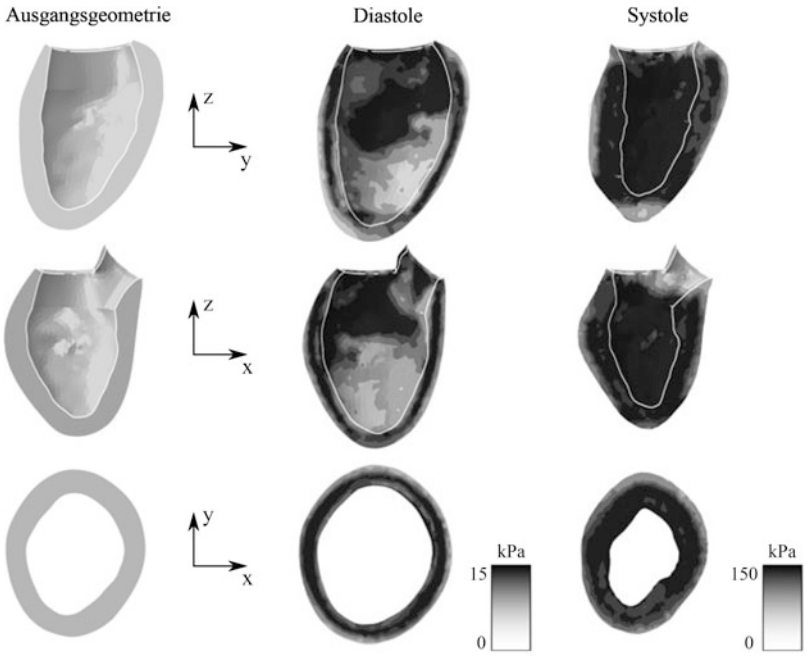


Abb. 13.43 Formänderung und Spannungsverteilung des linken Herzventrikels

der Diastole und Systole verändert. Es sind jeweils die Längsachsenschnitte und Horizontalschnitt des Ventrikels dargestellt.

Während der Diastole vergrößert sich das Ventrikelvolumen. Die Wandstärke des Herzmuskels nimmt ab und der Ventrikel dehnt sich in Umfangs- und Längsachsenrichtung aus. Aufgrund der helikalen Faseranordnung kommt es zu einer Drehung der Herzkammer. In der Austreibungsphase der Systole kontrahiert der Herzmuskel und das Ventrikelvolumen nimmt ab. Es kommt zu einer Verkürzung in Längsachsen- und Umfangsrichtung. Gleichzeitig vergrößert sich die Wandstärke, was durch die Umordnung der Muskelfaserschichten begünstigt wird. Analog zur Diastole kommt es zu einer Ventrikeldrehung. Die Drehrichtung ergibt sich ergibt sich aus dem Drehmoment der kontrahierenden Fasern und dem Abstand zwischen der Lage der Fasern und der Ventrikelmittelachse. Dabei hat die Verteilung der Faserrichtungen im Myokard einen wesentlichen Einfluss auf die Bewegung des Ventrikels.

Mit der Vergrößerung des Ventrikelvolumens während der Diastole wird der Herzmuskel durch den Kreislaufdruck gedehnt. Die höchsten Spannungen (schwarz) treten zum einen in der Mitte der Herzwand auf. An dieser Stelle verlaufen die Faserrichtungen nahezu in Umfangsrichtung. Zum anderen sind große Spannungen auf dem Endokard in der oberen Hälfte des Ventrikels zu erkennen. Bei Erreichen des endsystolischen Volumens entwickelt der Muskel seine größten Spannungen. in der Mitte der Herzwand und auf dem Endokard. Das Hohe Spannungsniveau auf dem Endokard lässt sich einerseits mit den großen Ventrikeldrücken zu diesem Zeitpunkt und andererseits mit der großen Verformung des Endokards erklären.

Das Ergebnis der Strömung-Struktur gekoppelten Strömungsberechnung des linken menschlichen Ventrikels ist in Abb. 13.44 dargestellt. Die auf die Längsachse projizierten Stromlinien zeigen entsprechend der Abb. 13.41 während der Diastole den Einströmjet mit dem Ringwirbel im Ventrikel, die Neigung des Ringwirbels in die Ventrikelspitze und die damit vorbereitete geordnete zeitliche Abfolge des Ausströmvorgangs der Systole. Diese Abfolge der dreidimensionalen Strömungsstruktur während eines Herzzyklus wird sowohl von dem Herzmodell bei

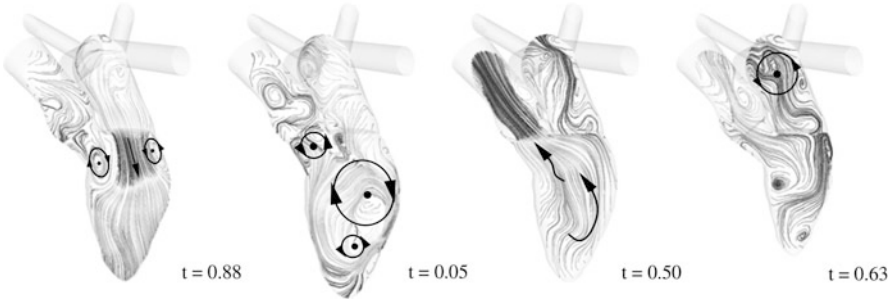


Abb. 13.44 Strömung im linken menschlichen Ventrikel, $Re_D = 3900$, $Wo = 26$, $T_0 = 1.0\,\mathrm{s}$

vorgegebener Ventrikelgeometrie als auch mit dem Strömung-Struktur gekoppelten Herzmodell wiedergegeben. Beide Herzmodelle führen zu demselben Ergebnis der dreidimensionalen pulsierenden Strömung im menschlichen Herzen.

Ergänzend zu den Kennzahlen der dimensionslosen Navier-Stokes-Gleichung (13.65) Re_D und Wo werden weitere dimensionslose Kennzahlen für die medizinische Bewertung der Ventrikelströmung definiert. Die Ejektionsfraktion

$$E = \frac{V_\mathrm{s}}{V_\mathrm{d}} \tag{13.68}$$

ist das Verhältnis des Schlagvolumens V_s und des enddiastolischen Volumens V_d. Sie gibt an, wieviel Prozent des Ventrikelvolumens in den Aortenkanal ausgestoßen werden.

Mit der Ventrikelpumparbeit A_p, die sich aus dem p-V-Diagramm der Abb. 13.27 berechnet, der Verweilzeit des Blutes im Ventrikel t_b im Allgemeinen über $2-3$ Pumpzyklen, der effektiven Zähigkeit des Blutes μ_eff Gl. (13.4) und dem Schlagvolumen V_s, lässt sich die dimensionslose Pumparbeit definieren:

$$O = \frac{A_\mathrm{p} \times t_\mathrm{b}}{\mu_\mathrm{eff} \times V_\mathrm{s}}, \tag{13.69}$$

wobei $A_\mathrm{p} \times t_\mathrm{b}/\mu_\mathrm{eff}$ die Dimension eines Volumens hat und sich O als Volumenverhältnis darstellt. Liegt ein Herzinfarkt bei einem Patienten vor, verringert sich die Pumparbeit des Ventrikels und die Verweilzeit des Blutes im Ventrikel nimmt zu. Die dimensionslose Pumparbeit nimmt verglichen mit dem gesunden Herzen größere Werte an. Trägt man in Abb. 13.45 die dimensionslose Pumparbeit O bezogen auf den Referenzwert des gesunden Ventrikels O_r für Patienten mit einem Aneurysma vor und nach der Ventrikelrekonstruktion und nach einer viermonatigen Regenerationszeit über der Ejektionsfraktion $E/E\mathrm{r}$ oder der Reynolds-Zahl Re_D

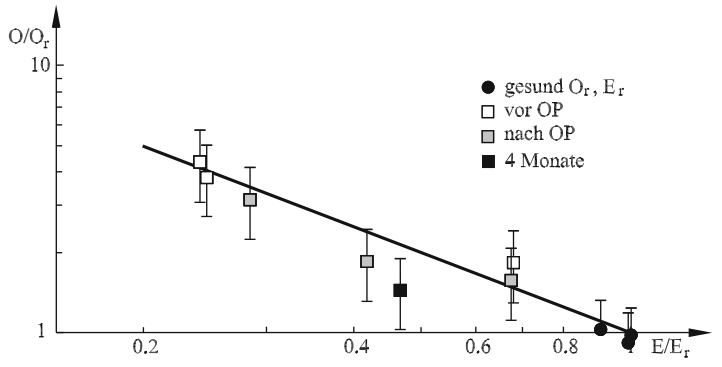


Abb. 13.45 Dimensionslose Pumparbeit O/O_r in Abhängigkeit der Ejektionsfraktion E/E_r, Referenzwerte $O_\mathrm{r} = 3.4 \times 10^6$, $E_\mathrm{r} = 62\,\%$

auf, erhält man im doppelt logarithmischen Maßstab eine Gerade und damit das lineare Potenzgesetz:

$$\frac{O}{O_\mathrm{r}} = \left(\frac{E}{E_\mathrm{r}}\right)^{-1}. \tag{13.70}$$

Wie das Diagramm der Abb. 13.45 zeigt, lässt sich mit der dimensionslosen Pumparbeit und dem Potenzgesetz Gl. (13.70) eine quantitative strömungsmechanische Bewertung vor und nach der Operation eines Patienten durchführen. Dabei geht man davon aus, dass die Womersley-Zahl Wo näherungsweise konstant ist.

Berücksichtigt man in Gl. (13.69) die gemittelte endsystolische Spannungsverteilung $\bar{\sigma}_\mathrm{s}$ des Myokards als charakteristische Strukturgröße erhält man für die dimensionslose Kennzahl der Pumparbeit O_s:

$$O_\mathrm{s} = \frac{A_\mathrm{p} \times \bar{\sigma}_\mathrm{s} \times (t_\mathrm{b})^2}{(\mu_\mathrm{eff})^2 \times V_\mathrm{s}} = \frac{O \times \bar{\sigma}_\mathrm{s} \times (t_\mathrm{b})}{(\mu_\mathrm{eff})}. \tag{13.71}$$

Der auf den Referenzwert O_sr des gesunden menschlichen Herzens bezogene Wert der dimensionslosen Pumparbeit $O_\mathrm{s}/O_\mathrm{sr}$ steigt mit zunehmender Erkrankung des Herzens entsprechend der Abb. 13.45 an. Große Spannungen sind beispielsweise bei dünner werdender Herzwand zu erwarten, was auf eine Herzinsuffizienz hinweist oder auch bei Vernarbungen des Herzmuskels, die von einem Herzinfarkt verursacht werden.

Eine andere Möglichkeit der Definition einer charakteristischen dimensionslosen Kennzahl unter Berücksichtigung der gemittelten Spannung $\bar{\sigma}_\mathrm{s}$ bietet das Verhältnis der geleisteten Spannungsarbeit und der Druck-Volumenarbeit:

$$O_\mathrm{s} = \frac{\bar{\sigma}_\mathrm{s} \times V_\mathrm{s}}{A_\mathrm{p}}. \tag{13.72}$$

Der für das gesunde menschliche Herz berechnete Referenzwert hat den Wert $O_\mathrm{sr} = 9.2 \times 10^6$ statt dem Referenzwert $O_\mathrm{r} = 3.4 \times 10^6$ der Abb. 13.45.

3.5 Herzklappen

Die Funktionsweise der vier Herzklappen wurde bereits in Abschn. 3.1 beschrieben. In diesem Kapitel wird die Modellierung der Strömungsverhältnisse in den Herzklappen des linken Ventrikels ergänzt.

Die Abb. 13.46 zeigt die Anatomie- und Ultraschall-Echo-Doppler-Bilder der druckgesteuerten Mitral- und Aortenklappe. Die Mitralklappe besteht aus zwei Segeln. Die Mitralklappe ermöglicht den Füllvorgang des linken Vorhofes zwischen den Herzschlägen und verhindert den Blutrückstrom während der Ventrikelkontraktion. Das Umklappen der Mitralklappensegel während des hohen Drucks der

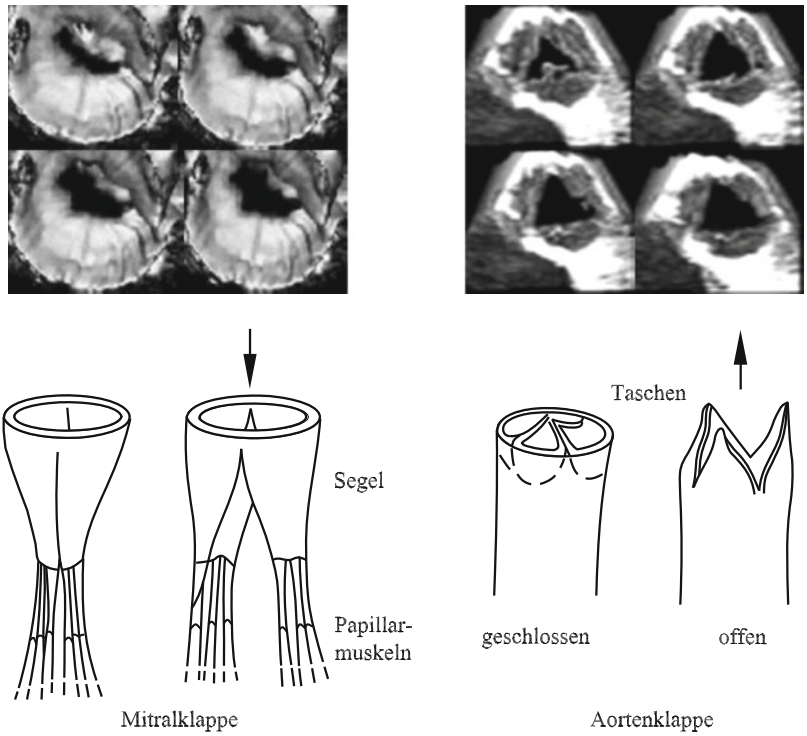


Abb. 13.46 Mitral- und Aortenklappe des Herzens

Kontraktionsphase des Herzens verhindern die zu den Papillarmuskeln führenden Sehnenfäden.

Die Aortenklappe besteht aus drei halbmondförmigen Bindegewebstaschen. Sie verhindert während der Relaxationsphase des Herzens die Blutrückströmung aus der Aorta. Wegen des hohen Drucks, dem die Aortenklappe während der Kontraktionsphase ausgesetzt ist, sind die Klappentaschen wesentlich stabiler ausgebildet als die Segel der Mitralklappe.

Im geöffneten Zustand legen sich die Taschen der Aortenklappe trotz des hohen Aortendrucks nicht an den Aortenbulbus an. Die Spitzen der Taschen werden umströmt und es bildet sich zwischen Klappentasche und Aortenbulbus ein Rückströmgebiet, dessen Gegendruck das Ausbeulen der Taschen und das Anlegen verhindert. Aufgrund der hohen Scherraten des Einströmjets in die Aorta werden die Spitzen der Aortenklappentaschen instabil und beginnen im geöffneten Zustand zu flattern.

Für die Berechnung der Strömung in den Ventrikeln ist es nicht erforderlich alle Details der von der Strömung verursachten Klappenbewegung abzubilden. Es ist ausreichend, auf der Basis von Ultraschall-Doppler-Geschwindigkeitsmessungen und MRT-Flussdaten des menschlichen Herzens die Volumenströme durch die

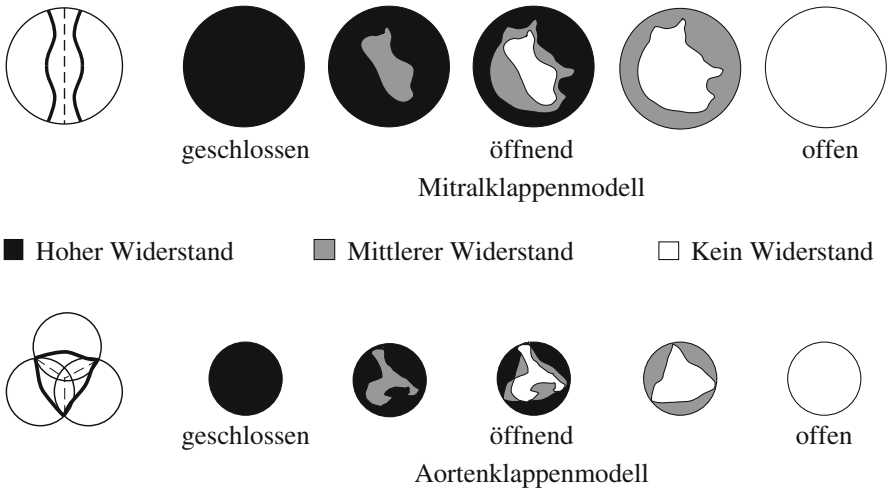


Abb. 13.47 Modellierung der Mitral- und Aortenklappe des Herzens

Herzklappen richtig zu modellieren. Man betrachtet bei den Herzklappenmodellen der natürlichen Klappen lediglich deren Projektion auf die Klappenebene. Die Öffnungsformen der zweiflügeligen Mitralsegelklappe und der dreiflügeligen Aortenklappe sind in Abb. 13.47 dargestellt.

Die Modellklappen werden durch Randbedingungen realisiert, denen ein variabler Widerstand zugeordnet ist. Dieser Widerstand kann zwischen 0 und ∞ variiert werden. Durch Änderung der Widerstände werden die Klappen entsprechend ihrer Projektion auf die Klappenebene geöffnet. Im geschlossenen Zustand wird den Klappen über die gesamte Fläche der Klappenebene der Widerstand ∞ zugeordnet. Im offenen Zustand ist der Widerstand 0. Die Modellierung der Trikuspidal- und Pulmonalklappe des rechten Herzventrikels erfolgt in entsprechender Weise.

Erkrankungen an den Herzklappen können zu Rückströmungen in die Ventrikel bzw. die Vorhöfe oder in die Aorta führen. Bei einer *Aortenklappenstenose* öffnet sich aufgrund von Kalkablagerungen an den Klappentaschen die Aortenklappe nicht vollständig. Stromab der Aortenklappe bildet sich eine turbulente Jet-Strömung mit erhöhten Strömungsverlusten aus.

Aufgrund der Stenose muss der linke Ventrikel erhöhte Druckverluste überwinden. Das Ventrikelvolumen wächst mit der Zeit und der Herzmuskel nimmt zu. Dabei ist die Versorgung des vergrößerten Herzmuskels mit Sauerstoff nur in gewissen Grenzen möglich, da sich die Herzkranzgefäße nicht vermehren.

Schließt die Aortenklappe nicht vollständig, kommt es bei einer *Aortenklappeninsuffizienz* zu Rückströmungen in den linken Ventrikel und wiederum zu einer Erhöhung der Strömungsverluste. Diese werden vom Herzen durch eine Vergrößerung des Volumens und einer höheren Schlagfrequenz kompensiert.

Bei einer *Mitralklappeninsuffizienz* wird der hohe Druck vom linken Ventrikel in den Vorhof übertragen. Dies führt zu einer Dehnung des linken Vorhofs und über die Lunge erhöht sich die Volumenbelastung des rechten Ventrikels. Damit ergibt sich ein erhöhter Druck im Gefäßsystem der Lunge.

In Fällen schwerer Herzklappenerkrankungen bleibt die operative Korrektur. Eine gängige Operationsmethode ist die Implantation künstlicher Herzklappen. Lange Zeit wurden für die künstliche Aortenklappe Rückschlagklappen mit kugelförmigen oder scheibenförmigen Klappen verwendet. Diese zeigten hohe Druckspitzen und ausgeprägte Rückströmgebiete. Dies führt in den Strömungsbereichen geringer Scherraten (siehe Abb. 13.11) zur Aggregation der Erythrozyten und damit zur Trombenbildung. In den Bereichen hoher Scherraten kommt es zur Verformung der Erythrozyten bis hin zu deren Zerstörung.

Eine Verbesserung brachte die Pendelklappe (Bjork-Shiley), die sich jedoch aufgrund des Verschleißes der Führungsbügel und der Geräuschbelästigung nicht bewährt hat. Die Weiterentwicklung führte zu den zweigeteilten bzw. der natürlichen Aortenklappe nachempfundenen dreigeteilten Pendelklappe, deren Druckspitzen und Rückströmbereiche zwar deutlich verringert wurden, aber nicht vollständig zu vermeiden sind. Die Zukunft liegt bei gentechnisch hergestellten natürlichen Herzklappen, deren Strömungsverluste minimiert werden.

In Abb. 13.48 ist eine zweigeteilte Pendelklappe sowie die experimentelle Strömungsvisualisierung in einer Herz-Druckkammer dargestellt. Im Laserlichtschnitt zeigen die Streichlinien der geöffneten Aortenklappe die Bereiche hoher Strömungsgeschwindigkeit und großer Scherraten sowie Bereiche der Rückströmung stromab. Ist der Anstellwinkel der Klappen im geöffneten Zustand zu groß, löst die Strömung an der Vorderkante der Klappe ab und bildet ein großräumiges Rückströmgebiet, das aufgrund von Scherinstabilitäten turbulent wird und damit höhere Strömungsverluste aufweist. Bei optimiertem Öffnungswinkel wird die Strömungsablösung an der Vorderkante vermieden, wenngleich der Nachlauf periodische instabil wird.

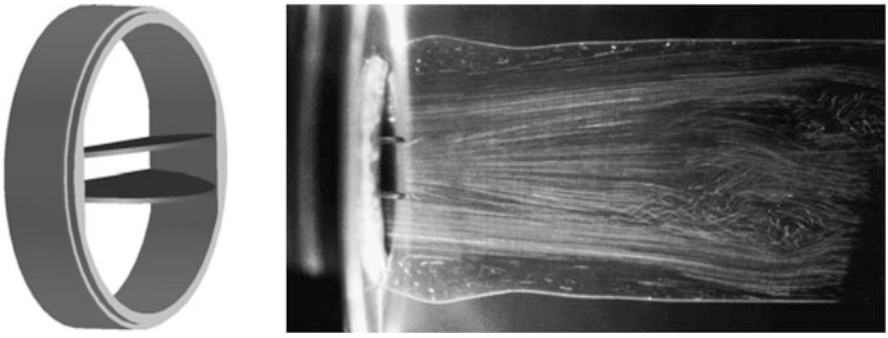


Abb. 13.48 Künstliche Aortenklappe, Hirt 1994

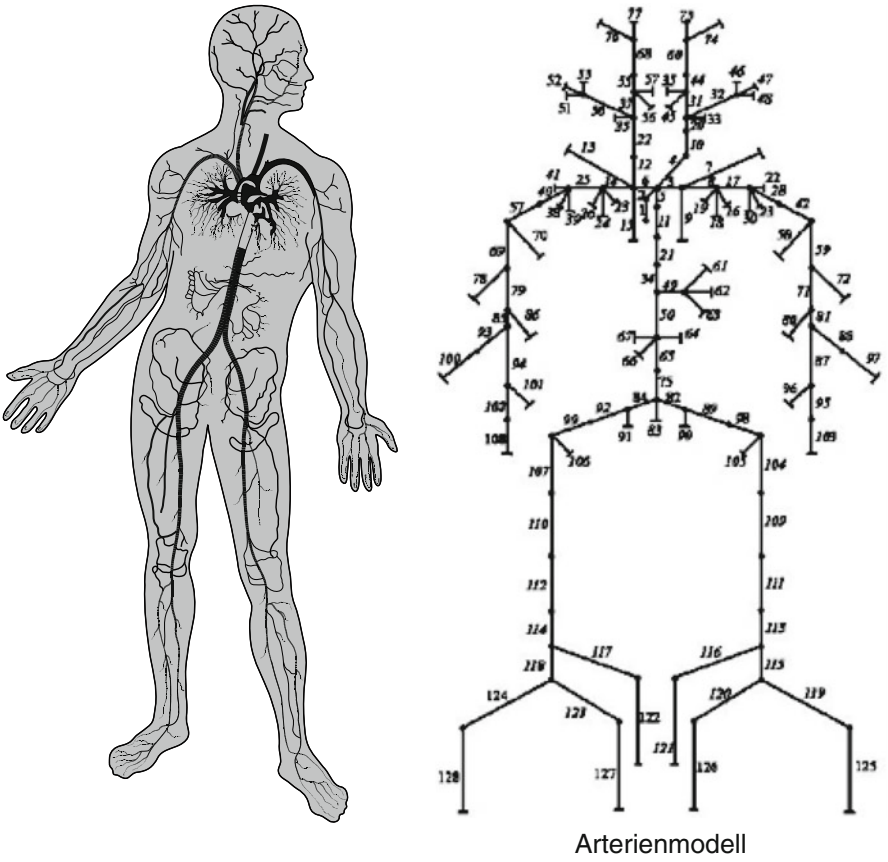


Abb. 13.49 Kreislaufmodell, Naujokat und Kienke 2000

3.6 Kreislaufmodell

Für die Berechnung der Strömung in den Herzventrikeln sind die Druckrandbedingungen der Arterienabgänge und der Venenzugänge erforderlich. Dafür werden die Erkenntnisse aus diesem Kapitel zu einem vereinfachten *Kreislaufmodell* zusammengefasst, das die Blutströmung im menschlichen Kreislauf vom linken Ventrikel und der Aorta in das sich anschließende arterielle System des Körperkreislaufs, zum venösen System, zum rechten Herzventrikel, zur Lunge und zurück zum linken Ventrikel berücksichtigt.

Dieses Modell berechnet den Strömungswiderstand in den Gefäßen sowie verschiedene Einflussparameter auf den Strömungswiderstand. Das Subsystem des arteriellen Körperkreislaufs ist in Abb. 13.49 gezeigt und wird mit 128 Segmenten dargestellt. Jedes Segment besteht aus einem dünnwandigen elastischen und zylindrischen Rohrstück, wobei jedem Rohrsegment entsprechend der menschlichen

Anatomie eine spezifische Länge, eine Wandstärke, ein spezifischer Durchmesser und ein Elastizitätsmodul zugeordnet wird. Periphere Verzweigungen der Arteriolen und Kapillaren mit einem Durchmesser kleiner als 2 mm werden über einen totalen peripheren Widerstandsterm berücksichtigt.

Die Strömungsgeschwindigkeit u und der Druck p werden in Analogie zur Navier-Stokes-Gleichung durch die elektrischen Größen Stromstärke und Spannung dargestellt. Der Lösung der Navier-Stokes-Gleichung für die elastische Rohrströmung werden für jedes Segment des Kreislaufmodells der elektrische Widerstand, die Induktivität und die Kapazität entsprechend der physikalischen Eigenschaften der arteriellen Verzweigungen und der rheologischen Eigenschaften (wie z. B. Viskosität) des Blutes zugeordnet. In Analogie zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichung gelten für jedes Rohrsegment i die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen für den Blutdruck und die Strömungsgeschwindigkeit:

$$p_{\mathrm{i}-1} - p_{\mathrm{i}} = \frac{9 \times \rho \times l}{4 \times \pi^2} \times \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t} + \frac{4 \times \mu_{\mathrm{eff}} \times l}{\pi \times R^4} \times u_{\mathrm{i}} = I \times \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t} + R_{\Omega} \times u_{\mathrm{i}}, \quad (13.73)$$

$$u_{\mathrm{i}} - u_{\mathrm{i}+1} = \frac{3 \times \pi \times R^3 \times l}{2 \times E \times d} \times \frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}A} = C \times \frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}A}, \quad (13.74)$$

mit dem elektrischen Widerstand R_{Ω}, der Induktivität I und der Kapazität C. l bedeutet die Rohrlänge, R der Rohrradius, d die Wandstärke, ρ die Dichte des Blutes und μ_{eff} die Blutviskosität. E ist der Elastizitätmodul des elastischen Rohrsegments.

Die Modellierung des Venen- und Lungenkreislaufes erfolgt ganz analog zur arteriellen Modellierung des Arterienkreislaufs, jedoch mit einem geringeren Detaillierungsgrad.

Das Kreislaufmodell geht von einer pulsierenden Durchströmung des Kreislaufes aus, wobei die Einlaufströmungen nach jeder Segmentverzweigung nicht berücksichtigt werden. Der Strömungspuls des Herzens wird durch eine mittlere Geschwindigkeit in jedem Segment ersetzt.

Weiterführende Literatur

Bechert, D.W., Bruse, M., Hage, W., Meyer, R.: Fluid mechanics of biological surfaces and their technological application. Naturwissenschaften **87**, 157–171 (2000)

Brown, R.H.J.: The flight of birds: II. Wing function in relation to flight speed. J. Exp. Biol. **30**, 90–103 (1953)

Bushnell, D.M.: Drag reduction in nature. Ann. Rev. Fluid Mech. **23**, 65–79 (1991)

Caro, C.G., Pedley, T.J., Seed, W.A.: The Mechanism of the Circulation. Oxford University Press, Oxford (1978)

Conroy, R.T.W.L., Mills, J.N.: Human Circadian Rhythms. Churchill, London (1970)

Doenst, T., Spiegel, K., Reik, M., Markl, M., Henning, J., Nitzsche, S., Beyersdorf, F., Oertel, H. jr.: Fluid dynamics modelling of the left ventricle prototypical evaluation of the effect of ischemic remodelling and surgical ventricle reconstruction. Ann. Thorac. Surg. **87**, 1187–1195 (2009)

Friedman, M.H., Bargeron, C.B., Duncan, D.D., Hutchins, G.M., Mark, F.F.: Effects of arterial compliance and Non-Newtonian rheology on correlations between internal thickness and wall shear. J. Biomech. Eng. **114**, 317–320 (1992)
Fung, Y.C.: Biomechanics – Motion, Flow, Stress and Growth. Springer, New York/Berlin/Heidelberg (1990)
Fung, Y.C.: Biomechanics – Mechanical Properties of Living Tissues. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1993)
Fung, Y.C.: Biomechanics: Circulation. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1997)
Glass, L., Hunter, P.J., McCulloch, A.D. (Hrsg.): Theory of Heart: Biomechanics, Biophysics and Nonlinear Dynamics of Cardiac Function. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1991)
Gray, J.: Animal Locomotion. Weidenfeld & Nicolson, London (1968)
Handke, M., Schäfer, D.M., Müller, G., Schöchlin, A., Magosaki, E., Geibel, A.: Dynamic changes of atrial septal defect area: new insights by three-dimensional volume-rendered echocardiography with high temporal resolution. Eur. J. Echocardiogr. **2**, 46–51 (2001)
Hayashi, K., Yanai, Y., Naiki, T.: A 3D-LDA study of the relation between wall shear stress and intimal thickness in a human aortic bifurcation. J. Biomech. Eng. **118**, 273–279 (1996)
Hirt, F.: Cardiac Valves in a model circulatory system. Sulzer Tech. Rev. **2**, 36–40 (1994)
Holzapfel, G.A.: Nonlinear Solid Mechanics. Wiley, Chichester (2008)
Humphrey, J.D., Delange, S.L.: An Introduction to Biomechanics. Springer, New York/Berlin/Heidelberg (2004)
Hunter, P.J., Smaill, B.H.: Electromechanics of the Heart Based on Anatomical Models. In: Zipes, D.P., Jalife, J. (Hrsg.) Cardiac Electrophysiology from Cell to Bedside, S. 277–283. Saunders, Philadelphia (2000)
Hunter, P.J., Nash, M.P., Sands, G.B.: Computational electromechanics of the heart. In: Panfilov, A.V., Holden, A.V. (Hrsg.) Computational Biology of the Heart, Bd. 4, S. 345–407. Wiley, Chichester (1997)
Hunter, P.J., Nielsen, P.M.F., Smaill, B.H., LeGrice, I.J., Hunter, I.W.: An anatomical heart model with applications to myocardial activation and ventricular mechanics. In: Pilkington, T.C., Loftis, B., Thompson, J.F., Woo, S.L.-Y., Palmer, T.C., Budinger, T.F. (Hrsg.) High-Performance Computation in Biomedical Research, Bd. 1, S. 3–26. CRC Press, Chichester (1993)
Jung, B.A., Kreher, B.W., Markl, M., Hennig, J.: Visualization of tissue velocity data from cardiac wall motion measurements with myocardial fiber tracking: principles and implications for cardiac fiber structures. Eur. J. Cardio-Thoradic Surg. **29**, 158–164 (2006)
Keener, J.P., Panfilov, A.V.: The effects of geometry and fibre orientation on propagation and extracular potentials in myocardium. In: Panfilov, A.V., Holden, A.V. (Hrsg.) Computational Biology of the Heart. Wiley, Chichester (1997)
Krittian, S., Janoske, U., Böhlke, T., Oertel, H. jr.: Partitioned fluid-solid coupling for cardiovascular blood flow – left ventricular fluid mechanics. Ann. Biomed. Eng. **38**, 1426–1441 (2010)
Liepsch, D.: Flow in tubes and arteries – a comparison. Biorheology **23**, 395–433 (1986)
Liepsch, D., Weigand, C.: Comparison of laser doppler anemometry and pulsed color doppler velocity measurements in an elastic replica of a carotid artery bifurcation. J. Vasc. Investig. **2**(3), 103–113 (1996)
Lighthill, M.J.: Note on the swimming of slender Fish. J. Fluid Mech. **9**, 305–317 (1960)
Lighthill, M.J.: Mathematical Biofluidmechanics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1975)
Malmivuo, J., Plonsey, R.: Bioelectromagnetism. Oxford University Press, New York (1995)
Mazumdar, J.N.: Biofluid Mechanics. World Scientific, Singapore, London (1992)
Nachtigall, W.: Technische Biologie von Umströmungsvorgängen und Aspekte ihrer bionischen übertragbarkeit. Abhandlungen der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse / Akademie der Wissenschaften und der Literatur. Steiner, Stuttgart (2001)
Nachtigall, W.: Bionik. Springer, Berlin (2002)
Nash, M.P., Hunter, P.J.: Computational mechanics of the heart. J. Elast. **61**, 113–141 (2000)
Naujokat, E., Kienke, U.: Neuronal and hormonal cardiac control processes in a model of the human circulatory system. J. Bioelectromagn. **2**(2), 1–7 (2000)

Oertel, H. jr.: Biofluid mechanics. In: Prandtl-Essentials of Fluid Mechanics. Springer, New York (2010)
Oertel, H. jr.: Modelling the Human Cardiac Fluid Mechanics. Universitäts-Verlag, Karlsruhe (2005)
Oertel, H. jr., Ruck, S.: Bioströmungsmechanik. Springer Vieweg, Wiesbaden (2015)
Oertel, H. jr., Spiegel, K., Donisi, S.: Modelling the Human Cardiac Fluid Mechanics, 2. Aufl. Universitäts-Verlag, Karlsruhe (2006)
Oertel, H. jr., Krittian, S.B.S., Spiegel, K.: Modelling the Human Cardiac Fluid Mechanics, 3. Aufl. Universitäts-Verlag, Karlsruhe (2009)
Oertel, H. jr., Krittian, S.B.S.: Modelling the Human Cardiac Fluid Mechanics, 4. Aufl. KIT Scientific Publishing, Karlsruhe (2011)
Ottesen, J.T., Olufsen, M.S., Larsen, J.K.: Applied Mathematical Models in Human Physiology. Society for Industrial Mathematics, Philadelphia (2004)
Panfilov, A.V., Holden, A.V.: Computational Biology of the Heart. Wiley, Chichester (1997)
Patel, D.J., Vaishnav, R.N.: Basic Hemodynamics and its Role in Disease Processes. University Park Press, Baltimore (1980)
Perktold, K., Resch, M., Florian, H.: Pulsatile Non-Newtonian flow characteristics in a three-dimensional human catroid bifurcation model. J. Biomech. Eng. **113**, 464–475 (1991)
Peskin, C.S., McQueen, D.M.: Mechanical equilibrium determines the fractal fiber architecture of aortic heart valve leaflets. Am. J. Physiol. **266**, H319–28 (1994)
Peskin, C.S., McQueen, D.M.: Fluid Dynamics of the Heart and its Valves. Mathematical Modelling, Ecology, Physiology and Cell Biology. Prentice-Hall, Upper Saddle River (1997)
Pullan, A.J., Buist, M.L., Cheng, L.K.: Mathematically Modelling the Electrical Activity of the Heart. World Scientific, Upper Saddle River/London (2005)
Ruck, S., Oertel, H. jr.: Modelling the Bird Flight. KIT Scientific Publishing, Karlsruhe (2011)
Schauf, L., Moffet, D.F., Moffet, S.B.: Medizinische Physiologie. Walter de Gruyter, Berlin/New York (1993)
Schubert, E. (Hrsg.): Medizinische Physiologie. Walter de Gruyter, Berlin/New York (1993)
Skalak, R., Ozkaya, N., Skalak, T.C.: Biofluid Mechanics. Ann. Rev. Fluid Mech. **21**, 167–204 (1989)
Sugawara, M., Kajiya, F., Kitabatake, A., Matino, H.: Blood Flow in the Heart and Large Vessels. Springer, Tokyo/Berlin/Heidelberg (1989)
Torrent-Guasp, F., et al.: Seminars in Thoracic and Cardiovascular Surgery **13**(4), 301–319 (2001)
Werner, C.D., Sachse, F.B., Baltes, C., Dössel, O.: The visible man dataset in medical education: electrophysiologie of the human heart. In: Proceedings of the Third Users Conference of the National Library of Medcine's Visible Human Project, S. 1–81 (2000)
Womersley, J.R.: Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. J. Physiol. **127**, 553–563 (1955)

Sachverzeichnis

A
Abgasreinigung, 572
Ablöseblase, 263
Ablösepunkt, 152
Ablösestelle, 128
Absaugung, 153
absolute Instabilität, 357
Absorption, 424
Ackeret-Regel, 226, 227, 266–268
adiabate Berandung, 434
adiabate Wand, 302
Adsorption, 424
Aerodynamik, 63, 219
  des Tragflügels, 219
aerodynamische Kräfte, 221
Aggregatzustand, 9, 477
Ähnlichkeit, mechanische, 125
Aktivierungsenergie, 551
Aktor, miniaturisierter, 665
algebraisches Wirbelviskositätsmodell, 316
Alkan-Oxidation, 562
Amplitudenfunktion, 136
Analyselabor, miniaturisiertes, 664, 681
Anatomie des Herzens, 746–749
Änderung
  lokale zeitliche, 50
  räumliche, konvektive, 50
  substantielle zeitliche, 50
Anfachungsrate, 136, 439
  räumliche, 366
  zeitliche, 366
Anfahrwirbel, 232
Anfangsbedingung, 303
Anisotropie, 7
Anstellung, 223
Anstellwinkel, 224
  induzierter, 240
Anstrichbild, 155, 156
Anströmung, transsonische, 224
Aorta, 15, 717, 725, 747
Aortenklappe, 14, 724, 747, 771
Aortenklappeninsuffizienz, 772
Aortenklappenstenose, 772
Äquipotentialflächen, 38
Arrhenius-Gleichung, 551
Arterien, 717, 725
Arterienerweiterung, 722
Arteriolen, 725
asymptotische Stabilität, 359
Atmosphäre, 11
  gleichförmige, 29
Ätzgeschwindigkeit, 576
Ätzreaktor, 575
Ätzverfahren, 575
Auftrieb, 220, 223, 423
  induzierter, 241
Auftriebsbeiwert, 227
Auftriebskraft, 2, 4, 24, 306
Auftriebslinie, 234, 238
Ausdehnungskoeffizient, 27
Ausflussmündung, 66
ausgebildete Rohrströmung, 169, 451
ausgebildete Turbulenz, 388
Außengesetz, 146
äußere Kräfte, 17
Ausströmvorgang, 765

B
Baldwin-Lomax-Turbulenzmodell, 316
Barometer, 26, 30
barometrische Höhenformel, 30
Basaltsäule, 424
Basset-Kraft, 339
Belastungskurve, 758
Benetzung, 697
  partielle, 697
  vollständige, 697

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

H. Oertel Jr. (Hrsg.), *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*,
Springer Reference Technik, DOI 10.1007/978-3-658-08627-5

Berandung
adiabate, 434
isotherme, 434
Bernoulli-Gleichung, 65, 178
verallgemeinerte, 192
Beschleunigung, 49–51, 64
Beschleunigungsdruckverlust, 515
Beta-Parameter, 619
Beule, 262
Bewegung
laminare, 129
turbulente, 129
Bewegungsgleichung, 50, 188
der Strukturmechanik, 751
Bikuspidalklappe, 724
Bildungsgeschwindigkeit, 551
Bioströmungsmechanik, 14, 715
Biot-Savart-Gesetz, 237
Blasen, 308, 494
Blasenkennzahlen, 495
Blasenkoaleszenz, 530
Blasenströmung, 486, 498
Blasius-Gesetz, 169
Blasius-Korrelation, 708
Blasius-Strömung, 457
Blenden, 526
Blutkreislauf, 14, 717, 725
Blutplasma, 728
Blutpuls, 723
Blutzähigkeit, 730
Blutzirkulation, 716
Boltzmann-Gleichung, 296, 667, 675
Borda-Mündung, 100
Borghi-Diagramm, 597, 599
Boussinesq-Ansatz, 313
Boussinesq-Approximation, 306, 348, 433
Boussinesq-Gleichung, 298, 306, 307
Boyle-Mariottesches Gesetz, 26
Brewer-Dobson-Zirkulation, 658
Brownsche Molekularbewegung, 6, 666
Brunt-Väisälä-Frequenz, 631
Bruttoreaktion, 548
Buffeting, 263
Bunsen-Brenner, 172, 570
Burnett-Gleichungen, 667

C
Casson-Gleichung, 729, 730
Cauchyscher Spannungstensor, 751
Chézysche Gleichung, 167
charakteristisches Polynom, 54
charakteristische Turbulenzlänge, 403
Colebrook-Korrelation, 708
Coriolis-Kraft, 401, 615
Coriolis-Parameter, 614
Couette-Strömung, 356
Coulomb-Kraft, 687
Cross-Modell, 756

D
Damköhler-Zahl, turbulente, 598, 599
Dampfblasen, 532
Dampferzeuger, 477, 486
Dampffilm, 530
Dampfgehalt, 481
Dampfkraftwerk, 477
Dampfschlauch, 532
Dämpfungsfaktor, 317
Dämpfungsfunktion, 322
Dämpfungshaut, 739
Debye-Hückel-Approximation, 689
Debye-Länge, 689, 692
Deformationsgeschwindigkeitsvektor, 751
Dehnungs-Energiefunktion, 751
Dehnungstensor, 751
Deltaflügel, 56, 264
Depolarisation, 754
Depolarisationswelle, 755
Destillation, 424, 478
Diastole, 724
dichtegewichtete Gemischgeschwindigkeit, 492
Dichteschichtung, 400
instabile, 465
Dichtewellen, 519–522
Dichte-Wellen-Instabilität, 538
Diffusion
molekulare, 320
turbulente, 320
Diffusionsflamme, 10, 577
Diffusionsfluss, 346
Diffusionsgeschwindigkeit, 346
Diffusions-Instabilität, 424
Diffusionskoeffizient, 308
Diffusions-Konvektion, 423, 425, 464
Diffusions-Korrelation, 325
Diffusions-Rayleigh-Zahl, 308, 429, 468
Diffusionsstromdichte, 346
Diffusionsvorgänge, 429
Diffusor, 101, 150, 171
direkte numerische Simulation, 10, 577
disjoining pressure, 705
disperse Strömung, 484, 486
Dissipation, 320
skalare, 591
Dissipationsbereich, 330

Dissipationsfunktion, 293
Dissipationsgeschwindigkeit, 588
Dissipationsleistung, 487
Dissipationsrate, skalare, 591
Dissipationstensor, 325
dissipativer Fluss, 301, 312, 333
dissipatives System, 5
Doppeldiffusions-Instabilität, 465
Doppelschicht, elektrische, 688
Drehimpulssatz, 105
drehungsfreie Strömung, 83
dreidimensionale Grenzschicht, 356, 376
Driestscher Dämpfungsfaktor, 317
Driftgeschwindigkeit, 482
Driftströmungsmodell, 492
Drossel, 196
Drosselscheibe, 170
Druck, 224, 301, 333
  dynamischer, 70
  statischer, 70
Druckabhängigkeit, 553
Druckbeiwert, 226
Druckdiffusion, 320
Druckdilatation, 325
Druckhöhe, 65
Druckkraft, 20, 63
Druckmessung, 75
Druckreservoir, 519
Druck-Scher-Korrelation, 326
Drucksonde, 76
Druckstörung, 189
Druckverhältnis, kritisches, 194
Druckverlust, 168, 509, 510
Druckverteilung, 3, 21, 22, 26, 221
Druck-Volumen-Diagramm, 724, 747
Druckwellen, 189–192
  hochfrequente, 533
Druckwiderstandsbeiwert, 173
Dünnfilm-Approximation, 703
Durchmischung, turbulente, 390, 391
Düsen, 501, 526
Düsenströmung, 501
Dynamik
  von Strömungen, 2
  zäher Flüssigkeiten, 119
dynamische Zähigkeit, 120
dynamischer Druck, 70

E
ebene Platte, 471
Ecke, 204–206
Eckenströmung, 143
Eckenumströmung, 143
Eckert-Zahl, 428, 460
Eddy-Break-Up-Modell, 584
Eddy-Dissipation-Modell, 596
Eigenfunktion, 368, 438
Eigenschaften
  Flüssigkeit, 16, 17
  Gas, 26–28
Eigenwert, 54
Eigenwertproblem, 136, 365, 435
Einblasen, tangentiales, 154
Einlauf, thermischer, 711
Einlaufbereich, 426
Einlaufstrecke, 170, 708
Einlaufströmung, 169, 170, 452, 722
Einpunkt-PDF, 596
Einschritt-Modell, 564
Einsetzen der Turbulenz, 353
Einspritzdüse, 530
Einströmjet, 764
Einströmringwirbel, 765
Einzelblasenwachstum, 533
Einzeller, 719
Ekman-Schicht, 621–625
Ekman-Spirale, 623
Ekman-Zahl, 401
elektrische Erregung, 748, 754
Elektrobenetzung, 698
Elektrokardiogramm, 748
Elektroosmose, 689
Elektrophorese, 693, 694
Element-Erhaltungsgleichung, 347
Element-Massenbruch, 571, 587
Elementarreaktion, 548–550
Empfindlichkeitsanalyse, 559
Endokard, 746
Energie
  innere, 301
    spezifische, 346
  kinetische, turbulente, 312
Energiebeziehungen, turbulente, 391–394
Energiegleichung, 200, 294
Energiekaskade, 322, 405, 408
Energiesatz, 197–199
Energiespektrum, 392, 413
Energieströme, 289
Energie-Turbulenzspektrum, 330
Ensemble-Mittelung, 6, 334
Enstrophie, 408
Enstrophie-Dissipations-Anomalie, 408
Enstrophiekaskade, 408, 409
Enthalpie, spezifische, 346
Entwicklungsgleichung, 703
Eötvös-Zahl, 495
Epikard, 746

Erdbeschleunigung, 24, 36
Erdrotation, 400, 612
Erhaltungsform, 296, 300
Erhaltungsgleichung, kontinuumsmechanische, 296
Erhaltungsgröße
  skalare, 587
  volumenspezifische, 333
Erregung, elektrische, 748, 754
Erregungsphysiologie, 754–756
Erwartungswert, bedingter, 595
Erythrozyten, 728
erzwungene Konvektionsströmung, 8, 423, 456
Euler-Gleichungssystem, ortsfestes, 46
Euler-Darstellung, 758
Euler-Gleichungen, 4, 46, 122, 298, 303
Euler-Lagrange-Modell, 478
Eulersche Betrachtung, 50
Eulersche Turbinengleichung, 105
Evolution, 717
Expansionswelle, 206
Extraktion, 424

F
Faktor, präexponentieller, 551
Fall-Off-Kurve, 555
Fan-Triebwerke, 221
Faser-Filamente, 760
Faser-Filamente-Modell, 761
Favre-gemittelte Temperatur, 295
Favre-Mittelung, 285
Favre-Mittelwert, 589
Favre-Varianz, 589
Feinstruktur, 6
Feinstruktur-Turbulenzmodell, 330
feldtheoretische Methode, 417
Fernfeldrand, 302
fest, Aggregatzustand, 477
Feststoff-Suspensionsströmung, 504
Film, dünner, 697, 701
Filmdicke, 498
Filmströmung, 501
Filterfunktion, 331
Finger-Instabilität, 468, 470
  oszillatorische, 470
Finite-Elemente-Methode, 751
Finite-Elemente-Modell, 753
Fisch, 716, 717
Flügeldrehung, 223
Flügelfläche, 224
Flügelgrenzschicht, 250
Flügelschlag, 221, 717, 718, 740
flüssig, Aggregatzustand, 477
Flüssig-Feststoff-Transport, 504–507
Flüssigkeits-Gasströmung, 504
Flüssigkeitsdruck, 19–21, 32–36
Flüssigkeitsmanometer, 33
Flüssigkeitsreibung, 63, 121
Flüssigkeitssäule, 74
Flüssigkeitsströmung, 529
Flüssigkeitsstrahl, 92
Flamelet, 591
Flamelet-Bereich, 599
Flamelet-Modell, 593, 599, 600, 604
Flamme
  nicht-vorgemischte, 567, 571, 576, 577, 585
  turbulente, 10, 576, 577
  vorgemischte, 561, 564, 577
Flammengeschwindigkeit, 564, 598, 600
Flammenlöschung, 577, 590, 592, 603
Flammenstruktur, 563, 599, 600
Flettner-Antrieb, 96
Fließeigenschaften, 123
Fließen, 114
Fliegen, 716
Flossenschlag, 718
Flügel, gepfeilte, 220
Flug-Mach-Zahl, 222
Flugenvelope, 249
Fluid, 45
Fluid-Partikel-Modell, 345
Fluidisierung, 508
Fluidkoordinaten, 46
Fluidteilchen, 46
Fluss
  konvektiver, 301, 312, 333
  turbulenter, 312
Flüssigkeit
  Eigenschaften, 16, 17
  reibungsfreie, 3, 63
  zähe, 119
Flüssigkeitsfilm
  dünner, 670
  vorauslaufender, 699
Foki, 51
Folgereaktion, 556
Form, konservative, 300
Formaldehydbildung, 562
Formänderung, 16
Formationsflug, 745
Formwiderstand, 174
Frank-Sterling Gesetz, 747
freie Konvektionsströmung, 423
freie Turbulenz, 395–397
freie Konvektion, 8

Freistrahl, 99, 100, 142, 206, 207, 395
Freistrahlflamme, 586, 594
Freistrahlstruktur, 207
Friedel-Korrelation, 513
Froude-Zahl, 174, 484, 682
fundamentale Moden, 374
β-Funktion, 584

G
Gas
  Eigenschaften, 26–28
  verdünntes, 669, 672
Gasblasen, 484
Gasdruck, 28–36
Gasdynamik, 187
Gase, ideale, 27
Gas-Feststoff-Strömung, 478
Gas-Flüssigkeitsströmung, 478
gasförmig, Aggregatzustand, 477
Gasfilme, 530
Gaster-Transformation, 368
Gauß-Filter, 331
Gauß-Funktion, 583, 584
gebundener Wirbel, 234, 238
Gefäße, kommunizierende, 32
Gegendruck, 194
Gegenstromflamme, 567, 590, 593
Geißel, 717, 733
Gemischgeschwindigkeit, dichtegewichtete, 492
geostrophischer Wind, 616
gepfeilte Flügel, 220
Gerinne, offenes, 114–116, 167
Gesamtdruck, 70
Gesamtenergie, 346
  turbulente, 312
Gesamtwiderstandsbeiwert, 173
Geschwindigkeitshöhe, 66
Geschwindigkeitskoeffizient, 546, 551, 553
Geschwindigkeitsmessung, 76
Geschwindigkeitspotential, 82
Geschwindigkeitsvektorfeld, 51
Geschwindigkeitsverteilung, 121
Gesetz, 26
Gewichtsfunktion, 334
Gewitterwolken, 477
glattes Rohr, 169
gleichförmige Atmosphäre, 29
Gleichgewicht, 547, 589
  der Flüssigkeiten, 16
  partielles, 555, 558
  thermodynamisches, 666
Gleichgewichtsbetrachtung, 20
Gleichgewichtschemie, 584, 587
Gleichgewichtskonstante, 548
Gleichgewichtslinie, 590
Gleichgewichtsmodell, 525
Gleitbedingung, 303, 669, 687
Gleitflug, 223, 740, 742
Gleitflugzeug, 221
Gleitgesetz, 684
Gleitlänge, 671
Gleitschuh, 160
Gleitwinkel, 223
Gleitzahl, 221, 742
Gnielinski-Korrelation, 710
Golfstrom, 11, 647
Göttinger Profil, 224
Gouy-Chapman-Stern-Modell, 688
Gradientenansatz, 348
Grashof-Zahl, 427, 428
Gravitationsvektor, 333
Greensche Dehnung, 751
Grenzfläche, 308, 333
Grenzflächenspannung, 478, 497, 698
Grenzschicht, 3, 126, 132, 354
  dreidimensionale, 356, 376
  turbulente, 146
Grenzschichtaufdickung, 378
Grenzschichtdicke, 127, 129, 461
  thermische, 445
Grenzschichtgleichung, 4, 299, 444
Grenzschicht-Näherung, 568
Grenzschichtströmung, 2, 128, 361, 456–458
  instationäre, 127
  kompressible, 460
  turbulente, 461, 462
Grenzschichttheorie, 128
Grenzschichttransformation, 444
Grobstruktursimulation, 329
Größen, makroskopische, 298
Größenordnungsabschätzung, 444
Grundgleichungen, kinematische, 46, 51
Grundströmung, 133
Grundwasserströmung, 159
Grundzustand, 433, 469
Gruppengeschwindigkeit, 109, 368

H
Hadley-Zirkulation, 642
Haftbedingung, 119, 302, 305
Hagelkörner, 477
Hagen-Poiseuillesches Gesetz, 121, 168
Haifischschuppen, 738
Hamaker-Konstante, 705
Hämatokritwert, 730

Hauptrichtungen, 19
Hauptsatz der Thermodynamik, 199, 200
Hauptspannungen, 19
Helmholtzsche Wellen, 111
Helmholtzsche Wirbelsätze, 237
0-Hertz-Moden, 370
Herz, 14
  Anatomie, 746–749
Herzarbeit, 725
Herzfunktionen, 746
Herzklappen, 770
Herz-Kreislauf-System, 721
Herzmuskel, 723
Herzton, 749
Herzzyklus, 14, 724, 764
hexagonale Zellen, 7, 438
Hinterkante, 225
His-Leitungssystem, 755
Hochdruckbereich, 554
hochfrequente Druckwellen, 533
Hochgeschwindigkeitjet, 533
Höhenformel, barometrische, 30
homogene Strömung, 6, 491
homogenes Modell, 510, 511
homogenes Strömungsmodell, 491
Horizontalflug, 742
Hufeisenwirbel, 156, 237, 238
Hugoniot-Kurve, 200
Hurrikan, 11
Hydraulik, 63
Hydraulikkomponenten, 509, 510, 530
hydraulisch glatte Wand, 145
hydraulischer Radius, 168
Hydrodynamik, 63, 80
hydrodynamischer Widerstand, 173
Hydrostatik, 23

I
ideale Gase, 27
Impulserhaltung, 277
Impulsgleichung, 199
Impulsmoment, 105, 106
Impulssatz, 97–106
Impulsstrom, 278
Impulsvektor, 278
Impulsverlustdicke, 129
Indifferenzkurve, 438, 470
induzierter Anstellwinkel, 240
Induzierter Auftrieb, 241
induzierter Widerstand, 230, 242
Inhibierung, 548
inhomogene Flüssigkeit, 24
Inhomogenität, 6, 7
inkompressible Strömung, 2, 45, 62, 119, 122, 277, 288
Innenströmung, 14, 715
innere Reibung, 119
innere Energie, 301
innere Kräfte, 17
instabile Dichteschichtung, 465
instabile Schichtung, 431
Instabilität, 7, 354
  absolute, 357
  konvektive, 357
  oszillatorische, 442
  schief-varikose, 443
  sekundäre, 370, 441
instationäre Grenzschichtströmung, 127
instationäre Strömung, 46, 48, 73
Intermittenz, 414, 582
inverse Kaskade, 408
Ion, freies, 687
Ionenkanäle, 754
Isentropengesetz, 189
isotherme Berandung, 434
isotherme Wand, 302
isotrope Strömung, 6
isotrope Turbulenz, 394, 403

J
Jakobi-Determinante, 309
Jet-Strömung, 5

K
Kanäle, 158, 166
Kapillare, 725
Kapillarinstabilität, 536
Kapillarkonstante, 42
Kapillarkraft, 704
Kapillarwellen, 44
kardiale Muskelzellen, 746
Karlovitz-Zahl, 598
Kármán-Analogie, 462
Kármánsche Konstante, 144
Kármánsche Wirbelstraße, 48, 150, 178, 360, 464, 641
Kaskade, inverse, 408
Kavitation, 530
Kavitationsbeiwert, 530
Kelvin-Helmholtz-Instabilität, 484
Kelvin-Helmholtzsche Welleninstabilität, 502
Kinematik
  Grundgleichungen, 51
  der Strömungen, 45–58

kinematische Viskosität, 431
Kirchhoffscher Spannungstensor, 751
Klebanoffscher Intermittenzfaktor, 318
kleinskalige Turbulenz, 412
Klimamodell, 655
Klimavorhersage, 652–657
Knoten-Instabilität, 443
Knotenstruktur, 207
Knudsen-Pumpe, 685
Knudsen-Zahl, 667–669, 675
  lokale, 686
Koaleszenz, 498, 532
Koaleszenzmaß, 500
Koeffizientenmatrix, 54
kohärente Strukturen, 409
Kohlenwasserstoff, aliphatischer, 561
Kohlenwasserstoff-Emission, 604
Kohlenwasserstoff-Verbrennung, 563
Kollisionskoeffizient, 684
Kolmogorov-Konstante, 413
Kolmogorov-Länge, 393, 578, 665
kommunizierende Gefäße, 32
Komponenten-Kontinuitätsgleichung, 307
Kompressibilität, 45, 460
kompressible Grenzschichtströmung, 460
kompressible Strömung, 2, 62, 192–196, 277, 284, 288
Kondensation, 533
Kondensationsstrecke, 538
Kondensator, 477
konservative Variablen, 300
konservative Form, 300
Kontaktlinie, 697
Kontaktlinie, bewegte, 699
Kontaktwinkel, 697
  dynamischer, 700
Kontaktwinkelhysterese, 701
Kontinuität, 62, 188
Kontinuitätsgleichung, 121, 199, 277, 285, 288, 289, 305
kontinuumsmechanische Erhaltungsgleichung, 296
Kontraktion, 67
Kontraktionszahl, 170, 516
Kontrollfläche, 98
Konvektion
  freie, 8
  thermische, 631–633
Konvektionsrollen, 8, 356, 438
Konvektionsströmung, 8, 306, 357, 423, 427
  erzwungene, 8, 423, 456
  freie, 423
    turbulente, 447
  laminare, 444
Konvektionsterme, 320
konvektive Instabilität, 357
konvektive räumliche Änderung, 50
konvektiver Fluss, 301, 312, 333
Konzentrationsfeld, 695
Konzentrationsgradient, 425
Kopfwelle, 201, 213, 225
Kopplungsbedingung, 760
Kopplungsmodell, 760
Körper, schwingender, 158
Körperkapillaren, 717
Körperkreislauf, 14, 717, 746
Kraft, 17
Kräfte
  aerodynamische, 221
  äußere, 17
  innere, 17
Kräftebilanz, 64
Kräftepotential, 705
Kraftfahrzeugumströmung, 2, 56
Kraichman-Annahme, 408
Kreislaufmodell, 774
Kreisrohrströmung, 180
Kreisscheibe, 172
Kreiszylinder, 91, 172
Kriechen, thermisches, 685
kritische Partikeldurchmesser, 500
kritische Punkte, 51
kritische Rayleigh-Zahl, 431
kritische Reynolds-Zahl, 130, 133, 137, 169, 354
kritischer Massenstrom, 522–529
kritisches Druckverhältnis, 194
Krümmer, 151, 156, 157
Kugel, starre, 674
Kugelmodell, VHS, 675
Kugelumströmung, 125
Kühlturm, 477
Kutta-Joukowski-Abströmbedingung, 231
Kutta-Joukowski-Satz, 105
Kuttasche Abflussbedingung, 266

L

Lager, 160
Lagerschmierung, 160–166
Lagerzahl, 166
Lagrange-Beschreibung, 758
Lagrange-Euler-Formulierung, 758
Lagrange-Gleichungssystem, teilchenfestes, 46
Lagrange-Methode, 417
Lagrangesche Betrachtung, 50
Lagrangesche Integral-Methode, 587

Lambda-Strukturen, 361
Lambsche Lösung, 179
laminare Konvektionsströmung, 444
laminare Rohrströmung, 121, 168
laminare Strömung, 277–284
Laminarflügel, 254
laminar-turbulenter Übergang, 131, 251, 353
Längenmaß, integrales, 578
Längenskala, 577
  der Turbulenz, 10
Laplace-Drucksprung, 703
Laplace-Gleichung, 85
Large-Eddy-Simulation, 329, 416
Lärmentwicklung, 530
Lattice-Boltzmann-Methode, 416
Laval-Düse, 194, 202
Lebensdauer, mittlere, 553
Leewellen, 635
Lennard-Jones-Potential, 674, 679
Leukozyten, 728
Lewis-Zahl, 472
Lindemann-Mechanismus, 554
Lindemann-Modell, 553
lineare Stabilitätstheorie, 354
Lochblende, 171
logarithmischer Bereich, 454
logarithmisches Wandgesetz, 144, 399
lokale Scherschicht, 383
lokale Stabilitätsanalyse, 364
lokale Störung, 380
lokale zeitliche Änderung, 50
Lösungsvektor, 311
Luftdruck, 26
Luftkraft, resultierende, 223
Luftschiff, 180
Luftschraube, 102
Luft-Wasserströmungen, 483
Lungenarterien, 717, 747
Lungenkapillaren, 717
Lungenkreislauf, 14, 717

M

Mäanderbildung, 157
Mach-Zahl, 190, 219, 302, 303, 460
Machscher Kegel, 190
Machscher Winkel, 190
Magermotor, 604
Magnet-Spin-Resonanz-Tomographie, 763
Magnus-Effekt, 96
Majorant Frequency Scheme, 678
makroskopische Größen, 298
Mandhane-Strömungskarte, 483
Manometer, 26
Mariotte-Gay-Lussacsches Gesetz, 27
Martinelli-Parameter, 482, 485
Masseerhaltung, 275
Massenanteil, 481
Massendichte, partielle, 346
Massendiffusion, 465
Massenkonzentration, 307
Massenstrom, 276, 481
  kritischer, 522–529
Materialgesetz, 757
Materialverschleiß, 530
Maxwell-Moleküle, 675
mechanische Ähnlichkeit, 125
Meeresströmungen, 11, 645
Mehrfachkorrelation, 345
Mehrfluidmodell, 345
Mehrphasenströmung, 9, 333, 343, 477
Methan-Luft-Flamme, 564, 568, 580, 590, 596, 604
Methan-Strahlflamme, 591
Mikrokanal, 12, 663
Mikroobjekt, 663
Mikro-Sensor-Array, 665
mikroskopische Beschreibung, 297
Mikroströmung, 12
Mikrowärmetauscher, 12, 681
Mikrozirkulation, 722, 725
Minimalflächen, 40
Mischungsbruch, 572, 582, 587, 591
Mischungsgeschwindigkeit, 589
Mischungsmodell, 490–492
Mischungsprozess, turbulenter, 586
Mischungsschicht, 395, 582
Mischungsweg, modifizierter, 317
Mischungswegansatz, 316
Mischungsweglänge, 388
Mitralklappe, 15, 724, 747, 770
Mitralklappeninsuffizienz, 773
Mittelung, zeitliche, 294
Mittelwertdefinition, 480
Mobilität, elektrophoretische, 693
Modell
  homogenes, 510, 511
  molekulares, 672
  separates, 511–513
  statistisches, 340
K - ε -Modell, 321
τ - ε -Modell, 328
Modellierung, strukturmechanische, 752
Modellklappen, 772
Moden, fundamentale, 374
modifizierter Mischungsweg, 317
molekulare Diffusion, 320

Molekularität, 549
Moment, 223
Momentenbildung, 296
Monin-Obukhov-Länge, 626
Monte-Carlo-Verfahren, 581, 596
Morton-Zahl, 495
Muskelfasern, 746, 760
  kardiale, 746
Myokard, 746

N
Nabla-Operator, 50
Nachlauf, 152, 230, 738
Nachlaufströmung, 2, 3, 51, 147, 360
Nachrechnung, 245
Navier-Gleitgesetz, 671, 700
Navier-Stokes-Gleichung, 4, 119, 121–123, 277, 283, 296, 298, 299, 305, 310, 577
  parabolisierte, 299
Nebelströmungen, 486
Nernst-Plank-Gleichung, 695
Newtonsche Gleichung, 63
Newtonsche Medien, 121, 296
Newtonsches Fluid, 123, 282
Newtonsches Widerstandsgesetz, 172, 173
N-Fluid Modell, 486
Nicht-Newtonsche Fluide, 123
Nicht-Newtonsche Eigenschaften, 730
Nicht-Newtonsche Strömung, 180
nichtparallele Strömungen, 377
Niederdruckbereich, 554
Niedrig-Reynolds-Zahl- K - ε -Modell, 322
Nikuradse-Diagramm, 168, 707
No Time Counter Scheme, 679
NO_x -Reduktion, 573
Normalspannung, 282
Nußelt-Zahl, 427, 429, 710
Nukleationskeim, 533

O
Oberflächenreaktion, 575
Oberflächenspannung, 484
  Kapillarität, 40–44
Oberflächenwellen, 108
offenes Gerinne, 114–116, 167
Ohnesorge-Zahl, 501
Orr-Sommerfeld-Gleichung, 136, 355, 368
oszillatorische Fingerinstabilität, 470
oszillatorische Instabilität, 442
oszillatorische Strömung, 441
Ozean, 11
Ozon, 657
Ozonloch, 657

P
Papillarmuskeln, 747
parabolisierte Navier-Stokes-Gleichung, 299
Parallelströmungs-Annahme, 134, 364
Partialdichte, 307
partielle Massendichte, 346
Partikel, stochastische, 581, 596
Partikelbetten, 507
Partikeldurchmesser, kritische, 500
Partikulärlösung, 231
passive Ventilation, 262
PDF-Simulation, 594
PDF-Transportgleichung, 581
PDF/Turbulenzmodell-Simulation, 596
Pendelklappe, 773
Perikard, 746
Periodenverdoppelung, 383
Pfeilflügel, 249–254
Pfropfenströmung, 484, 486
Phasenanteil, 480
Phasengeschwindigkeit, 108, 480–482
Phasengrenzen, 337
Phasengrenzfläche, 478, 536
Physiologie, 746
Pitot-Rohr, 70, 76
Plasmareaktor, 573
Platte, ebene, 471
Plattengrenzschicht, 134, 361
Plattengrenzschichtströmung, 147, 175
Poiseuille-Strömung, 685, 691
Polare, 740
Polarendiagramm, 228
Polynom, charakteristisches, 54
Polytrop, 32
Potential, 38, 82
Potentialgleichung, 4, 84, 210, 231, 298, 304
Potentialströmung, 82
potentielle Temperatur, 616
potentielle Vorticity, 620
Prandtl-Ablösekriterium, 263
Prandtl-Analogie, 462
Prandtl-Glauert-Ackeret-Ahnlichkeitsregel, 267, 268
Prandtl-Glauert-Regel, 226
Prandtl-Meyer-Expansion, 204
Prandtlsche Grenzschichtgleichung, 128, 311
Prandtlsche Regel, 211
Prandtlsche Tragflügeltheorie, 239

Prandtlscher Mischungsweg, 141, 321, 389
Prandtlsches Ein-Gleichungsmodell, 319
Prandtlsches Staurohr, 76
Prandtl-Schicht, 625
Prandtl-Zahl, 302, 428, 441, 711
primäre Störungsamplitude, 361
primitive Variablen, 300
Produktionsterm, 320
Profil, 223
  superkritisches, 230
Profillinie, 223
Profilströmung, 224–229
Profilumströmung, 211–215, 231
Propan-Sauerstoff-Flamme, 563
Prozess, plasmachemischer, 573
Pulmonalklappe, 14, 724, 747
Pumparbeit, 769
Pumpe, 530
Purkinje-Fasern, 748

Q
Quasistationarität, 555, 556
Quelle, 87, 88
  volumenspezifische, 333
Quellenverteilung, 88
Quellstärke, 88
Quellterm, 320, 346, 587, 589, 595
Querimpulsaustausch, 141
Querrollen-Instabilität, 443
Querströmung, 58
Querströmungsinstabilität, 251, 356, 369
Querströmungswirbel, Transition, 379

R
Radialpumpe, 537
Radius, hydraulischer, 168
Randbedingungen, 302
Randwirbel, 230, 234, 238
rauhes Rohr, 169
rauhe Wand, 144
Rauhigkeit, 145, 169
Rauhigkeitshöhe, 176
Rauhigkeitstiefe, 708
räumliche Anfachungsrate, 366
Rayleigh-Bénard-Instabilität, 424, 430
Rayleigh-Bénard-Konvektion, 423
Rayleigh-Plesset-Gleichung, 308, 478, 533
Rayleigh-Taylor-Instabilität, 534
Rayleigh-Zahl, 306, 356, 428
  kritische, 431
Rayleighsche Trägheitsinstabilität, 502
Reaktion
  bimolekulare, 550, 553
  komplexe, 548, 553
  1. Ordnung, 546
  2. Ordnung, 547
  3. Ordnung, 547
  unimolekulare, 550, 553, 554
  zusammengesetzte, 548
Reaktionsflussanalyse, 573
Reaktionsgeschwindigkeit, 546, 578
Reaktionskraft, 99
Reaktionsmechanismus, 551, 555, 563
Reaktionsordnung, 546, 548, 564
Reaktionszone, 571, 599
reaktive Strömung, 10, 346–349
Reaktor, 507
  homogener, 599
Receptivity-Bereich, 386
Recovery-Temperatur, 459
Reflexion
  diffuse, 683
  spiegelsymmetrische, 683
Regentropfen, 477
Reibung, innere, 119
reibungsbehaftete Strömung, 2, 3, 83
Reibungsbeiwert, 224
Reibungsdruckverlust, 510–511
reibungsfreie Flüssigkeit, 3, 63
Reibungsgrenzschicht, 445
Reibungskoeffizient, 165
Reibungskraft, 120, 126
Reibungswiderstand, 174
Reibungswiderstandsbeiwert, 173
Rektifikationsprozess, 478
Relaminarisierung, 738
Relativgeschwindigkeit, 482
Relaxationszeitparameter, 528
Repolarisationsphase, 755
resultierende Luftkraft, 223
Reynolds-Analogie, 457, 461
Reynolds-Ansatz, 131, 284, 294, 343, 388
Reynolds-Gleichungen, 288, 296, 313, 388
Reynolds-Spannungen, 313
Reynolds-Spannungsmodelle, 323
Reynolds-Spannungsterme, 348
Reynolds-Zahl, 125, 224, 302, 353, 495, 682, 707
  kritische, 130, 133, 137, 169, 354
Reynoldssche Schubspannung, 388
Riblet-Folien, 738
Richardson-Kaskade, 408
Richtungsfeld, 51
Ringströmung, 486
Ring-Tröpfchenströmung, 484

Ringwirbel, 764
Rohr, 166
  glattes, 169
  rauhes, 169
Rohrströmung, 129, 146, 170, 351
  ausgebildete, 169, 451
  laminare, 121, 168
  turbulente, 121, 129, 454
Rohrstutzen, 526
Rohrverzweigung, 517
Rossby-Welle, 619
Rossby-Zahl, 401, 615
Rotation, 152
Rotationsbewegung, 38
Rotationskörper, 88
Rotationsparaboloid, 121
Rückströmgebiet, 2, 149
Rückströmung, 128
Rückwärtsreaktion, 547
Ruhedruck, 194
Rührreaktor, perfekter, 599

S
Sattelpunkt, 765
Satz von Helmholtz, 233
Saugspitze, 227
Schüttung, 507
Schallgeschwindigkeit, 189, 302, 520
Schalllinie, 225
Schaufelgitter, 102
Schaumströmung, 484
Scherrate, kritische, 670
Scherschicht, 83, 143, 688
  lokale, 383
Scherspannung, 389
Scherströmung, 120
Scherströmungsinstabilität, 502
Schichtenkavitation, 530
Schichtung, instabile, 431
Schießen, 114
schief-varikose Instabilität, 443
schiefer Verdichtungsstoß, 225, 255
Schiffspropeller, 531
Schiffswellen, 110, 111
Schlagvolumen, 725, 769
schleichende Strömung, 125, 159, 685
Schleimhaut, 739
Schließung zweiter Ordnung, 325
Schließungsproblem, 348, 594
Schmelzen, 17
Schmidt-Zahl, 390, 429
Schneestaub-Lawine, 477
Schnittprinzip, 18
Schubspannung, 120, 279, 487
  turbulente, 141
Schubspannungsgeschwindigkeit, 145
Schubspannungstensor, 333
schwache Störung, 208–211
Schwall, 112
Schwallströmung, 484
Schwankungsbewegung, 352
Schwanzflosse, 717
Schwanzflossenschlag, 736
Schwebewellen, 106–108
Schwebung, 109
Schwerefeld, 427
Schwerewellen, 634
Schwerkraft, 7, 22, 39, 42, 63, 110, 187, 281, 401, 430, 483, 507, 517, 614, 682, 704
Schwimmblase, 717
Schwimmen, 716
  der Fische, 14
schwingender Körper, 158
Schwingungen, 530
Schwingungsfrequenz, 553
Sedimentationspotential, 687
Segelflug, 744
Segnersches Wasserrad, 100
Sekundärablösung, 58
sekundäre Instabilität, 370, 441
sekundäre Stabilitätsanalyse, 371
Sekundärströmung, 157, 361, 722
Sekundärwirbel, 765
Senken, 87, 88
senkrechter Verdichtungsstoß, 199, 202
Sensitivität, 560
Sensitivitätsanalyse, 561, 573
Sensitivitätskoeffizient, 560
separates Modell, 511–513
Separationsansatz, 435
Separationsparameter, 365
Sersche Scheibe, 76
Siedestrecke, 538
Simulation, direkte numerische, 10, 577
Singularität, 51
Singularitätenmethode, 231
Sinus coronarius, 747
Skalen, turbulente, 391
Smagorinski-Konstante, 333
Smagorinski-Modell, 332
Sommerfeld-Gleichung, 368
Spaltströmung, 160
Spannung, 301
Spannungs-Dehnungsverhalten, 752
Spannungstensor, 281, 751
Spannungsvektor, 19

Spannungszustand, 16, 17
Spannweite, 221
Spektralverfahren, 136
spezifische Enthalpie, 346
spezifische innere Energie, 346
Spiralgehäuse, 72
Spots, turbulente, 384
Sprühströmung, 500
Sprungbeziehung, 333
Squire-Transformation, 368
Stabilität, 25
  asymptotische, 359
  nichtparalleler Strömungen, 377
Stabilitätsanalyse, 362, 470, 534, 704
  lokale, 364
  sekundäre, 371
  zeitliche, 366
Stabilitätsdefinition, 358
Stabilitätsdiagramm, 136, 368, 369, 437–440, 470
Stabilitätstheorie, 133, 354
  lineare, 354
Stabilitätsuntersuchung, 133
Stanton-Zahl, 457
stationäre Strömung, 46
statischer Druck, 70
statistisches Modell, 340
Staulinie, 3
Staupunkt, 2, 3, 69
Staupunktströmung, 85, 86, 90
Staustromlinie, 201
Sternschicht, 688
Störung, schwache, 208–211
Störungsamplitude, primäre, 361
Störungs-Ansatz, 134
Störungsbewegung, 133
Störungsdifferentialgleichung, 136, 296, 372, 435, 441
Störwelle, 132, 357
Stoßabschwächung, 261
Stoß-Grenzschicht-Kontrolle, 260–263
Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkung, 250, 255
Stoßverzweigung, 255, 262
Stoffaustausch, 424, 464, 471
Stoffeigenschaften, 302
Stofftransport, 682
Stokessche Lösung, 125, 179
Stokesscher Durchmesser, 693
Stokessches Gesetz, 179
Stolperdraht, 152, 179
Störung, lokale, 380
Stoß , elastischer, 672
Stoßpartner, 553
Stoßquerschnitt, 678
Stoßzahl, 553
Strahlantrieb, 717
Strahlaufweitung, 185
Strahlflamme, 570, 590, 594
Strahlgeschwindigkeit, 590
Strahlpumpe, 171
Stratosphäre, 657
Streckung, 592
Streichlinie, 46
Streuquerschnitt, 676
Stromfaden, 48, 61
Stromfunktion, 90
Stromlinie, 47
Stromröhre, 48
Strömung
  disperse, 484, 486
  drehungsfreie, 83
  im Herzen, 756–770
  homogene, 6
  inkompressible, 2, 45, 62, 119, 122, 277, 288
  instationäre, 46, 48, 73
  isotrope, 6
  Kinematik, 45–58
  kompressible, 2, 62, 192–196, 277, 284, 288
  laminare, 277–284
  Nicht-Newtonsche, 180
  oszillatorische, 441
  reaktive, 10, 346–349, 575, 576
  reibungsbehaftete, 2, 3, 83
  schleichende, 125, 159, 685
  sekundäre, 157, 361, 722
  stationäre, 46
  Topologie, 51–58
  transitionelle, 722
  transsonische, 215–217
  turbulente, 5, 169, 284–289
  windgetriebene, 645–647
  zeitlich instabile, 357
  zeitlich stabile, 357
Strömungen, nichtparallele, 377
Strömungsablösung, 128, 149–156, 172, 180, 211, 219, 227, 228, 255, 263, 264
  dreidimensionale, 264
Strömungsbeeinflussung (receptivity), 383
Strömungsbereich, 2, 3
Strömungsform, 482, 483
Strömungskontrolle, 738–740
Strömungsmesstechnik, 664
Strömungsmodell, 486
  homogenes, 491
Strömungspotential, 90, 687

Strömungssichtbarmachung, 48
Strömungssimulation, 245
Strömungsstruktur, 764
Strömungswiderstand, 125
Strukturbildung, 383
Strukturen, 330
  kohärente, 409
strukturmechanische Modellierung, 752
subharmonischer Transitionstyp, 374
Super-Kavitation, 530
superkritisches Profil, 230
Suspension, 728
Systole, 724

T
tangentiales Einblasen, 154
Taylor-Mikroskala, 394
Taylor-Zahl, 356
Teilchenbahnen, 46
Teilchenerhaltungsgleichungen, 347
Teilchensorte, 346
Temperatur, 301
  Favre-gemittelte, 295
  potentielle, 616
Temperaturabhängigkeit, 551
Temperaturleitfähigkeit, turbulente, 314
Temperaturleitzahl, 431
Temperaturprofil, 445
thermische Grenzschichtdicke, 445
thermische Konvektion, 631–633
thermische Zellularkonvektion, 430
thermischer Einlauf, 711
thermischer Wind, 617
thermisches Windsystem, 627–631
Thrombozyten, 728
Tiefdruckgebiet, 638–640
Tollmien-Schlichting-Transition, 379
Tollmien-Schlichting-Welle, 135, 251, 355, 361, 369
Topologie einer Strömung, 51–58
Tornado, 641
Torricellische Ausflussformel, 67
Trägheitsbereich, 330, 405
Trägheitskraft, 126
Transitionstyp, subharmonischer, 374
Tragflügel, 220, 237
  transsonischer, 230
Tragflügelauftrieb, 94–97
Tragflügelberechnung, 243, 244
Tragflügelströmung, 229, 230
Tragflügeltheorie, 231
Tragflügelumströmung, 2, 94
Transformationsgleichung, 309
Transition, 131, 386
  der Querströmungswirbel, 379
transitionelle Strömung, 722
Transitionsbereich, 138, 709
Transport, turbulenter, 348
Transportgleichung, 581, 595
K-Transportgleichung, 321
Transportgleichungsmodell, 324
Transportmodell, 319–323
transsonische Anströmung, 224
transsonische Strömung, 215–217
transsonischer Tragflügel, 230
Treibhauseffekt, 653
Trennapparat, 507
Trennfläche, 77
Trennkanal, 695
Trennschicht, 149
Trikuspidalklappe, 724, 747
Tröpfchenströmung, 502
Tropfen, 494
Tropfenbildung, 500
Tropfenschwingung, 502
Tropfenströmung, 500
Tropfenzerfall, 501
tropischer Zyklon, 640, 641
Turbine, 530
turbulente Diffusion, 320
turbulente Durchmischung, 390, 391
turbulente Energiebeziehungen, 391–394
turbulente Flammen, 10
turbulente freie Konvektionsströmung, 447
turbulente Gesamtenergie, 312
turbulente Grenzschicht, 146
turbulente Grenzschichtströmung, 461, 462
turbulente kinetische Energie, 312
turbulente Prandtl-Zahl, 314, 390
turbulente Rohrströmung, 121, 129, 454
turbulente Schubspannung, 141
turbulente Skalen, 391
turbulente Spots, 384
turbulente Strömung, 5, 169, 284–289
turbulente Temperaturleitfähigkeit, 314
turbulenter Fluss, 312
turbulenter Transport, 348
turbulenter Wärmefluss, 315
turbulenter Wärmestrom, 314
Turbulenz, 5, 129, 353
  ausgebildete, 388
  Einsetzen, 353
  freie, 395–397
  isotrope, 394, 403
  kleinskalige, 412
  Längenskala, 10
  in Wandnähe, 397–400

Turbulenz (*cont.*)
im Windkanal, 402
zweidimensionale, 406–409
Turbulenzlänge, charakteristische, 403
Turbulenzflecken, 132, 138, 361
Turbulenzgrad, 132, 464
Turbulenzmodell, 313–315
k-ε-Turbulenzmodell, 349
Turbulenzproduktion, 449
Turbulenz-Reynolds-Zahl, 578, 597

U
Überdruckmanometer, 34
Übergang, laminar-turbulenter, 131, 251, 353
Überschallbereich, 3
Überschallflug, 220
Überschallflugzeug, 201, 270
Überschallströmung, 190
Überschallumströmung, 212
Überschallvorderkante, 266
Umströmung, 715
Unterdruckmanometer, 34
Unterschall-Anströmung, 3, 234
Unterschall-Hinterkante, 266
Unterschallprofil, 740
Unterschallströmung, 190
Unterschall-Vorderkante, 266
Unterschicht, viskose, 143, 398, 454
U-Rohrmanometer, 32

V
Validierung, 245
van-der-Waals-Kraft, 679, 698
Variablen
konservative, 300
primitive, 300
Varianz, 588
Vena cava, 729, 746, 747
Venenkreislauf, 747
Ventilation, passive, 262
Ventil, 530
Ventrikel, 14, 723, 746
Ventrikelbewegung, 751
Ventrikeldrehung, 768
Ventrikelkontraktion, 14, 747
Ventrikelpumparbeit, 769
Ventrikelrelaxation, 14, 747
Venturi-Düse, 171
verallgemeinerte Bernoulli-Gleichung, 192
Verbrennung, nichtvorgemischte, 576
Verbrennungsmotor, 530
Verdünnung, 200
Verdünnungswelle, 192, 196
Verdampferrohr, 536
Verdampfung, 521, 533
Verdichtungsstoß , 3, 192, 200, 250, 265, 303
senkrechter, 199, 202
Verdichtungswelle, 191, 206
Verdrängungsdicke, 147
Verengung, 151
Verifikation, 245
Verkehrsflugzeug, 220
Verlustbeiwert, 168, 707
Vermischung, turbulente, 586
Verteilungsfunktion, 296, 672
Verzweigung, 722
virtuelle Zusatzmasse, 339
viskose Unterschicht, 143, 398, 454
Viskosität, kinematische, 431
Viskositätskoeffizient, 390
Vogelflug, 14, 220–223, 716, 740
Void, 480
Volumenanteil, 513–515
Volumenausdehnungskoeffizient, 431
Volumenelement, 275
volumenspezifische Quelle, 333
volumenspezifische Erhaltungsgröße, 333
Volumenstromdichte, 480
Volumenwärmequelle, 333
Vorderkante, 225
Vorentwurf, 245
Vorflügel, 155
Vorhof, 14, 723, 746
Vorhofkontraktion, 747
Vormischflamme, 597, 600
Vormischflammenfront, 600
Vorticity, 618–621
potentielle, 620
Vortrieb, 220, 737, 740
Vortriebsleistung, 740
Vorwärtsflug, 740
Vorwärtsreaktion, 547
Vulkanasche-Wolke, 477

W
Wafer, 575
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, 580
Wand
adiabate, 302
hydraulisch glatte, 145
isotherme, 302
rauhe, 144
wellige, 212
Wandgesetz, 146
logarithmisches, 144, 399
Wandkrümmung, 378

Wandstromlinien, 58
Wandturbulenz, 143–145, 394
Wärmeausdehnungskoeffizient, 306
Wärmediffusion, 465
Wärmefluss, 333
  turbulenter, 315
Wärmeleitung, 427–429, 431, 487
Wärmestrom, 301
  turbulenter, 314
Wärmetransport, 682
Wärmeübergang, 423
Wärmeübergangskoeffizient, 427, 453
Wasser-Wasserdampf-Strömung, 481
Wasserbildung, 549
Wassersprung, 116
Wasserwellen, 11, 108, 647–650
Weber-Zahl, 501, 536, 682
Wechselwirkungspotential, 674
Weglänge, mittlere freie, 668
Weissenberg-Effekt, 183
Welle, 486
Wellen-Instabilität, 365
Wellenansatz, 135
Wellenbewegung, 719, 736
Wellenform, 190
Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit, 732
Wellenfront, 190
Wellengruppe, 109
Wellenpaket, 355, 380
Wellenstörung, 355, 366
Wellensystem, 110
Wellenwiderstand, 174, 230, 264
Wellenzahldiagramm, 370
wellige Wand, 212
Wettervorhersage, 650–652
Widerstand, 3, 120, 172, 223
  hydrodynamischer, 173
  induzierter, 230, 242
Widerstandsbeiwert, 173, 179, 227, 495
Widerstandsmessung, 177
Wiederanlegen, 152
Wimpern, 717
Wind
  geostrophischer, 616
  thermischer, 617
windgetriebene Strömung, 645–647
Windkanal, 247
Windschubspannung, 646
Windsystem, thermisches, 627–631
Wirbel, 230
  gebundener, 234, 238
Δ-Wirbel, 132
Wirbelbildung, 78
Wirbelfilament, 237
Wirbeln, 77
Wirbelstärke, 234, 579
Wirbelstruktur, 6, 384, 765
Wirbelviskosität, 313
Wirbelviskositätsmodell, 313
  algebraisches, 316
Womersley-Zahl, 763

Z

Zähigkeit, 119
  dynamische, 120
Zapfen, 160
Zeitgesetz, 546, 550
zeitlich instabile Strömung, 357
zeitlich stabile Strömung, 357
zeitliche Anfachungsrate, 366
zeitliche Mittelung, 294
zeitliche Stabilitätsanalyse, 366
Zellen, hexagonale, 7, 438
Zellstrukturen, 7, 441
Zellularkonvektion, 7
  thermische, 430
Zentrifugalbeschleunigung, 36
Zentrifugalkraft, 39, 158
Zentrifugalpumpe, 536
Zentrifuge, 424
Zerstäuben, 501
Zeta-Potential, 689, 692
Zick-zack-Instabilität, 442
Zirkulation, 81, 231
Zirkulationsverteilung, 234
Zusatzmasse, virtuelle, 339
Zustandsgleichung, 27, 487
Zwei-Fluid-Gleichung, 486
Zwei-Fluid-Modell, 486, 490, 498
Zwei-Gleichungsmodell, 321
zweidimensionale Turbulenz, 406–409
Zweifachkorrelationen, 345
Zweikomponenten-Flüssigkeitsschicht, 306
Zweikomponentengemisch, 468
Zweiphaseninstabilität, 538
Zweiphasenströmung, 9, 338
Zweistromproblem, 572
Zwischenphasenfläche, 478
Zyklon, 639
  tropischer, 640, 641

Springer

springer.com

Das LiveReference zum Buch – alle Inhalte im digitalen Zugriff

Dieses Werk können Sie demnächst auch als digitales Produkt abonnieren. In der inhaltlichen Qualität, die Sie von Springer kennen, mit dem zusätzlichen Vorteil, dass Sie als Leser auch alle Aktualisierungen und Erweiterungen mitbekommen. Damit sind Sie immer auf dem neuesten Stand, auch ohne das Bücherregal in regelmäßigen Abständen zu erneuern.

Neugierig?
Dann schicken Sie eine E-Mail an srde@springer.com.
Wir informieren Sie, sobald das LiveReference zum Buch verfügbar ist

springerreference.de

Part of SPRINGER NATURE